

COLLECTED PAPERS
(NOTE E MEMORIE)

•

•

Paper N° 1 (related to N° 2) deals with the inert *mass* of a rigid system of electric charges, and derives it from the reaction on the moving charges of their own electromagnetic field. The result is that, in the most general case, the mass is expressed by a tensor. In the particular case of a spherically symmetric system, the tensor degenerates into a scalar equal to $(4/3) U/c^2$. This value, while in agreement with a well known calculation of the electromagnetic mass of a spherical homogeneous shell performed by Lorentz, contradicts Einstein's principle of equivalence (see papers 4 a, 4 b, 6).

Paper N° 2 determines, by the methods of general relativity, the effect of a uniform gravitational field on a system of electric charges. It turns out that the charges have a *weight* equal to that of a material mass U/c^2 (where U is the electrostatic energy of the system), in perfect agreement with Einstein's principle of equivalence between mass and energy.

E. PERSICO

I.

SULLA DINAMICA DI UN SISTEMA RIGIDO DI CARICHE ELETTRICHE IN MOTO TRASLATORIO

«Nuovo Cimento», 22, 199-207 (1921).

§ 1. — Quando un sistema di cariche elettriche si muove di moto qualunque il campo elettrico da esso generato è diverso da quello a cui porterebbe la legge di Coulomb. Ora il campo elettrico prodotto da tutto il sistema, esercita sopra tutti gli elementi di carica del sistema delle forze. Il risultante di queste forze, vale a dire il risultante delle forze elettriche interne, sarebbe evidentemente nullo se valesse la legge di Coulomb, ma non lo è però più, almeno in generale, quando il sistema si muove, poiché in tale caso non vale più quella legge.

Tale risultante dà la reazione d'inerzia elettromagnetica e lo scopo del presente lavoro è appunto di calcolarlo nel caso di un sistema qualsiasi in moto traslatorio. Nel caso che il sistema sia una distribuzione sferica di elettricità superficiale, come si ammette nella maggior parte dei modelli elettronici, è noto che si trova ⁽¹⁾ che tale risultante è dato, almeno in prima approssimazione, da

$$(1) \quad -\frac{2e^2}{3Rc^3} \Gamma + \frac{2e^2}{3c^2} \dot{\Gamma}$$

dove e , R indicano la carica totale ed il raggio del sistema, c la velocità della luce, Γ e $\dot{\Gamma}$ l'accelerazione e la sua derivata rispetto al tempo. Per

(1) RICHARDSON, *Electron Theory of Matter*, Cap. XIII. La differenza tra le mie formule e quelle del Richardson proviene dal fatto che quest'ultimo usa le unità di Heaviside.

moti quasi-stazionarii il secondo termine di (1) diventa trascurabile con che (1) si riduce a

$$(2) \quad -m\Gamma$$

essendo m la massa elettromagnetica.

Nel § 2 si trova la generalizzazione della (1) al caso di sistemi qualsiasi, rispondenti per esempio ai modelli molecolari, sempre supponendo che la velocità sia trascurabile di fronte a quella della luce. Se F_i ($i = 1, 2, 3$) sono le componenti del risultante in questione si trova

$$(3) \quad F_i = - \sum_k m_{ik} \Gamma_k + \sum_k \sigma_{ik} \dot{\Gamma}_k$$

essendo m_{ik} , σ_{ik} quantità dipendenti dalla costituzione del sistema. Non si può più quindi nel caso generale parlare di una massa elettromagnetica scalare, si introduce invece al suo posto la considerazione del tensore m_{ik} .

Il § 3 è dedicato allo studio dinamico della legge dei moti quasi-stazionarii:

$$(4) \quad K_i = \sum_k m_{ik} \Gamma_k$$

essendo K_i le componenti della forza esterna. Si mostra che con tale legge continuano a valere i principii fondamentali della forza viva e di Hamilton.

Nel § 4 infine la legge (4) dei moti quasi-stazionarii, valida soltanto per velocità piccole viene a mezzo del principio di relatività in senso stretto generalizzata al caso di velocità qualunque.

Resta con ciò completato lo studio della masse elettromagnetiche come masse d'inerzia. In un prossimo lavoro considererò, dal punto di vista della teoria generale della relatività, le masse elettromagnetiche come masse pesanti.

§ 2. - È noto ⁽²⁾ che la forza elettrica dovuta ad una carica puntiforme Γ in moto è la somma di due che, supponendo trascurabile il rapporto della velocità v della particella alla velocità c della luce sono: la prima \mathbf{E}_1 , la forza data dalla legge di Coulomb; la seconda \mathbf{E}_2 ha l'espressione

$$(5) \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\Gamma \cdot \mathbf{a}}{c^2 r} \mathbf{a} - \frac{\Gamma}{c^2 r} \Gamma^*.$$

In questa formula r rappresenta la distanza tra la particella M ed il punto P in cui si calcola la forza, \mathbf{a} un vettore di grandezza 1 e di orientazione MP . Γ^* infine è l'accelerazione della particella al tempo $t - (r/c)$. Se in M invece della carica Γ c'è la carica $\rho d\tau$ (ρ densità elettrica, $d\tau$ elemento di volume) la forza in P sarà $\rho d\tau (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)$ e quindi la forza esercitata in P da tutte le cariche sarà $\int \rho (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) d\tau$ ove l'integrazione si deve estendere a tutto lo spazio τ occupato da cariche. Se ora nel punto P si ha la carica $\rho' d\tau'$ su di esso agisce la forza $\rho' d\tau' \int \rho (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) d\tau$.

(2) Vedi per esempio RICHARDSON, op. cit.

La forza agente su tutto il sistema è perciò

$$\mathbf{F} = \iint \rho\rho' (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) d\tau d\tau',$$

dove le due integrazioni debbono essere estese al medesimo campo. D'altra parte si ha evidentemente

$$\iint \rho\rho' \mathbf{E}_1 d\tau d\tau' = 0$$

e quindi

$$\mathbf{F} = \iint \rho\rho' \mathbf{E}_2 d\tau d\tau'.$$

Se ora indichiamo con $\Gamma, \dot{\Gamma}$ l'accelerazione e la sua derivata rispetto al tempo, al tempo t , potremo porre, se r è sufficientemente piccolo

$$\Gamma^* = \Gamma - \frac{r}{c} \dot{\Gamma}$$

si ottiene infine

$$(6) \quad \mathbf{F} = \iint \left(\frac{\Gamma \cdot \mathbf{a}}{c^2 r} a - \frac{\Gamma}{c^2 r} \right) \rho\rho' d\tau d\tau' - \iint \left(\frac{\dot{\Gamma} \cdot \mathbf{a}}{c^3} a - \frac{\dot{\Gamma}}{c^3} \right) \rho\rho' d\tau d\tau'.$$

Indichiamo con x_1, x_2, x_3 , coordinate cartesiane ortogonali e siano (x_i) le coordinate di M, (x'_i) quelle di P. Le componenti di \mathbf{a} sono $a_i = \frac{x'_i - x_i}{r}$. Scrivendo scalarmente la (6) si ottiene allora, osservando che, per l'ipotesi fatta del moto traslatorio le Γ_i e $\dot{\Gamma}_i$ sono costanti durante l'integrazione:

$$(7) \quad \mathbf{F}_i = - \sum_k m_{ik} \Gamma_k + \sum_k \sigma_{ik} \dot{\Gamma}_k.$$

Dove si è posto:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{ii} = \frac{2U}{c^2} - \iint \frac{\rho\rho' (x'_i - x_i)^2}{c^2 r^3} d\tau d\tau' \\ m_{ik} = m_{ki} = - \iint \frac{\rho\rho' (x'_i - x_i)(x'_k - x_k)}{c^2 r^3} d\tau d\tau' \end{array} \right. \quad i \neq k$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ii} = \frac{e^2}{c^3} - \iint \frac{\rho\rho' (x'_i - x_i)^2}{c^3 r^2} d\tau d\tau' \\ \sigma_{ik} = \sigma_{ki} = - \iint \frac{\rho\rho' (x'_i - x_i)(x'_k - x_k)}{c^3 r^2} d\tau d\tau'. \end{array} \right. \quad i \neq k.$$

In queste formule U rappresenta l'energia elettrostatica del sistema $= \frac{1}{2} \iint \frac{\rho\rho'}{r} d\tau d\tau'$ ed e la carica elettrica totale $= \int \rho d\tau = \int \rho' d\tau'$.

Dalle espressioni (8) (9) risulta subito che se si cambiano gli assi (x_i) in altri (y_i) con la sostituzione ortogonale:

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

gli m_{ik} ed i σ_{ik} relativi ai nuovi assi sono:

$$m'_{ik} = \sum_{rs} \alpha_{sr} \alpha_{ks} m_{rs}$$

$$\sigma'_{ik} = \sum_{rs} \alpha_{sr} \alpha_{ks} \sigma_{rs} .$$

Tanto m_{ik} che σ_{ik} sono quindi tensori covarianti simmetrici. Per ciascuno di essi si avranno perciò tre direzioni principali ortogonali tali che prendendo gli assi ad esse paralleli si abbia $m_{ik} = 0$ oppure $\sigma_{ik} = 0$ quando $i \neq k$.

Gli assi principali dei tensori m, σ saranno però generalmente differenti. Nel caso che il sistema abbia simmetria sferica si possono effettuare le integrazioni in (8) (9) perché al posto di $\frac{(x'_i - x_i)(x'_k - x_k)}{r^2}$ si può porre il valor medio di questa espressione per tutte le possibili direzioni MP poiché ai due punti MP corrispondono in questo caso infinite coppie distinte soltanto per l'orientazione. Ora tale valor medio se $i = k$ è $\frac{2\pi}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$; se invece $i \neq k$ è nullo.

Si ha perciò

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = \frac{4U}{3c^2} \quad ; \quad m_{23} = m_{31} = m_{12} = 0 ;$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \quad ; \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0 .$$

Sostituendo questi valori in (7) si ottengono formule ben note nel caso che il sistema sia uno strato sferico omogeneo.

§ 3. - Riprendendo il caso generale osserviamo che per moti quasi-stazionarii alla (5) potrà sostituirsi:

$$F_i = - \sum_k m_{ik} \Gamma_k .$$

Se si pensa che sul sistema agisca una forza esterna (X_i) la forza totale sarà ($X_i + F_i$). Se si suppone ora il sistema privo di massa materiale deve essere $X_i + F_i = 0$ e perciò

$$(10) \quad X_i = \sum_k m_{ik} \Gamma_k .$$

È agevole mostrare come con la legge del moto (10) si conservano il principio delle forze vive e quello di Hamilton. Infatti si indichi $V \equiv (V_1, V_2, V_3)$ la velocità e si moltiplichi (10) per V_i : sommando poi rispetto ad i si ottiene

$$\sum_i X_i V_i = \sum_{ik} m_{ik} V_i \frac{dV_k}{dt} .$$

Scambiando nella seconda somma i con k ed osservando che $m_{ik} = m_{ki}$

$$\sum_i X_i V_i = \sum_{ik} m_{ik} V_k \frac{dV_i}{dt}$$

sommando

$$2 \sum_{ik} \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{V}_i = \sum m_{ik} \left(\mathbf{V}_i \frac{d\mathbf{V}_k}{dt} + \mathbf{V}_k \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{ik} m_{ik} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_k.$$

Il primo membro è il doppio della potenza P delle forze esterne. Si ha perciò

$$(11) \quad P = \frac{dT}{dt} \quad \text{dove è} \quad T = \frac{1}{2} \sum m_{ik} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_k.$$

Moltiplicando invece i due membri di (10) per δx_i , e sommando si ottiene similmente

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{X}_i \delta x_i &= \frac{1}{2} \sum_{ik} m_{ik} \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_k \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ik} m_{ik} (\dot{x}_k \delta x_i + \dot{x}_i \delta x_k) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{ik} m_{ik} (\dot{x}_k \delta \dot{x}_i + \dot{x}_i \delta \dot{x}_k) \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ik} m_{ik} (\dot{x}_k \delta x_i + \dot{x}_i \delta x_k) \right\} - \delta T. \end{aligned}$$

Moltiplicando per dt e integrando tra due limiti t' , t'' nei quali si suppongano nulle le variazioni δx_i si ottiene

$$(12) \quad \int_{t'}^{t''} \left(\delta T + \sum_i \mathbf{X}_i \delta x_i \right) dt = 0$$

che esprime il principio di Hamilton.

Se invece che ad assi qualunque ci si riferisce agli assi principali del tensore m_{ik} le (10) prendono la forma semplice:

$$(13) \quad \mathbf{X}_i = m_{ii} \Gamma_i.$$

§ 4. - Questa formula vale soltanto quando V/c è trascurabile. Per generalizzarla a velocità qualsiasi indichiamo con $S \equiv (x_1, x_2, x_3, t)$ il sistema di riferimento indicato; con $S^* \equiv (x, y, z, t)$ un sistema fisso rispetto a S con l'asse x orientato come la velocità del sistema ad un certo tempo \bar{t} generico ma fissato; infine sia $S' \equiv (x', y', z', t')$ un sistema con gli assi di spazio paralleli ad xyz che si muova relativamente ad S^* di moto uniforme con velocità eguale a quella del mobile al tempo \bar{t} , la cui grandezza sia v . Si avrà

$$(14) \quad t' = \beta \left(t - \frac{v}{c^2} x \right); \quad x' = \beta (x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dove, fissato \bar{t} , v e quindi β sono costanti.

Supponiamo che le forze agenti sul nostro sistema derivino da un campo elettromagnetico esterno (\mathbf{E} , \mathbf{H}); siccome all'istante t il sistema ha velocità nulla rispetto ad S' varranno per esso le (10) e, con evidente significato dei simboli, si avrà perciò:

$$\begin{aligned} e\mathbf{E}'_x &= m_{xx} \Gamma'_x + m_{xy} \Gamma'_y + m_{xz} \Gamma'_z \\ e\mathbf{E}'_y &= m_{yx} \Gamma'_x + m_{yy} \Gamma'_y + m_{yz} \Gamma'_z \\ e\mathbf{E}'_z &= m_{zx} \Gamma'_x + m_{zy} \Gamma'_y + m_{zz} \Gamma'_z. \end{aligned}$$

Si ha però

$$eE'_x = eE_x \quad ; \quad eE'_y = e\beta \left(E_y - \frac{v}{c} H_x \right) \quad , \quad eE'_z = e\beta \left(E_z + \frac{v}{c} H_y \right).$$

Se si pone perciò

$$(15) \quad \mathbf{k} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{H} \right)$$

si trova

$$eE'_x = k_x \quad eE'_y = e\beta k_y \quad eE'_z = e\beta k_z.$$

D'altra parte:

$$\Gamma'_x = \frac{d^2 x' dt' - d^2 t' dx'}{dt'^3}$$

ma, al tempo t , $\frac{dx'}{dt'} = 0$ quindi $\Gamma'_x = \frac{d^2 x'}{dt'^2}$. Prendendo t per variabile indipendente ed osservando che $\frac{dx}{dt} = v$

$$\Gamma'_x = \beta^3 \Gamma_x. \quad \text{Parimenti} \quad \Gamma'_y = \beta^2 \Gamma_y, \quad \Gamma'_z = \beta^2 \Gamma_z.$$

Sostituendo

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_x = m_{xx} \beta^3 \ddot{x} + m_{xy} \beta^2 \ddot{y} + m_{xz} \beta^2 \ddot{z} \\ k_y = m_{yx} \beta^2 \ddot{x} + m_{yy} \beta \ddot{y} + m_{yz} \beta \ddot{z} \\ k_z = m_{zx} \beta^2 \ddot{x} + m_{zy} \beta \ddot{y} + m_{zz} \beta \ddot{z}. \end{array} \right.$$

Indicando con α_{xi} il coseno dell'angolo tra l'asse x e l'asse x_i , si ha

$$k_i = \alpha_{xi} k_x + \alpha_{yi} k_y + \alpha_{zi} k_z.$$

D'altra parte essendo m_{i0} covariante si ha per esempio

$$m_{xy} = \sum_r m_{rr} \alpha_{xr} \alpha_{yr}.$$

Parimenti

$$\ddot{x} = \sum_j \ddot{x}_j \alpha_{xj}.$$

Moltiplicando allora le (16) per α_{xi} , α_{yi} , α_{zi} e sommando si trova

$$k_i = \sum_{rj} m_{rr} \ddot{x}_j \left[\begin{array}{l} \beta^3 \alpha_{xr}^2 \alpha_{xj} \alpha_{xi} + \beta^2 \alpha_{xr} \alpha_{yr} \alpha_{yj} \alpha_{xi} + \beta^2 \alpha_{xr} \alpha_{zr} \alpha_{zj} \alpha_{xi} \\ + \beta^2 \alpha_{yr} \alpha_{xr} \alpha_{xj} \alpha_{yi} + \beta \alpha_{yr}^2 \alpha_{yj} \alpha_{yi} + \beta \alpha_{yr} \alpha_{zr} \alpha_{zj} \alpha_{yi} \\ + \beta^2 \alpha_{zr} \alpha_{xr} \alpha_{xj} \alpha_{zi} + \beta \alpha_{zr} \alpha_{yr} \alpha_{yj} \alpha_{zi} + \beta \alpha_{zr}^2 \alpha_{zj} \alpha_{zi}. \end{array} \right]$$

Si ha però $\alpha_{xi} = \frac{\dot{x}_i}{v}$. Tenendo conto delle relazioni tra le α si trova da ultimo la cercata generalizzazione delle (13)

$$(17) \quad k_i = \beta \sum_{jr} \ddot{x}_j m_{rr} \left\{ (\beta - 1)^2 \frac{\dot{x}_i \dot{x}_j \dot{x}_r^2}{v^4} \right. \\ \left. + (\beta - 1) \left[(jr) \frac{\dot{x}_i \dot{x}_r}{v^2} + (ir) \frac{\dot{x}_j \dot{x}_r}{v^2} \right] + (ir) (jr) \right\}.$$

Dove

$$(jr) = 1 \quad \text{se } j = r \quad ; \quad (jr) = 0 \quad \text{se } j \neq r.$$

Nel caso della simmetria sferica posto $m_{11} = m_{22} = m_{33} = m$ si può effettuare la somma in (17) e si trova:

$$k_i = \beta m \ddot{x}_i + m\beta (\beta^2 - 1) \frac{\dot{x}_i}{v^2} \sum_j \dot{x}_j \ddot{x}_j$$

da cui ricordando che

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

si ritrova la notissima formula della dinamica elettronica

$$k_i = \frac{d}{dt} \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Pisa, gennaio 1921.

N° 2.

For the introduction to this paper see N° 1.

2.

SULL'ELETTROSTATICA DI UN CAMPO GRAVITAZIONALE UNIFORME E SUL PESO DELLE MASSE ELETTROMAGNETICHE

« Nuovo Cimento », 22, 176-188 (1921).

INTRODUZIONE.

Fine di questo scritto è la ricerca dell'alterazione prodotta da un campo gravitazionale uniforme sui fenomeni elettrostatici che hanno luogo in esso fatta sulle basi della teoria generale della relatività. Stabilita l'equazione differenziale che lega il potenziale elettrico alla densità delle cariche, e che corrisponde all'equazione di Poisson dell'elettrostatica classica, si riesce ad integrarla nel caso almeno che il campo di gravitazione sia sufficientemente poco intenso, ed il campo della gravitazione terrestre soddisfa largamente a tale condizione, trovando così le correzioni da apportarsi alla legge di Coulomb per la presenza del campo di gravità.

In una prima applicazione si studia la distribuzione dell'elettricità sopra una sfera conduttrice mostrando che per influenza del campo la sfera si polarizza.

La seconda applicazione è dedicata alla ricerca del peso di una massa elettromagnetica, vale a dire della forza che, per effetto di trovarsi in un campo di gravità, si esercita sopra un sistema di cariche elettriche rigido (per esempio sostenuto da un dielettrico rigido).

Si trova che tale peso è dato dal prodotto dell'accelerazione di gravità per u/c^2 dove u rappresenta l'energia elettrostatica delle cariche del sistema e c la velocità della luce. Si trova quindi che la massa pesante, cioè il rapporto tra il peso e l'accelerazione di gravità, per il nostro sistema non coincide almeno in generale, con la massa inerte, poiché, ad esempio per un sistema avente simmetria sferica, quest'ultima viene data da $(4/3) u/c^2$, con i simboli di prima.

È noto del resto come la relatività in senso stretto conduca a prendere $\Delta u/c^2$ come aumento della massa *inerte* di un sistema al quale viene comunicata l'energia Δu , e ciò può agevolmente mettersi in relazione con il risultato accennato.

Si mostra da ultimo come possa trovarsi un punto che, rispetto al peso del nostro sistema di cariche, gode delle stesse proprietà di cui gode il centro di gravità rispetto al peso di un ordinario sistema di masse materiali.

PARTE PRIMA

ELETTROSTATICA DI UN CAMPO DI GRAVITÀ.

§ 1. - Consideriamo una regione dello spazio sede di un campo uniforme di gravità e supponiamo che i fenomeni elettrostatici che pensiamo aver luogo in essa siano talmente poco intensi che si possa ritenere trascurabile l'alterazione da essi prodotta sulla metrica della regione in discorso. L'elemento metrico della varietà spazio-tempo, relativo a tale regione potrà in tali ipotesi, porsi sotto la forma ⁽¹⁾

$$(1) \quad ds^2 = a dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

essendo a funzione soltanto di z .

Le variabili t, x, y, z saranno anche indicate con x_0, x_1, x_2, x_3 ed i coefficienti della forma quadratica (1) con g_{ik} . Sia φ_i il potenziale vettore ed F_{ik} il campo elettromagnetico. Sarà

$$(2) \quad F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki}$$

riferendoci alla forma fondamentale (1).

Limitando le nostre considerazioni ai campi elettrostatici porremo $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ e, per brevità, $\varphi_0 = \varphi$. Ora si ha:

$$F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

cioè

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{lll} F_{01} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} & F_{02} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} & F_{03} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ F_{23} = F_{32} = F_{12} = 0 & F_{ik} = -F_{ki} & F_{ii} = 0. \end{array} \right.$$

Si ha inoltre:

$$F^{(ij)} = \sum_{kh} g^{(ik)} g^{(jh)} F_{hk} = g^{(ii)} g^{(jj)} F_{ij}$$

da cui osservando che:

$$g^{(00)} = \frac{1}{a} \quad g^{(11)} = g^{(22)} = g^{(33)} = -1$$

si ottiene:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{lll} F^{(01)} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & F^{(02)} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial y} & F^{(03)} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ F^{(23)} = F^{(32)} = F^{(12)} = 0 & F^{(ik)} = -F^{(ki)} & F^{(ii)} = 0. \end{array} \right.$$

Nel caso che stiamo trattando può darsi all'azione la forma seguente,

$$(5) \quad W = \int_{\omega} \sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)} d\omega + \int de \int \varphi dx_0$$

(1) T. LEVI-CIVITA, Nota II. *Sui ds² einsteiniani*, «Rend. Acc. Lincei», 27, 1° sem. N° 7.

dove

$$d\omega = \sqrt{-\|g_{ik}\|} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{a} dx dy dz dt$$

è l'elemento di ipervolume della varietà e l'integrazione relativa a $d\omega$ va estesa ad una determinata regione della varietà mentre le integrazioni relative a de , dx_0 vanno estese rispettivamente a tutti gli elementi di carica elettrica le cui linee orarie passano per la regione considerata ed a quei segmenti delle dette linee che in essa si trovano.

§ 2. - Nella variazione di W , φ potrà variarsi arbitrariamente, con l'unica condizione che sul contorno della regione d'integrazione sia $\delta\varphi = 0$.

Invece le variazioni δx , δy , δz oltre alla condizione $\delta x = \delta y = \delta z = 0$ sul contorno potranno essere assoggettate anche ad altre da determinarsi nei vari casi particolari. Per esempio nell'interno di un corpo conduttore esse saranno completamente arbitrarie mentre in un dielettrico rigido dovranno rappresentare le componenti di uno spostamento virtuale rigido e così di seguito.

Portando in (5) i valori (3), (4) si trova:

$$(6) \quad W = -\frac{1}{2} \iiint \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz dt + \int de \int \varphi dt$$

da cui

$$(7) \quad \delta W = \iiint \delta\varphi \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \Delta_a \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{d\sqrt{a}}{dz} + \rho \right] dx dy dz dt \\ + \iiint \rho \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \delta z \right) dx dy dz dt$$

come subito si ricava osservando che, per le ipotesi fatte, si ha, lungo una linea oraria, $dx = dy = dz = 0$ e che, essendo ρ la densità elettrica, $\rho dx dy dz = de$.

Perché δW sia identicamente nullo si trova intanto, siccome $\delta\varphi$ è arbitrario nell'interno del campo d'integrazione:

$$(8) \quad \Delta_a \varphi - \frac{d \log \sqrt{a}}{dz} \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\rho \sqrt{a}.$$

Dovrà oltre ciò aversi:

$$(9) \quad \iiint \rho \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \delta z \right) dx dy dz dt = 0,$$

per ogni sistema di valori di δx , δy , δz conforme ai vincoli supposti.

Nell'equazione (8) è contenuta la generalizzazione della legge di Poisson a cui la (8) si riduce se a è costante, cioè se manca il campo gravitazionale.

§ 3. - Se con G indichiamo l'accelerazione di gravità del campo considerato, cioè l'accelerazione con cui comincia a muoversi un punto materiale libero, si ha

$$G = -\frac{1}{2} \frac{da}{dz}.$$

Con ciò la (8) si scrive:

$$(11) \quad \Delta_2 \varphi + \frac{G}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\rho \sqrt{a}.$$

Per trovare la soluzione di (11), dato in ogni punto ρ , penseremo che le cariche elettriche siano contenute entro una piccola regione attorno all'origine delle coordinate. Porremo inoltre, nell'origine, $a = c^2$ ($c =$ velocità della luce nell'intorno dell'origine) e supporremo la gravità così poco intensa da potersi trascurare quei termini che contengono il quadrato del rapporto lG/c^2 dove l rappresenta la massima lunghezza che interviene nel problema che si sta considerando. Sotto tali ipotesi può porsi:

$$\sqrt{a} = c + \frac{1}{2c} \frac{da}{dz} z = c \left(1 - \frac{G}{c^2} z \right).$$

La (11) può scriversi perciò:

$$(12) \quad \Delta_2 \varphi + \frac{G}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -c \left(1 - \frac{G}{c^2} z \right) \rho.$$

L'integrale di questa equazione, come mostra senz'altro una verifica materiale è dato, con l'approssimazione indicata, da:

$$(13) \quad \begin{aligned} \varphi_P &= \frac{c}{4\pi} \int \left(1 - \frac{G}{c^2} z_M \right) \rho_M d\tau_M \left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2} \frac{z_P - z_M}{r} \right) \\ &= \frac{c}{4\pi} \int \rho_M d\tau_M \left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2} \frac{z_P + z_M}{r} \right) \end{aligned}$$

dove M è il punto generico del campo τ_M occupato da cariche elettriche, P il punto nel quale si calcola φ ed r la distanza MP .

Data la linearità dell'equazione (12) potrà naturalmente aggiungersi a (13) un qualsiasi integrale dell'equazione:

$$(12)^* \quad \Delta^2 \varphi + \frac{G}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

ottenuta ponendo in (12) $\rho = 0$. Tale integrale rappresenterà il campo dovuto a cause esterne alle ρ_M . Per le applicazioni che abbiamo in vista conviene considerare una particolare soluzione di (12)* data da

$$(14) \quad \varphi = -cE_x^* x - cE_y^* y + \frac{c^2}{G} E_z^* e^{-\frac{G}{c^2} z}$$

essendo E_x^* , E_y^* , E_z^* delle costanti.

Nell'origine essendo E la forza elettrica si ha

$$E_x = -\frac{1}{c} F_{0x} \quad E_y = -\frac{1}{c} F_{0y} \quad E_z = -\frac{1}{c} F_{0z}.$$

Risulta di qui che nell'origine la forza elettrica del campo esterno (14) ha per componenti:

$$E_x \quad E_y \quad E_z.$$

§ 4. - Calcoliamo ora il campo elettrico dovuto ad una carica e concentrata nell'origine delle coordinate. Da (13) si ha:

$$(15) \quad \varphi = \frac{ce}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2} \frac{z}{r} \right)$$

e questa formula dà come subito si riconosce ponendo $G = 0$ la generalizzazione della legge elementare di Coulomb. Ricordando le (3) si ottiene:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{0x} = \frac{ce}{4\pi} \left(\frac{x}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{zx}{r^3} \right) \\ F_{0y} = \frac{ce}{4\pi} \left(\frac{y}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{zy}{r^3} \right) \\ F_{0z} = \frac{ce}{4\pi} \left(\frac{z}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{z^2}{r^3} + \frac{G}{2c^2} \frac{1}{r} \right). \end{array} \right.$$

Possiamo riassumere le tre formule precedenti in un'unica vettoriale. Indicando infatti con \mathbf{F}_0 il vettore di componenti F_{0x} , F_{0y} , F_{0z} , con \mathbf{a} un vettore di grandezza 1 e di orientazione MP infine con \mathbf{G} un vettore di grandezza G e di orientazione z le (16) possono scriversi:

$$(17) \quad \mathbf{F}_0 = \frac{ce}{4\pi} \left\{ \frac{\mathbf{a}}{r^2} - \frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}}{2c^2 r} \mathbf{a} + \frac{1}{2c^2 r} \mathbf{G} \right\}.$$

È interessante confrontare questa formula con quella che dà la forza elettrica esercitata da una carica elettrica e che, in assenza di campo gravitazionale, abbia accelerazione Γ , moto quasi stazionario e velocità trascurabile di fronte a quella della luce. Tale forza, con le stesse notazioni, è espressa da:

$$(18) \quad \mathbf{E} = \frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{\mathbf{a}}{r^2} + \frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}}{c^2 r} \mathbf{a} - \frac{1}{c^2 r} \Gamma \right\}.$$

Di qui si vede che, ponendo in (18)

$$(19) \quad \Gamma = -\frac{\mathbf{G}}{2}$$

si ottiene

$$\mathbf{F}_0 = c\mathbf{E}.$$

In parole tale risultato può così enunciarsi, osservando che $c\mathbf{E}$ è la parte elettrica del campo elettromagnetico generato dalla carica in moto accelerato:

La parte elettrica (F_{0x} , F_{0y} , F_{0z}) del campo elettromagnetico (F_{ik}) generato da una carica elettrica ferma in un campo uniforme di intensità G è uguale alla parte elettrica del campo elettromagnetico che, in assenza di campo gravitazionale, produrrebbe la stessa carica se si muovesse, con le condizioni indicate, con accelerazione $G/2$ in senso opposto al campo di gravitazione.

§ 5. - Studiamo ora come viene alterata dal campo gravitazionale la distribuzione dell'elettricità sopra un conduttore. Osserviamo perciò che essendo nell'interno del conduttore δx , δy , δz arbitrarii dovrà essere per (9)

nell'interno $\varphi = \text{costante}$ e quindi (8) $\rho = 0$. L'elettricità è quindi tutta alla superficie. Supponiamo allora che il nostro conduttore sia una sfera col centro O nell'origine delle coordinate e raggio R.

Cerchiamo di soddisfare la condizione $\varphi = \text{costante}$ nell'interno assumendo per la densità elettrica superficiale in un punto generico M della superficie l'espressione:

$$(20) \quad \frac{e}{4\pi R^2} + \frac{e}{R} a \cos \theta$$

dove θ rappresenta l'angolo che il raggio vettore OM forma con l'asse z ed a una costante da determinarsi che supponiamo dell'ordine di grandezza di G/c^2 . Il potenziale in un punto P interno sarà dato (13) da:

$$\varphi_P = \frac{c}{4\pi} \int_{\sigma} \left(\frac{e}{4\pi R^2} + \frac{e}{R} a \cos \theta \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2} \frac{z_P + z_M}{r} \right) d\sigma$$

dove l'integrazione deve estendersi a tutta la superficie σ della sfera. Trascurando termini di ordine superiore a G/c^2 si ottiene:

$$(21) \quad \varphi_P = \frac{ce}{16\pi^2 R^2} \int \frac{d\sigma}{r} + \frac{cea}{4\pi R} \int \frac{\cos \theta d\sigma}{r} - \frac{ceGz_P}{32\pi^2 R^2 c^2} \int \frac{d\sigma}{r} - \frac{ceG}{32\pi^2 R^2 c^2} \int \frac{z_M d\sigma}{r}.$$

Essendo P interno si ha però:

$$\int \frac{d\sigma}{r} = 4\pi R \quad \int \frac{\cos \theta}{r} d\sigma = \frac{4}{3} \pi z_P \quad \int \frac{z_M}{r} d\sigma = \frac{4}{3} \pi R z_P.$$

Si trova dunque:

$$(22) \quad \varphi_P = \frac{ce}{4\pi R} + \frac{c}{3} \left(\frac{e}{R} a - \frac{eG}{2\pi R c^2} \right) z_P.$$

Se dunque vogliamo φ_P costante dovremo porre

$$a = \frac{1}{2\pi} \frac{G}{c^2}.$$

Sostituendo questo valore in (20) si trova per la densità superficiale l'espressione:

$$(23) \quad \frac{e}{4\pi R^2} \left(1 + \frac{2G}{c^2} R \cos \theta \right).$$

Il fatto di trovarsi in un campo di gravitazione produce dunque nella sfera una polarizzazione di momento

$$\frac{2}{3} \frac{G}{c^2} eR^2.$$

PARTE SECONDA

PESO DELLE MASSE ELETTROMAGNETICHE.

§ 6. - Supponiamo di avere un sistema di cariche sostenute da un sostegno rigido per modo che ai δx , δy , δz del § 2 bisogni attribuire la forma di componenti di uno spostamento rigido. Rimandando a dopo la considerazione degli spostamenti rotatorii consideriamo dapprima quelli traslatorii, vale a dire supponiamo δx , δy , δz siano arbitrarie funzioni del tempo ma non dipendano da x , y , z .

Cercheremo allora di soddisfare la (9) pensando che il potenziale φ_P in un punto generico P sia la somma del potenziale dato da (13) e di uno di tipo (14). Indicheremo questi due addendi con φ'_P e φ''_P e supporremo che il rapporto fra le derivate di φ''_P e φ'_P rispetto ad una direzione qualunque sia dell'ordine di grandezza $\mathcal{L}G/c^2$ di cui abbiamo convenuto di trascurare i quadrati. Con ciò la (9) si scrive:

$$\int dt \left\{ \delta x \int_{\tau_P} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \right) \rho_P d\tau_P + \delta y \int_{\tau_P} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi''}{\partial y} \right) \rho_P d\tau_P + \delta z \int_{\tau_P} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{\partial \varphi''}{\partial z} \right) \rho_P d\tau_P \right\} = 0.$$

Questa equazione, dato che δx , δy , δz sono funzioni arbitrarie del tempo, tra di loro indipendenti, dà luogo alle tre equivalenti:

$$(24) \quad \int_{\tau_P} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \right) \rho_P d\tau_P = \int_{\tau_P} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi''}{\partial y} \right) \rho_P d\tau_P = \int_{\tau_P} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{\partial \varphi''}{\partial z} \right) \rho_P d\tau_P = 0.$$

Ora dall'espressione (13) di φ' si ottiene subito, osservando che

$$\frac{\partial r}{\partial x_P} = \frac{x_P - x_r}{r} :$$

$$\int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \rho_P d\tau_P = - \frac{c}{4\pi} \int_{\tau_P} \int_{\tau_M} \rho_P \rho_M d\tau_P d\tau_M \left\{ \frac{x_P - x_M}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{(x_P - x_M)(z_P + z_M)}{r^3} \right\}$$

dove entrambi gli integrali vanno estesi al campo occupato da cariche. Scambiando nel secondo membro P con M, ciò che nulla altera, si ottiene:

$$\int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \rho_P d\tau_P = - \frac{c}{4\pi} \int_{\tau_M} \int_{\tau_P} \rho_M \rho_P d\tau_M d\tau_P \left\{ \frac{x_M - x_P}{r} - \frac{G}{2c^2} \frac{(x_M - z_P)(z_M + z_P)}{r^2} \right\}$$

onde infine, prendendo la semisomma:

$$(25) \quad \int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \rho_P d\tau_P = 0.$$

In modo in tutto analogo

$$(26) \quad \int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \rho_P d\tau_P = 0.$$

D'altra parte similmente:

$$\int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \rho_P d\tau_P = - \int_{\tau_P} \int_{\tau_M} \rho_P \rho_M d\tau_P d\tau_M \left\{ \frac{z_P - z_M}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{(z_P - z_M)(z_P + z_M)}{r^3} + \frac{G}{2c^2} \frac{1}{r} \right\}$$

scambiando M con P

$$\int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \rho_P d\tau_P = - \frac{c}{4\pi} \int_{\tau_P} \int_{\tau_M} \rho_M \rho_P d\tau_M d\tau_P \left\{ \frac{z_M - z_P}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{(z_M - z_P)(z_M + z_P)}{r^3} + \frac{G}{2c^2} \frac{1}{r} \right\}$$

e prendendo la semisomma:

$$(27) \quad \int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \rho_P d\tau_P = - \frac{c}{4\pi} \frac{G}{2c^2} \iint_{\tau_P, \tau_M} \frac{\rho_P \rho_M}{r} d\tau_P d\tau_M = - G \frac{\mu}{c^2} c$$

indicandosi con μ l'energia elettrostatica del sistema (a prescindere dai termini di correzione gravitazionali). Per le ipotesi fatte sulle derivate di φ'' possiamo senz'altro scrivere, con la nostra approssimazione:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\tau} \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \rho d\tau = -cE_x^* e; \\ \int_{\tau} \frac{\partial \varphi''}{\partial y} \rho d\tau = -cE_y^* e; \\ \int_{\tau} \frac{\partial \varphi''}{\partial z} \rho d\tau = -cE_z^* e; \end{array} \right.$$

dove con $e = \int_{\tau} \rho d\tau$ si è indicata la carica totale del sistema. Sostituendo in (24) le espressioni ora ottenute si trova:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} eE_x^* = 0 \\ eE_y^* = 0 \\ eE_z^* = -G \frac{\mu}{c^2}. \end{array} \right.$$

In queste formole è contenuto il nostro risultato. Esse ci dicono infatti che per mantenere in equilibrio il nostro sistema è necessario un campo esterno (E^*) il quale esercita sul sistema una forza data (in prima approssimazione) da eE^* che deve intendersi controbilanciare il peso del sistema, che vien dunque dato da $-eE^*$ ed ha perciò per componenti

$$(30) \quad 0, 0, G \frac{\mu}{c^2}.$$

Giungiamo con questo alla conclusione che il peso di una massa elettromagnetica ha sempre la direzione della verticale e grandezza eguale al peso di una massa materiale u/c^2 .

§ 7. - Nel paragrafo precedente abbiamo preso per $\delta x, \delta y, \delta z$ le componenti di uno spostamento traslatorio. Se invece si prendono le componenti di uno spostamento rotatorio virtuale con l'asse passante per l'origine delle coordinate, si pone cioè

$$(31) \quad \delta x = qz - ry \quad ; \quad \delta y = rx - pz \quad ; \quad \delta z = py - qx,$$

l'integrale (9), a prescindere dalla parte dovuta al campo esterno ϕ'' diventa:

$$(32) \quad \int d\tau \left\{ p \int_{\tau} \rho \left(y \frac{\partial \phi}{\partial z} - z \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\tau + q \int_{\tau} \rho \left(z \frac{\partial \phi}{\partial x} - x \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) d\tau \right. \\ \left. + r \int_{\tau} \rho \left(x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) d\tau \right\}.$$

Gli integrali tra parentesi si calcolano facilmente in base a (13) con artifici simili a quelli usati nel paragrafo precedente. Essi hanno i valori

$$(33) \quad -\frac{G}{8\pi c} \iint \frac{y_P}{r} \rho_P \rho_M d\tau_P d\tau_M \quad ; \quad +\frac{G}{8\pi c} \iint \frac{x_P}{r} \rho_P \rho_M d\tau_P d\tau_M \quad ; \quad 0.$$

E prendendo per origine il punto O' definito dal punto O e dal vettore

$$O' - O = \frac{1}{2u} \iint \frac{P - O}{r} \rho_P \rho_M d\tau_P d\tau_M,$$

si riconosce subito che i tre integrali si annullano *qualunque* sia l'orientazione del sistema attorno ad O' . Segue di qui che rispetto alla nuova origine è nullo identicamente l'integrale (9), cioè è nullo il momento del peso rispetto a O' qualunque sia l'orientazione del sistema: O' gode dunque delle proprietà di centro di gravità.

Pisa, marzo 1921.

N° 3.

The origin of this paper is probably related to that of N° 2, although neither of the two papers contains an explicit reference to the other. It can be supposed, in fact, that Fermi, after the study of the relations between gravitational and electromagnetic fields, made in N° 2 under rather restrictive conditions, felt the opportunity of a more systematic treatment of this and other similar problems, by means of a system of space-time coordinates particularly fitted to follow the behaviour in time of phenomena happening in a small spatial region. He was so conducted to this paper, which, except in the last part, is essentially the demonstration of a theorem of absolute differential calculus. This theorem is of considerable interest for the applications, and is therefore reproduced in the most important treatises of absolute differential calculus (see e.g.: T. Levi-Civita, *Calcolo Differenziale Assoluto*, Roma 1925, p. 190; also, in English translation: *Absolute Differential Calculus*, Glasgow 1927, p. 167). Later, it has been extended by L. P. Eisenhart to a certain class of non-riemannian spaces (see L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, New York 1927) and by P. Dienes to any linearly connected space (see « Rend. Acc. Linc. », 18, (6), p. 369 (1933)). A possible extension to Weyl's space is also suggested in Fermi's paper. For a detailed derivation and discussion see also: L. O. Raifertaigh, *Fermi Coordinates*, Proc. Roy. Irish Acad., 59 A, p. 15 (1958). Extensive use of "Fermi coordinates" is made in J. L. Synge, *Relativity, the General Theory* (Amsterdam, 1960).

E. PERSICO

3.

SOPRA I FENOMENI CHE AVVENGONO IN
VICINANZA DI UNA LINEA ORARIA

« Rend. Lincei », 31 (1), 21-23, 51-52, 101-103 (1922)(*).

NOTA I.

1. Per fare lo studio dei fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria, cioè, in linguaggio non relativistico, in una porzione di spazio, variabile eventualmente col tempo, ma sempre molto piccola in confronto alle divergenze dall'euclideanità, della varietà spazio-tempo, converrà anzi tutto ricercare un opportuno riferimento tale che, in vicinanza della linea studiata, il ds^2 della varietà prenda una forma semplice. Per trovare questo riferimento, dobbiamo premettere qualche considerazione geometrica.

Sia data in una varietà riemanniana V_n , od anche in una varietà metricamente connessa nel senso di Weyl^(*), una linea L. Associamo ad ogni punto P di L una direzione y , perpendicolare ad L, con la legge che la direzione $y + dy$, relativa al punto P + dP , si deduca da quella y relativa

(*) Presentate dal Corrispondente G. Armellini nella seduta del 22 gennaio 1922.

(1) WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, p. 109. Berlin, Springer, 1921.

a P, nel seguente modo: Sia η la direzione tangente ad L in P; si trasportino parallelamente ⁽²⁾ y, η da P in $P + dP$ e siano $y + \delta y, \eta + \delta \eta$ le direzioni così ottenute, che per le proprietà fondamentali del trasporto parallelo saranno ancora ortogonali. Se L non è geodetica $\eta + \delta \eta$ non coinciderà con la direzione $\eta + d\eta$ della tangente ad L in $P + dP$, e queste due direzioni individueranno in $P + dP$ una giacitura. Consideriamo in $P + dP$ l'elemento di S_{n-2} perpendicolare ad essa e ruotiamo rigidamente attorno a tale S_{n-2} tutta una particella circostante $P + dP$, fino a che $\eta + \delta \eta$ non vada a sovrapporsi ad $\eta + d\eta$. Allora $y + \delta y$ andrà a finire in una posizione che prenderemo come direzione $y + dy$ relativa al punto $P + dP$. Si intende bene come, fissata a piacere la direzione y in un punto di L, un processo di integrazione permetta di conoscerla per tutti i punti di L.

Cerchiamo ora le espressioni analitiche traducenti le operazioni indicate per una varietà riemanniana, che sono identiche a quelle valevoli per una varietà metrica di Weyl purché si abbia l'avvertenza di scegliere la « Eichung » in guisa che la misura di un segmento, che si muova rigidamente nelle vicinanze di L, sia costante. Sia

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

e siano $y_i, y^{(i)}; \eta_i, \eta^{(i)} = \frac{dx_i}{ds}$ i sistemi co- e controvarianti delle direzioni y, η . Avremo intanto

$$\frac{\delta \eta^{(i)}}{ds} = - \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} hl \\ i \end{matrix} \right\} \eta^{(h)} \frac{dx_l}{ds} = - \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} hl \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds},$$

è inoltre $\frac{d\eta^i}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{dx_i}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2}$. Si trova dunque

$$\frac{\delta \eta^{(i)} - d\eta^{(i)}}{ds} = - \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} hl \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} \right) = - C^i.$$

Le C^i sono le componenti controvarianti del vettore **C**, curvatura geodetica, cioè di un vettore che ha l'orientazione della normale principale geodetica di L e grandezza eguale alla sua curvatura geodetica.

Si ha d'altra parte

$$(2) \quad \frac{\delta y^{(i)}}{ds} = - \sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} hk \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds}.$$

Ora, siccome y è perpendicolare ad L, lo spostamento, con cui da $y + \delta y$ si deduce $y + dy$, sarà parallelo alla tangente ad L e avrà grandezza eguale alla proiezione sopra y stesso di $\delta \eta - d\eta$; vale a dire, siccome y ha lunghezza 1, al prodotto scalare di $\delta \eta - d\eta$ per y , cioè

$$\sum_i (\delta \eta_i - d\eta_i) y^{(i)} = - ds \sum_i C_i y^{(i)}.$$

Le sue componenti controvarianti si otterranno dunque moltiplicando la sua grandezza per le coordinate controvarianti della tangente ad L, cioè dx_i/ds . Esse son dunque, in ultima analisi, $-dx_i \sum_r C_r y^{(r)}$. Da (2) risulta ora immediatamente

$$(3) \quad \frac{dy^{(i)}}{ds} = - \sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h & k \\ & i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds} - \frac{dx_i}{ds} \sum_h C_h y^h.$$

La (3), scritta per $i = 1, 2, \dots, n$, dà un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine tra le n incognite $y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(n)}$ che risultano così determinate, una volta che ne siano assegnati i valori iniziali. Sarebbe anche facile verificare formalmente dalle (3) che, se i valori iniziali delle $y^{(i)}$ soddisfano la condizione di perpendicolarità ad L, tale condizione resta verificata lungo tutta la linea.

2. In un punto P_0 di L assegnamo ora a piacere n direzioni y_1, y_2, \dots, y_n mutuamente ortogonali, con la condizione che y_n sia tangente ad L. Le direzioni y_1, y_2, \dots, y_{n-1} saranno perpendicolari ad L e potremo trasportarle lungo L con la legge assegnata al paragrafo precedente che, come è evidente dalla sua stessa definizione, conserva la loro ortogonalità. In tale modo veniamo ad associare ad ogni punto di L n direzioni mutuamente ortogonali, di cui l'ultima è quella della tangente ad L. Pensiamo ora la nostra V_n immersa in un S_N euclideo a un numero conveniente di dimensioni. Possiamo prendere come coordinate di un punto di V_n le coordinate cartesiane ortogonali della sua proiezione sopra l' S_n tangente a V_n in un punto generico P di L, aventi per origine P e per direzioni le direzioni y_1, y_2, \dots, y_n relative al punto P. Con tali coordinate l'elemento metrico di V_n in P prende la forma $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2$; esse inoltre, come immediatamente si riconosce, sono geodetiche in P. Vale a dire, per le coordinate y si può nell'intorno di P porre, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, $g_{ii} = 1$; $g_{ik} = 0$ ($i \neq k$). È manifesto che di tali riferimenti ne avremo uno per ogni punto di L. Consideriamo ora un punto Q_0 di V_n che nel riferimento relativo al punto P_0 di L abbia coordinate $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1}, 0$. Per ogni altro punto P di L possiamo allora determinare un punto Q che, nel riferimento relativo a P, abbia le stesse coordinate che ha Q_0 nel riferimento relativo a P_0 . Il punto Q percorrerà così una linea di decorso parallelo ad L. Vogliamo ora trovare la relazione che lega ds_Q a ds_P nell'ipotesi che Q sia infinitamente prossimo a P. Perciò osserviamo che lo spostamento che porta Q in $Q + dQ$ è composto degli spostamenti indicati al § I con δ e con $d - \delta$ e che il primo, essendo uno spostamento parallelo, fornisce, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $\delta s_Q = ds_P$; il secondo è una rotazione che, come si è visto al § I, dà $(d - \delta) s_Q = ds_P \mathbf{C} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{P})$, se con \cdot si indica il simbolo del prodotto scalare e con $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$ il vettore di origine P e termine Q. Inoltre ds_Q e $(d - \delta) s_Q$ hanno entrambi la direzione della tangente in L. Si ha dunque $ds_Q = \delta s_Q + (d - \delta) s_Q$; cioè

$$(4) \quad ds_Q = ds_P [I + \mathbf{C} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{P})].$$

Le traiettorie dei punti Q formano una $(n-1)$ upla infinità di linee e quindi, almeno con opportune limitazioni, per ogni punto M di V_n passerà una di tali linee; così che potremo caratterizzare M mediante le coordinate del punto Q , $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1}$ corrispondenti alla linea passante per M , e l'arco s_p di linea L contato da un'origine arbitraria fino a quel punto P che corrisponde al Q coincidente con M .

Se M è infinitamente prossimo ad L , ds_Q sarà perpendicolare alla ipersuperficie $s_p = \text{costante}$. Si avrà perciò

$$ds_M^2 = ds_Q^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \dots + d\bar{y}_{n-1}^2;$$

e, tenendo presente (4),

$$(5) \quad ds_M^2 = [1 + \mathbf{C} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{P})]^2 ds_p^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \dots + d\bar{y}_{n-1}^2.$$

Nelle vicinanze di L abbiamo con ciò trovata una espressione semplicissima del ds^2 .

NOTA II.

3. Prima di passare all'applicazione fisica dei risultati ottenuti, vogliamo ancora fare qualche osservazione geometrica. È evidente intanto che le considerazioni precedenti, e quindi anche la formula (5) che ne è la conclusione, che per varietà qualunque sono valide solo vicino ad L , sono invece completamente rigorose per spazî euclidei. Associamo allora alla linea L della V_n una linea L^* di uno spazio euclideo S_n , in cui indichiamo con x_i^* le coordinate cartesiane ortogonali. Se con degli asterischi indichiamo i simboli riferentisi alla linea L^* , potremo scrivere per S_n la formula analoga a (5):

$$(5^*) \quad ds_{M^*}^2 = [1 + \mathbf{C}^* \cdot (\mathbf{M}^* - \mathbf{P}^*)] ds_{p^*}^2 + d\bar{y}_1^{*2} + d\bar{y}_2^{*2} + \dots + d\bar{y}_{n-1}^{*2};$$

come nella (5) \mathbf{C} è funzione di s_p , così nella (5)* \mathbf{C}^* è funzione di s_{p^*} .

Siano $K^{(r)}$ $K^{(a)}$, \dots , $K^{(n-1)}$ le componenti controvarianti di \mathbf{C} relative a $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1}$ e $K^{(r)*}$, $K^{(a)*}$, \dots , $K^{(n-1)*}$ quelle di \mathbf{C}^* relative alle \bar{y}^* . Cerchiamo se si possa determinare L^* in modo che le funzioni $K^{(r)*}(s_{p^*})$ diventino eguali alle $K^{(r)}(s_p)$. Cominceremo perciò a porre $s_p = s_{p^*}$, cioè a stabilire tra i punti di L e quelli di L^* una corrispondenza biunivoca che conserva gli archi. Osserviamo poi che $K^{(r)*}$ è la proiezione di \mathbf{C}^* sulla r -esima direzione y^* . È cioè

$$(6) \quad K^{(r)*} = \sum_{i=1}^{i=n} y_{i/r}^* \frac{d^2 x_i^*}{ds_{p^*}^2} \quad (r = 1, 2, \dots, n-1).$$

Le $K^{(r)}$ sono poi funzioni note di s_p . La condizione $K^{(r)} = K^{(r)*}$ conduce dunque alle $(n-1)$ equazioni

$$(7) \quad K^{(r)}(s_p) = \sum_{i=1}^{i=n} y_{i/r}^* \frac{d^2 x_i^*}{ds_{p^*}^2} \quad (r = 1, 2, \dots, n-1).$$

D'altra parte le (3), scritte per l' S_n , ci danno $n(n-1)$ altre equazioni. Se a queste aggiungiamo l'altra

$$(8) \quad ds_p^2 = dx_1^{*2} + dx_2^{*2} + \dots + dx_n^{*2},$$

troviamo un sistema di $n-1 + n(n-1) + 1 = n^2$ equazioni tra le n^2 incognite $x_i^*, y_{i/r}^*$ che servono ad esprimerle in funzione di s_p . Possiamo così determinare le equazioni parametriche $x_i^* = x_i^*(s_p)$ della L^* . Con ciò la formula (5*) diventa identica alla (5), ossia abbiamo rappresentato per applicabilità i dintorni della linea L^* , sui dintorni di L . Siccome poi L^* è in uno spazio euclideo, possiamo dire anche di aver disteso i dintorni di L in uno spazio euclideo, ossia di aver trovato coordinate che sono geodetiche contemporaneamente in tutti i punti di L .

NOTA III.

§ 4. Per mostrare l'applicazione dei risultati precedenti alla teoria della relatività, supporremo che V_n sia la V_4 spazio-tempo e che L sia una linea oraria, in vicinanza della quale ci proponiamo di studiare i fenomeni. Ponendo per brevità in (5) $ds_M = ds$, si trova in questo caso:

$$ds^2 = [1 + \mathbf{C} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{P})]^2 ds_p^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + d\bar{y}_3^2.$$

Per evitare la comparsa di immaginari e ristabilire l'omogeneità, conviene fare la seguente sostituzione di variabili:

$$s_p = vt \quad ; \quad \bar{y}_1 = ix \quad ; \quad \bar{y}_2 = iy \quad ; \quad \bar{y}_3 = iz,$$

essendo v una costante con le dimensioni di una velocità, per modo che t abbia le dimensioni di un tempo. Si ottiene, così,

$$(9) \quad ds^2 = a dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

dove

$$(10) \quad a = v^2 [1 + \mathbf{C} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{P})]^2.$$

Da ora in avanti, con gli ordinari simboli del calcolo vettoriale intenderemo riferirci allo spazio x, y, z . Ed è in questo senso che si può intendere il prodotto scalare che figura in (10), purché per \mathbf{C} si intenda il vettore avente per componenti le componenti covarianti della curvatura geodetica della linea $x = y = z = 0$ e con $\mathbf{M} - \mathbf{P}$ il vettore di componenti x, y, z . Chiameremo x, y, z coordinate di spazio e t tempo. Per uniformità scriveremo talvolta x_0, x_1, x_2, x_3 al posto di t, x, y, z e chiameremo anche g_{ik} i coefficienti della forma quadratica (9).

§ 5. Sia ⁽³⁾ F_{ik} il campo elettromagnetico e $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ il tensore di primo ordine « potenziale » di F_{ik} , in modo che sia $F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki}$.

(3) Per le notazioni e per la deduzione Hamiltoniana delle leggi della fisica, vedi WEYL., op. cit., pp. 186 e 208.

Poniamo $\varphi_0 = \varphi$ e chiamiamo \mathbf{u} il vettore di componenti $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Si avrà intanto:

$$\left. \begin{array}{l} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{array} \right\} = \text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad ; \quad \left. \begin{array}{l} F_{23} \\ F_{31} \\ F_{12} \end{array} \right\} = -\text{rot } \mathbf{u}, \quad F_{ii} = 0, \quad F_{ik} = -F_{ki},$$

parimenti

$$\left. \begin{array}{l} F^{01} \\ F^{02} \\ F^{03} \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \left(-\text{grad } \varphi + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \quad , \quad \left. \begin{array}{l} F^{(23)} \\ F^{(31)} \\ F^{(12)} \end{array} \right\} = -\text{rot } \mathbf{u}, \quad F^{(ii)} = 0, \quad F^{(ik)} = -F^{(ki)}$$

e quindi

$$\frac{1}{4} \sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)} = \frac{1}{2} \left\{ \text{rot}^2 \mathbf{u} - \frac{1}{a} \left(\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 \right\}.$$

Sia $d\omega$ l'elemento di ipervolume di V_4 . Avremo

$$d\omega = \sqrt{-\|g_{ik}\|} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{a} dt d\tau$$

dove $d\tau = dx dy dz$ è l'elemento di volume dello spazio.

Si ha anche:

$$\sum \varphi_i dx_i = \varphi dt + \mathbf{u} \cdot d\mathbf{M} \quad d\mathbf{M} = (dx, dy, dz).$$

Prescindendo dall'azione del campo metrico, la cui variazione è nulla perché lo riguardiamo come dato *a priori* dalla (9), l'azione prenderà la seguente forma:

$$W = \frac{1}{4} \int_{\omega} \sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)} d\omega + \int_e de \int_i \sum_i \varphi_i dx_i + \int_m dm \int ds$$

$$\left(\begin{array}{l} de = \text{elemento di carica elettrica} \\ dm = \text{elemento di massa} \end{array} \right).$$

Introducendo le notazioni indicate, si trova

$$(II) \quad W = \frac{1}{2} \iiint \left\{ \text{rot}^2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \left(\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 \right\} \sqrt{a} dt d\tau$$

$$+ \iint (\varphi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{V}_L) \rho d\tau dt + \iint \sqrt{a - \mathbf{V}_M^2} k d\tau dt,$$

dove ρ, k sono rispettivamente le densità di elettricità e di materia, per modo che $de = \rho d\tau, dm = k d\tau, \mathbf{V}_L$ è la velocità delle cariche elettriche, \mathbf{V}_M quella delle masse.

Gli integrali del secondo membro possono estendersi ad un campo arbitrario τ tra due tempi qualunque t_1, t_2 . Si ha poi il vincolo che sul contorno del campo τ , e per i due tempi t_1, t_2 , siano nulle tutte le variazioni.

All'infuori di queste condizioni, le variazioni di φ e di \mathbf{u} sono completamente arbitrarie. Per contro, alle variazioni di x, y, z , considerate come coordinate di un elemento di carica o di massa, possono essere imposte ulte-

riori condizioni, traducendo i vincoli del particolare problema che si sta studiando. Scrivendo intanto che è nullo dW per una variazione qualunque $\delta\varphi$ di φ , si trova

$$0 = - \iiint \left(\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot \delta \text{grad } \varphi \frac{dt d\tau}{\sqrt{a}} + \iiint \delta\varphi \rho dt d\tau.$$

Trasformando il primo integrale con opportuna applicazione del teorema di Gauss, e tenendo presente che $\delta\varphi$ si annulla sul contorno, troviamo

$$0 = \iiint \delta\varphi \left\{ \rho + \text{div} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right] \right\} dt d\tau$$

e, siccome $\delta\varphi$ è arbitrario, abbiamo intanto l'equazione

$$(12) \quad \rho + \text{div} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right] \right\} = 0.$$

In modo analogo, facendo variare \mathbf{u} , si trova

$$(13) \quad \rho V_L + \text{rot} (\sqrt{a} \text{rot } \mathbf{u}) - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right] = 0.$$

Queste due ultime equazioni permettono di determinare il campo elettromagnetico, una volta assegnate le cariche ed il loro movimento.

Un altro gruppo di equazioni si può ottenere facendo variare in W le traiettorie delle cariche e delle masse. Siano δP_M la variazione della traiettoria delle masse, δP_L quella delle cariche. Indichiamo inoltre, essendo \mathbf{u} un vettore funzione di punto e \mathbf{V} un vettore, con $(\partial \mathbf{u} / \partial P)(\mathbf{V})$ il vettore di componenti $\frac{\partial u_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} V_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} V_z$ ed analoghe. Scrivendo che è nulla la variazione di W , si trova allora, coi soliti artifici:

$$(14) \quad \iiint \left(\delta P_L \cdot \text{grad } \varphi - \delta P_L + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} (\mathbf{V}_L) \right) + \mathbf{V}_L \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} (\delta P_L) \right) \rho dt d\tau \\ + \iiint \delta P_M \cdot \left\{ \frac{dt}{ds} \frac{\text{grad } a}{2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \mathbf{V}_M \right) \right\} k dt d\tau = 0.$$

Se i δP ad un tempo non dipendono dai loro valori per altri tempi, dovrà essere nullo in (14) il coefficiente di dt . Si trova così:

$$(15) \quad \int \left\{ \delta P_L \cdot \text{grad } \varphi - \delta P_L \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} (\mathbf{V}_L) \right] + \mathbf{V}_L \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} (\delta P_L) \right\} \rho d\tau \\ + \int \delta P_M \cdot \left\{ \frac{1}{2} \frac{dt}{ds} \text{grad } a + \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \mathbf{V}_M \right) \right\} k d\tau$$

che deve essere verificata per tutti i sistemi di δP soddisfacenti ai vincoli.

N° 4 a, 4 b, 4 c, 10.

The results of papers N° 1 and 2 puzzled Fermi, because they contradict each other, if it is assumed, as required by general relativity, that the gravitational and inertial mass are the same. Moreover, the value $(4/3) (U/c^2)$, obtained by Lorentz as well as by Fermi for the inert mass of a rigid, spherically symmetrical system of electric charges, was at variance with Einstein's principle of equivalence of mass and energy. It is now well known that the factor $4/3$ can be interpreted as due to the part of the energetic tensor contributed by the internal non-electromagnetic stresses, whose existence must be assumed to assure the equilibrium of the charges. However, in the books known to Fermi, this discrepancy was not explained (he had evidently overlooked the explanation contained in M. von Laue, *Die Relativitätstheorie*, I, 3rd ed., 1919, p. 218), and so he found for it an explanation of his own, essentially equivalent to the former but obtained through Weyl's variational method.

Prof. Polvani remembers that the question was debated, one winter evening of 1922, in Pisa, while Fermi, Puccianti, Polvani and other friends walked through via San Frediano from the University to the Scuola Normale Superiore. Here the company parted without having reached any satisfactory conclusion. In the following two days, Fermi did not appear in the Institute of Physics. The third day he arrived with a paper, ready for publication, entitled «Correzione di una grave discrepanza...». Puccianti, who had emphasized the need for a clarification, was enthusiastically happy.

This result, of which Fermi was particularly proud, was published by him, with minor alterations, in three different journals (N° 4 a, 4 b, 4 c). Subsequently, in collaboration with A. Pontremoli (a young physicist, then an assistant at the University of Rome, who later was to disappear tragically in the Nobile polar expedition of 1928) Fermi applied the same method to the calculation of the mass of the radiation contained in a cavity with reflecting walls, for which Abraham and others had found an expression containing the same factor $4/3$ (see paper N° 10).

E. PERSICO.

4 c.

CORREZIONE DI UNA CONTRADDIZIONE TRA LA TEORIA ELETTRODINAMICA E QUELLA RELATIVISTICA DELLE MASSE ELETTROMAGNETICHE (*)

« Nuovo Cimento », 25, 159-170 (1923).

§ 1. - La teoria delle masse elettromagnetiche fu studiata per la prima volta da M. Abraham⁽¹⁾ prima della scoperta della teoria della relatività. Abraham perciò, come era naturale, considerò nei suoi calcoli la massa di

(*) Sullo stesso argomento vedi due mie Note sui « Rend. Acc. Lincei » (5), 31, pp. 184, 306 (1922).

(1) ABRAHAM, *Theorie der Electricität*; RICHARDSON, *Electron Theory of Matter*. Cap. XI; LORENTZ, *The Theory of Electrons*, p. 37.

un sistema di cariche elettriche rigido nel senso della meccanica classica, e trovò che, nell'ipotesi che tale sistema avesse simmetria sferica, la sua massa era variabile con la velocità e precisamente eguale a $(2) \frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$ (essendo u l'energia elettrostatica del sistema e c la velocità della luce) per velocità nulle o molto piccole, mentre per velocità v confrontabili con c intervenivano dei termini di correzione un po' complicati, dell'ordine di grandezza di v^2/c^2 . Prima ancora della teoria della relatività, Fitz Gerald introdusse l'ipotesi che i corpi solidi subissero nella direzione del loro moto una contrazione nel rapporto

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} : 1$$

e Lorentz rifece la teoria delle masse elettromagnetiche di Abraham, considerando invece che sistemi di cariche elettriche rigidi nel senso della meccanica classica, dei sistemi che subissero questa contrazione. Il risultato fu che la massa di quiete, ossia il limite della massa per velocità nulle, era sempre $\frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$, mentre venivano alterati i termini correttivi dipendenti da $v^2 : c^2$. Le esperienze di Kaufmann, Bucherer e altri sulla massa delle particelle β dei corpi radioattivi, e delle particelle catodiche di grande velocità, si decisero nettamente a favore della teoria di Lorentz, così detta dell'elettrone contrattile, contro quella di Abraham, dell'elettrone rigido. E ciò fu in un primo tempo interpretato come prova della natura esclusivamente elettromagnetica della massa degli elettroni, perché si pensava che altrimenti la loro massa avrebbe dovuto essere costante. Scoperta in seguito la teoria della relatività, questa portò alla conseguenza che tutte le masse, fossero esse o no elettromagnetiche, dovevano variare con la velocità come quella dell'elettrone contrattile di Lorentz; per modo che le esperienze indicate vennero a lasciare indecisa la natura totalmente elettromagnetica o no della massa elettronica, venendo a costituire esclusivamente una conferma della teoria della relatività. D'altra parte la stessa teoria della relatività in senso stretto, e più ancora in seguito quella generale, condussero ad attribuire ad un sistema dotato dell'energia u la massa $u : c^2$, per modo che venne a sorgere una grave discrepanza tra la teoria elettrodinamica di Lorentz, che attribuisce ad una distribuzione sferica di elettricità la massa di quiete $\frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$, e la teoria della relatività che le attribuisce invece la massa u/c^2 . Ed una tale differenza (3) si presenta particolarmente grave, data la grande importanza della nozione di massa elettromagnetica come base della teoria elettronica della materia.

(2) Si dice ordinariamente che la massa elettromagnetica di uno strato elettrico sferico omogeneo di carica e , e di raggio r è $\frac{2}{3} \frac{e^2}{rc^2}$; se però si osserva che l'energia elettrostatica è $u = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r}$, si trova appunto la massa $= \frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$.

(3) Le esperienze di Kaufmann ecc. non possono naturalmente servire in questo caso a decidere quale dei due risultati è il giusto, perché esse permettono soltanto di misurare i termini correttivi che dipendono dalla velocità e che sono eguali secondo entrambi le teorie, mentre la differenza è invece tra le masse di quiete.

Tale discrepanza mi si presentò in particolar modo stridente in due recenti Note ⁽⁴⁾ in una delle quali, sulla base delle ordinarie teorie elettrodinamiche considerai le masse elettromagnetiche di sistemi a simmetria qualunque, trovando che in generale sono rappresentate da tensori invece che da scalari, che si riducono naturalmente a $\frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$ nel caso della simmetria sferica; nell'altra invece, partendo dalla teoria generale della relatività, considerai il peso dei medesimi sistemi, che trovai in ogni caso eguale a $\frac{u}{c^2} G$, essendo G l'accelerazione di gravità.

Nel presente lavoro dimostreremo precisamente: che la differenza tra i due valori della massa ottenuti nei due modi ha origine in un concetto di corpo rigido in contraddizione col principio di relatività che si applica nella teoria elettrodinamica (anche in quella dell'elettrone contrattile) e che conduce alla massa $\frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$, mentre la nozione di corpo rigido più giustificata e conforme alla teoria della relatività conduce invece al valore u/c^2 .

Notiamo ancora che la dinamica relativistica dell'elettrone fu svolta da M. Born ⁽⁵⁾ che però, partendo da un punto di vista non essenzialmente diverso dall'ordinario trovò naturalmente come massa di quiete $\frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$.

Nelle nostre considerazioni prenderemo a base il principio di Hamilton come quello più adatto allo studio di un problema soggetto a vincoli alquanto complicati; invero il nostro sistema di cariche elettriche deve soddisfare ad un vincolo di natura diversa da quelli considerati nella meccanica ordinaria, dovendo esso, dipendentemente dalla propria velocità, presentare la contrazione di Lorentz, in conseguenza del principio di relatività. Notiamo però fin d'ora, ad evitar malintesi, che mentre la contrazione di Lorentz è dell'ordine di v^2/c^2 , la sua influenza sopra la massa elettromagnetica verte sui termini principali di questa, cioè sulla massa di quiete ed ha perciò un'importanza assai maggiore, essendo apprezzabile anche per velocità piccolissime.

§ 2. - Consideriamo dunque un sistema di cariche elettriche, sostenute da un dielettrico rigido che, sotto l'azione di un campo elettromagnetico in parte dovuto al sistema stesso e in parte a cause esterne si muova di moto traslatorio descrivendo un tubo orario nello spazio tempo ⁽⁶⁾.

Vediamo con precisione che cosa debba intendersi per moto traslatorio rigido. Consideriamo perciò un qualunque sistema di riferimento di Lorentz-Einstein e supponiamo che per esso a un certo istante un punto del sistema di cariche abbia velocità nulla; diremo che il moto è traslatorio se con tali ipotesi nello stesso riferimento, per quell'istante, tutti i punti del sistema hanno velocità nulla. Ciò equivale a dire che le linee orarie dei punti del nostro sistema sono traiettorie ortogonali di una famiglia di spazi lineari;

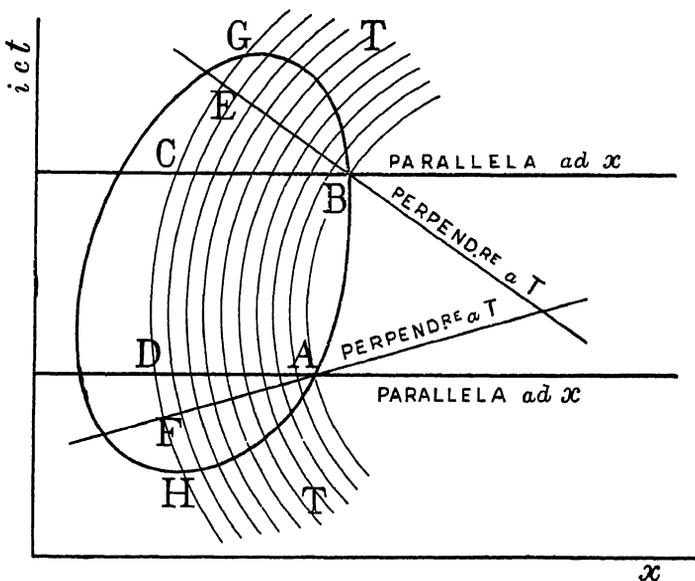
(4) E. FERMI, «N. Cim.», VI, 22, pp. 176, 192 (1921).

(5) MAX BORN, «Ann. d. Phys.», 30, p. 1 (1909).

(6) In tutto il seguito si riguarda lo spazio tempo come euclideo, perché si intende che i campi elettromagnetici che in esso si considerano siano abbastanza poco intensi per non alterarne sensibilmente la struttura metrica.

ed infatti in un riferimento di Lorentz-Einstein in cui lo spazio sia uno degli spazii della famiglia e l'asse di tempo sia naturalmente perpendicolare ad esso tutto il sistema è in quiete al tempo zero, perché lo spazio taglia ortogonalmente le linee orarie di tutti i punti del sistema. Con questa definizione di moto traslatorio, che in sostanza è quella adottata da M. Born, la rigidità del sistema viene espressa dal fatto che la sua figura in questi spazi perpendicolari al tubo resta invariabile, ossia che tutte le sezioni rette del tubo sono tra di loro eguali.

Per poter applicare al caso nostro il principio di Hamilton ci occorre avere una variazione del movimento del nostro sistema conforme ai vincoli del problema, ossia alla rigidità, giustamente interpretata. Ora noi mostriamo che si giunge al valore $\frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$ oppure a quello u/c^2 per la massa



elettromagnetica, secondo che per tale variazione si prende una o l'altra delle due che andiamo ad illustrare e che distinguiamo con le lettere A e B. La variazione A però, come immediatamente si vedrà, è da scartarsi perché in contraddizione col principio di relatività. Sia T il tubo orario descritto dal sistema. Nella figura lo spazio (x, y, z) è rappresentato su una sola dimensione dall'asse x , ed al tempo t è sostituito ict per aver una metrica definita.

Variazione A: si considera come variazione soddisfacente il vincolo della rigidità uno spostamento infinitesimo, rigido nell'ordinario senso cinematico, parallelo allo spazio (x, y, z) , di ogni sezione del tubo parallela allo spazio medesimo. Nella figura otterremo dunque tale variazione spostando parallelamente all'asse x ogni sezione $t = \text{cost}$ del tubo di un segmento infinitesimo arbitrario. Se ci limitiamo a considerare spostamenti traslatorii avremo dunque $\delta x, \delta y, \delta z$ funzioni arbitrarie del solo tempo, e $\delta t = 0$.

Variazione B: si considera come variazione soddisfacente al vincolo della rigidità uno spostamento infinitesimo perpendicolare al tubo di ogni

sezione normale del tubo medesimo, rigido nell'ordinario senso cinematico. Nella figura otterremo tale variazione spostando parallelamente a sè, di un segmento arbitrario, ogni sezione normale del tubo.

Di tali due variazioni *quella A è in manifesta contraddizione col principio di relatività* e da scartarsi perchè, non essendo neppure invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, essa è determinata invero dal particolare riferimento (t, x, y, z) che abbiamo scelto, non può esser l'espressione di nessuna nozione fisica, come quella della rigidità. La variazione B invece, oltre a soddisfare evidentemente la detta condizione di invarianza, poichè è costituita solo con elementi inerenti al tubo T e del tutto indipendenti dalla posizione degli assi di riferimento, è l'unica che si presenti spontanea, come quella che prende a base uno spostamento virtuale rigido nel sistema di riferimento rispetto al quale, all'istante che si considera, il sistema di cariche ha velocità nulla. Ora con un'osservazione superficiale potrebbe far tuttavia l'impressione che la differenza tra le conseguenze dei due sistemi di variazione A e B dovesse farsi sentire soltanto per velocità considerevoli, quando cioè il tubo T ha una notevole inclinazione sull'asse del tempo. Invece i calcoli che andiamo a sviluppare dimostreranno subito che la differenza si sente già per velocità nulle, e che appunto A dà come massa elettromagnetica $\frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$ mentre B dà invece $\frac{u}{c^2}$.

§ 3. - Indichiamo, secondo la comodità, con (t, x, y, z) oppure con (x_0, x_1, x_2, x_3) le coordinate di tempo e di spazio e sia φ_i il quadripotenziale ed

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

il campo elettromagnetico, **E** ed **H** le forze elettrica e magnetica, che si deducono da esso.

Il principio di Hamilton che riassume le leggi di Maxwell Lorentz e quelle della meccanica ci dice che (7): l'azione complessiva, ossia la somma delle azioni del campo elettromagnetico e delle masse materiali ed elettriche, subisce variazione nulla per effetto di una variazione arbitraria delle φ_i e delle coordinate dei punti delle linee orarie delle cariche elettriche conforme ai vincoli e che si annulli sul contorno della regione di integrazione. Nel caso nostro non ci sono masse materiali, e gli unici elementi che si facciano variare sono le coordinate dei punti delle linee orarie delle cariche; basta perciò considerare solo l'azione delle cariche elettriche, cioè:

$$W = \sum_i \int de \int \varphi_i dx_i$$

dove de è l'elemento generico di carica elettrica ed il secondo integrale deve essere esteso a quell'arco di linea oraria descritta da de che è contenuto nel campo quadridimensionale G di integrazione. Per ogni sistema di variazioni δx_i conforme ai vincoli e *che si annulla sul contorno di G* deve dunque aversi

(7) WEYL., « Raum, Zeit, Materie », pp. 194-196; Berlin, Springer (1921).

$\delta W = 0$, cioè:

$$(1) \quad \sum_{ik} \int \int de F_{ik} \delta x_i dx_k = 0.$$

Bisogna ora esaminare separatamente i risultati che si ottengono mettendo al posto dei δx_i i valori dati dal sistema di variazioni A o da quello B.

§ 4. - *Conseguenze del sistema di variazioni A.* — In questo caso il campo di integrazione si riduce semplicemente ad ABCD. Ed invero i campi BCG, ADH danno contributo nullo, poiché in essi tutti i δx_i si annullano dovendo esser nulli sul contorno di G, e quindi nei tratti BG, AH ed aver valore costante per t costante, ossia sulle parallele all'asse x . Se con t_1 e t_2 indichiamo i tempi di A e di B la (1) può scriversi, essendo $\delta t = 0$ ed i δx , δy , δz funzioni del solo tempo:

$$\sum_{ik} \int_{t_1}^{t_2} dt \delta x_i \int de F_{ik} \frac{dx_k}{dt} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Siccome poi δx_i sono funzioni arbitrarie di t , ne ricaviamo le tre equazioni

$$\int de \sum_k F_{ik} \frac{dx_k}{dt} = 0$$

ossia:

$$\int de \left[E_x + \frac{dy}{dt} H_z - \frac{dz}{dt} H_y \right] = 0 \quad \text{e le due analoghe.}$$

Se all'istante che si considera il nostro sistema ha velocità nulla nel riferimento (t, x, y, z) le tre equazioni si riassumono nell'unica vettoriale:

$$(2) \quad \int \mathbf{E} de = 0.$$

A questa equazione saremmo giunti senza calcoli se, come si fa nelle trattazioni ordinarie e come in sostanza fa M. Born nel lavoro citato, avessimo supposto a priori nulla la forza totale agente sul sistema. Abbiamo appunto voluto dedurla col principio di Hamilton per mostrare il vizio della sua origine, poiché essa segue dal sistema di variazioni A che è in contraddizione col principio di relatività. Dalla (2) segue subito il valore $\frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$ come massa elettromagnetica. Supponiamo infatti che \mathbf{E} sia la somma di una parte $\mathbf{E}^{(i)}$ dovuta al sistema stesso, più un campo $\mathbf{E}^{(e)}$ uniforme dovuto a cause esterne. La (2) ci dà:

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de + \mathbf{E}^{(e)} \int de = 0.$$

Ora $\int de = e =$ carica; e quindi $\mathbf{E}^{(e)} \int de = \mathbf{F} =$ forza esterna. D'altra parte nel caso della simmetria sferica, sia il calcolo diretto, sia la ben nota

considerazione del momento elettromagnetico ⁽⁸⁾ mostrano che:

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de = -\frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \Gamma,$$

essendo Γ l'accelerazione.

L'equazione precedente diventa dunque:

$$\mathbf{F} = \frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \Gamma$$

che confrontata con la legge fondamentale della dinamica del punto, $\mathbf{F} = m\Gamma$, ci dà:

$$m = \frac{4}{3} \frac{u}{c^2}.$$

§ 5. - *Conseguenze del sistema di variazioni B.* — In questo caso le stesse considerazioni del § precedente dimostrano che il campo di integrazione si riduce ad ABEF, ossia alla regione compresa tra due sezioni normali del tubo T. Decomponiamola per mezzo di infinite sezioni normali in infiniti strati di spessore infinitesimo, e per calcolare il contributo di uno di questi all'integrale (1) riferiamoci al suo riferimento di quiete, prendendo lo spazio (x, y, z) parallelo allo strato. Per esso sarà allora $\delta t = 0$, mentre $\delta x, \delta y, \delta z$ saranno costanti qualunque. Sarà inoltre $dx = dy = dz = 0$, perché la velocità di tutti i punti è nulla, $dt =$ altezza dello strato, che varierà da punto a punto, perché lo strato ha per basi due sezioni normali in generale non parallele. Se O è un punto generico ma fissato dello strato, per esempio l'origine delle coordinate, in cui dt ha il valore dt_0 , \mathbf{K} il vettore con l'orientazione della normale principale alla linea oraria passante per O e grandezza eguale alla sua curvatura, si ha manifestamente, essendo dt lo spessore nel punto generico P dello stato:

$$dt = dt_0 [1 - \mathbf{K} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})].$$

Siccome la velocità è nulla si ha semplicemente

$$\mathbf{K} = -\Gamma : c^2,$$

e quindi:

$$dt = dt_0 \left(1 + \frac{\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} \right).$$

Sostituendo questi valori si trova che il contributo del nostro strato all'integrale (1) è:

$$\begin{aligned} -dt_0 \left\{ \delta x \int \left(1 + \frac{\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} \right) E_x de + \delta y \int \left(1 + \frac{\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} \right) E_y de \right. \\ \left. + \delta z \int \left(1 + \frac{\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} \right) E_z de \right\}. \end{aligned}$$

Questa espressione deve annullarsi per tutti i valori di $\delta x, \delta y, \delta z$, otteniamo dunque da essa tre equazioni che si riassumono nell'unica vettoriale:

$$(3) \quad \int \left(1 + \frac{\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} \right) \mathbf{E} de = 0.$$

(8) RICHARDSON loc. cit.

Una corretta applicazione del principio di Hamilton ci ha dunque condotto alla (3) invece che alla (2). È ora facilissimo esaminare le conseguenze. Ponendo infatti:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(e)}$$

si trova:

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de + \int \mathbf{E}^{(i)} \frac{\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} de + e \mathbf{E}^{(e)} + \mathbf{E}^{(e)} \int \frac{\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} de = 0.$$

Nel caso della simmetria sferica si ha come sopra

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de = -\frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \Gamma;$$

sostituendo nella precedente si trova che $\mathbf{E}^{(e)}$ è confrontato solo con termini che contengono Γ . Se trascuriamo dunque i termini ⁽⁹⁾ in Γ^2 , possiamo trascurare l'ultimo integrale, ed otteniamo:

$$(4) \quad -\frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \Gamma + \int \mathbf{E}^{(i)} \frac{\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} de + \mathbf{F} = 0.$$

Per calcolare l'integrale che ancora figura in (4) osserviamo che $\mathbf{E}^{(i)}$ è la somma della forza di Coulomb

$$= \int \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}'}{r^3} de'$$

(\mathbf{P}' è il punto potenziante di carica de' ed $r = \overline{\mathbf{P}\mathbf{P}'}$), e di un termine contenente Γ che può trascurarsi perché darebbe un contributo contenente Γ^2 . Il nostro integrale diventa dunque:

$$\iint \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}'}{r^3} \frac{\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} de de';$$

oppure scambiando \mathbf{P} con \mathbf{P}' , ciò che nulla altera, e prendendo la semisomma dei due valori così ottenuti:

$$\frac{1}{2} \iint \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}'}{r^3} [\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}')] de de'.$$

Osserviamo che, nella nostra approssimazione Γ è costante per tutti i punti e può quindi portarsi fuori dagli integrali. Perciò la componente x dell'integrale precedente è:

$$\frac{1}{2c^2} \left\{ \Gamma_x \iint \frac{(x-x')^2}{r^3} de de' + \Gamma_y \iint \frac{(y-y')(x-x')}{r^3} de de' \right. \\ \left. + \Gamma_z \iint \frac{(z-z')(x-x')}{r^3} de de' \right\}.$$

Ora, siccome il sistema ha simmetria sferica, ad ogni segmento $\mathbf{P}\mathbf{P}'$ ne corrispondono infiniti altri distinti solo per l'orientazione. Nei tre integrali potremo

(9) Propriamente il numero di cui si trascurano i quadrati è $\Gamma l/c^2$ essendo l la massima lunghezza che interviene nel problema. È evidente che tale approssimazione è nei casi comuni più che giustificata.

perciò sostituire

$$(x - x')^2, (x - x')(y - y'), (x - x')(z - z')$$

coi loro valori medii per tutte le possibili orientazioni di PP' , che sono:

$$\frac{1}{3}r^2, 0, 0.$$

Con ciò la componente x diventa:

$$\frac{\Gamma_x}{3c^2} \frac{1}{2} \iint \frac{de de'}{r}.$$

Osserviamo ora che l'espressione

$$\frac{1}{2} \iint \frac{de de'}{r}$$

non è altro che l'energia elettrostatica u ; tornando allora alla scrittura vettoriale troviamo per l'integrale che figura in (4) l'espressione: $\frac{u}{3c^2} \Gamma$. La

(4) diventa così:

$$(5) \quad \frac{u}{c^2} \Gamma = \mathbf{F}$$

che esprime appunto che la massa elettromagnetica è u/c^2 .

N° 5.

This little article is remarkable in two respects. The date shows that already by 1923 Fermi was known well enough, at least in some circles, that his opinion was requested for an appendix to a translation of a book on relativity. I do not know how and why the publisher and the translator had the insight to request comment by a practically unknown young Ph. D. Also remarkable is the strange and almost prophetic premonition of things to come shown in this article. There were about a dozen more similar articles by older generation Italian physicists in the appendix to the same book and almost all of them were very sceptical and hostile to relativity. A perusal of these articles shows the state of mind of official physics in Italy at the time.

E. SEGRÈ.

5.

LE MASSE NELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ

Da A. Kopff, *I fondamenti della relatività Einsteiniana*, Ediz. italiana a cura di R. Contu e T. Bembo, Hoepli, Milano 1923, pp. 342-344.

La grandiosa importanza concettuale della teoria della relatività, come contributo ad una più profonda comprensione dei rapporti tra spazio e tempo, e le vivaci e spesso appassionate discussioni a cui essa ha in conseguenza dato luogo anche fuori degli ambienti strettamente scientifici, hanno forse un po' distolta l'attenzione da un altro suo risultato che, per esser meno clamoroso e, diciamolo pure, meno paradossale, ha tuttavia nella fisica conseguenze non meno degne di nota, ed il cui interesse è verosimilmente destinato a crescere nel prossimo svilupparsi della scienza.

Il risultato a cui accenniamo è la scoperta della relazione che lega la massa di un corpo alla sua energia. La massa di un corpo, dice la teoria della relatività, è uguale alla sua energia totale divisa per il quadrato della velocità della luce. Già un esame superficiale ci mostra come, almeno per la fisica quale la si osserva nei laboratori, l'importanza di questa relazione tra massa ed energia è tale da offuscare notevolmente quella delle altre conseguenze, quantitativamente lievissime, ma alle quali la mente si abitua con più sforzo. Valga un esempio: un corpo lungo un metro che si muovesse con la velocità, abbastanza rispettabile, di 30 km al minuto secondo (eguale press'a poco alla velocità del moto della terra attraverso gli spazii) apparirebbe sempre lungo un metro ad un osservatore trascinato dal suo moto, mentre ad un osservatore fermo apparirebbe lungo un metro meno cinque milionesimi di millimetro; come si vede il risultato, per strano e paradossale che possa parere, è tuttavia molto piccolo, ed è da ritenere che i due osservatori non si metteranno a litigare per così poco. La relazione tra massa ed

energia invece ci porta senz'altro a delle cifre grandiose. Ad esempio se si riuscisse a mettere in libertà l'energia contenuta in un grammo di materia si otterrebbe un'energia maggiore di quella sviluppata in tre anni di lavoro ininterrotto da un motore di mille cavalli (inutili i commenti!). Si dirà con ragione che non appare possibile che, almeno in un prossimo avvenire, si trovi il modo di mettere in libertà queste spaventose quantità di energia, cosa del resto che non si può che augurarsi, perché l'esplosione di una così spaventosa quantità di energia avrebbe come primo effetto di ridurre in pezzi il fisico che avesse la disgrazia di trovar il modo di produrla.

Ma se anche una tale esplosione completa della materia non appare per ora possibile, sono però già in corso da qualche anno delle esperienze dirette ad ottenere la trasformazione degli elementi chimici uno nell'altro. Tale trasformazione, che si presenta naturalmente nei corpi radioattivi è stata recentemente ottenuta anche artificialmente da Rutherford che, bombardando con delle particelle α (corpuscoli lanciati con velocità grandissima dalle sostanze radioattive) degli atomi, è riuscito ad ottenerne la decomposizione. Ora a queste trasformazioni degli elementi uno nell'altro sono legati degli scambi energetici che la relazione tra massa ed energia ci permette di studiare in modo molto chiaro. Ad illustrarli valga ancora un esempio numerico. Si ha ragione di ritenere che il nucleo dell'atomo di elio sia costituito da quattro nuclei dell'atomo di idrogeno. Ora il peso atomico dell'elio è 4,002 mentre quello dell'idrogeno è 1,0077. La differenza tra il quadruplo della massa dell'idrogeno e la massa dell'elio, è dunque dovuta all'energia dei legami che uniscono i quattro nuclei di idrogeno per formare il nucleo dell'elio. Questa differenza è 0,029 corrispondente, secondo la relazione relativistica tra massa ed energia ad un'energia di circa sei miliardi di calorie per grammo-atomo di elio. Queste cifre ci dimostrano che l'energia dei legami nucleari è qualche milione di volte maggiore di quella dei più energici legami chimici e ci spiegano come contro il problema della trasformazione della materia, il sogno degli alchimisti, si siano per tanti secoli rotti gli sforzi degli ingegni più eletti, e come solo ora, adottando i mezzi più energici a nostra disposizione, si sia riusciti ad ottenere questa trasformazione; in quantità del resto tanto minime da sfuggire alla più delicata analisi.

Bastino questi brevi accenni a dimostrare come la teoria della relatività, oltre a darci una interpretazione chiara delle relazioni tra spazio e tempo, sarà, forse in un prossimo avvenire, destinata ad esser la chiave di volta per la risoluzione del problema della struttura della materia, l'ultimo e più arduo problema della fisica.

N° 6.

I raggi Röntgen.

Questo lavoro e l'altro *Formazioni d'immagini coi raggi Röntgen* costituiscono essenzialmente la tesi di laurea di Fermi. Per quante ricerche siano state fatte all'Università di Pisa, non è stato possibile ritrovare la copia originale della Tesi di Laurea, né dai verbali di esame, né dai registri risulta quale fosse esattamente il titolo di essa. Però nell'*Annuario* dell'Università per l'anno 1922-23, a p. 412, nell'elenco dei laureati si legge: « E. FERMI: *Studi sopra i raggi Röntgen* », e questo è molto probabilmente il titolo della tesi.

G. POLVANI.

A review article essentially based on the introductory part of the dissertation discussed under N° 7.

F. RASETTI.

6.

I RAGGI RÖNTGEN

« Nuovo Cimento », 24, 133-163 (1922).

NOTAZIONI.

- e = carica elettronica (u. e. s.).
 m = massa elettronica.
 c = velocità della luce.
 h = quanto di azione di Planck.
 N = numero di Avogadro.
 Z = numero atomico.
 A = peso atomico.
 λ = lunghezza d'onda.
 ν = frequenza.
 d = distanza tra i piani di un reticolato atomico.
 n = ordine degli spettri.

§ 1. — LA SCOPERTA E LE PRIME PROPRIETÀ. — I raggi Röntgen o raggi X furono scoperti nel 1895 da W. C. Röntgen, che osservò che le parti del vetro di un tubo duro a raggi catodici che erano colpite da questi, emettevano a loro volta dei raggi che traversavano le pareti del tubo e molti corpi opachi alla luce visibile, impressionavano le lastre fotografiche e rendevano fluorescenti schermi di platinocianuro di bario e di altre sostanze.

Alla scoperta seguirono presto numerose ricerche atte a metterne in evidenza le prime proprietà; principalmente che i nuovi raggi si propagavano in linea retta senza subire né riflessioni né rifrazioni e che ionizzavano i

gas attraversandoli. Questa seconda proprietà, importantissima di per sé, permise anche un modo di rivelazione sensibile e quantitativo dei nuovi raggi. Basta infatti far passare il fascio dei raggi in esame tra due piastre metalliche mantenute a potenziale differente, che la corrente di ionizzazione che tra di esse si stabilirà, e che si potrà misurare con un elettroscopio o con un elettrometro, ci darà la misura dell'energia del fascio, purché naturalmente esso sia totalmente assorbito dal gas tra le due piastre, ciò che in pratica si ottiene usando secondo i casi SO_2 , oppure CH_3J . Tale metodo di rivelazione, detto della camera di ionizzazione, può subire naturalmente numerose modificazioni, ed è l'unico che si presti a misure quantitative dell'intensità dei raggi X; esso è perciò in molti casi da preferirsi al metodo fotografico, nonostante la minore comodità.

Contemporaneamente a queste prime scoperte, si perfezionò anche la tecnica della produzione dei raggi. Attualmente i tubi a raggi X consistono essenzialmente in un'ampolla di vetro per lo più sferica, contenente un catodo concavo, che concentra i suoi raggi catodici sopra una piastra metallica ad alto punto di fusione, l'anticatodo, che emette i raggi X. Da anodo può servire lo stesso anticatodo oppure un elettrodo posto in un punto qualunque del tubo. Volendo una sorgente di raggi X molto intensa, è spesso necessario raffreddare l'anticatodo con una corrente d'acqua, per evitare che sia fuso dal bombardamento catodico. Quando poi si vogliono aver parecchio intense quelle specie di raggi che sono fortemente assorbite dal vetro dell'ampolla, conviene munire quest'ultima di una finestra di alluminio o di vetro al litio. Varie case costruttrici poi forniscono tubi con disposizioni particolari, atte a dar sorgenti di raggi di particolar costanza e intensità, sulle quali non ci fermiamo.

§ 2. - LA NATURA DEI RAGGI RÖNTGEN. — Sulla natura dei raggi X si presentavano in principio spontanee tre ipotesi:

- a) che essi fossero costituiti da una proiezione di corpuscoli elettrizzati analoga ai raggi catodici o ai raggi canale;
- b) che essi fossero una proiezione di corpuscoli elettricamente neutri;
- c) che essi fossero una propagazione di onde elettromagnetiche differenti dalla luce visibile soltanto per la lunghezza d'onda.

L'ipotesi a) fu subito scartata essendosi fin dai primi tempi dimostrato che i raggi X non subivano alcuna deviazione per effetto di campi elettrici o magnetici. Nel caso che fosse stata vera l'ipotesi c) i nuovi raggi avrebbero dovuto aver lunghezza d'onda estremamente piccola, perché solo così poteva spiegarsi l'assenza completa dei fenomeni di riflessione e di rifrazione. A verifica di questa ipotesi Walter e Pohl⁽¹⁾ tentarono un'esperienza di diffrazione attraverso ad una sottilissima fenditura. Tali esperienze non diedero alcun risultato chiaro. Se ne concluse tuttavia che, semmai, la lunghezza d'onda non poteva essere superiore a pochi Å (10^{-8} cm). Frattanto Barkla con una serie di ricerche che descriveremo tra poco, dimostrava che i raggi X emessi dagli ordinarii tubi sono costituiti da varie specie di raggi, dipendenti

(1) B. WALTER e R. POHL, «Ann. d. Phys.», 25, 715 (1908).

dall'anticatodo, distinti per il loro coefficiente di assorbimento, di modo che si cominciò a parlare di una « criptocrosi » dei raggi Röntgen. La dimostrazione però della completa analogia tra i raggi X e la luce fu data solo nel 1912 da M. Laue. Già da una cinquantina d'anni aveva credito nella cristallografia l'ipotesi reticolare di Bravais, secondo la quale i cristalli sarebbero stati costituiti da reticolati tridimensionali di particelle, atomi o molecole, tali che le loro mutue distanze, valutate in base al numero di Avogadro, risultavano dell'ordine di grandezza di qualche Å. L'idea di Laue fu la seguente: Se i raggi Röntgen sono effettivamente, come risulterebbe dalle esperienze di Walter e Pohl, delle onde elettromagnetiche di piccolissima lunghezza d'onda, non è certamente possibile costruire artificialmente dei reticoli tanto fini da poterli diffrangere; se però è vera l'ipotesi reticolare di Bravais tali reticoli li troviamo naturalmente nei cristalli. Laue sviluppò allora matematicamente la teoria di questi reticoli a tre dimensioni, in modo non essenzialmente diverso dalla ordinaria teoria dei reticoli di diffrazione e concluse che se una sottile lamina cristallina si faceva attraversare da un sottile pennello di raggi Röntgen, sopra una lastra fotografica posta dalla parte opposta si sarebbe dovuto raccogliere oltre all'impressione dei raggi primari anche una serie di macchie di diffrazione disposte attorno alla macchia primaria, con una simmetria subordinata a quella della lamina cristallina. L'esperienza, eseguita materialmente nel 1912 da Friedrich e Knipping ⁽²⁾ verificò nei più piccoli dettagli le previsioni teoriche di Laue, fornendo insieme la prova sperimentale della natura ondulatoria dei raggi X e della struttura reticolare dei cristalli e tracciando la via ad uno studio accurato degli uni e degli altri. Il dispositivo di Laue per l'osservazione dei nuovi fenomeni di diffrazione non era particolarmente adatto ad uno studio sistematico di questi, avendo il difetto di fornire tutti gli elementi in una sola volta in condizioni da poter solo con gravi difficoltà essere sceverati. W. H. e W. L. Bragg ⁽³⁾ perciò un anno dopo, partendo dalla stessa idea di Laue, idearono un dispositivo assai superiore a quello primitivo. Ne esponiamo rapidamente il principio. Consideriamo in un reticolato cristallino un piano reticolare, cioè un piano parallelo ad una faccia possibile del cristallo, e che contenga molti atomi. Siccome ognuno di tali atomi agisce come centro di diffrazione rispetto ad un treno d'onde incidenti, tutto il piano rifletterà una parte di tali onde. Ora il cristallo si può considerare costituito dalla sovrapposizione di tanti piani reticolari spaziatosi di intervalli uguali, d ; così che un treno d'onde incidente verrà riflesso sopra ognuno di essi dando origine a tanti treni d'onde riflessi paralleli che interferiranno tra di loro. I Bragg dimostrarono che questi treni d'onda si trovavano in fase sommandosi solo quando fosse verificata la seguente relazione (relazione di Bragg):

$$(1) \quad n\lambda = 2d \cos \theta$$

(2) W. FRIEDRICH, P. KNIPPING e M. LAUE, «Ann. d. Phys.», 41, 971 (1913).

(3) Per i lavori di W. H. e W. L. BRAGG si consulti il loro ormai classico libro *X-Rays and Crystal Structure*. Bell and Sons, London 1918. Un altro importante trattato sopra questi argomenti è: LEDOUX-LEBARD, *La Physique des Rayons X*. Gauthier Villars. Paris, 1921.

essendo θ l'angolo di incidenza ed n un numero intero detto « ordine della riflessione ». Quando questa relazione non è verificata, i varii treni d'onda riflessi si distruggono per interferenza. Torneremo in seguito con più accuratezza sulla teoria di questa riflessione, ma per ora è sufficiente questo accenno. Supponiamo che un fascio monocromatico di raggi X caschi sopra una lamina cristallina montata su un cerchio graduato in modo da poter far variare l'angolo di incidenza θ . Essendo così fissati λ e d la (1) sarà soddisfatta solo per certi valori di θ , corrispondenti ai diversi valori dell'intero n ; si avrà dunque una sensibile riflessione dei raggi incidenti per valori particolari di θ . Se osserviamo i raggi riflessi per mezzo di una camera di ionizzazione come fecero i Bragg, oppure fotograficamente come fecero De Broglie e Moseley, possiamo trovare i valori di θ e quindi, dalla (1) il rapporto $\lambda : d$. Otteniamo così dei veri spettri dei raggi X di varii ordini corrispondentemente ai varii valori che può prendere n . Si capisce che se la radiazione incidente non è monocromatica, si ottengono varie righe corrispondentemente ad ogni radiazione monocromatica in essa contenuta. Possiamo in questo modo ottenere degli spettri di una radiazione Röntgen del tutto analoghi a quelli della spettroscopia ordinaria. Torneremo del resto in seguito con più particolari sopra i dispositivi per ottenerli.

La (1) fornendoci così il rapporto $\lambda : d$ si presta a due modi di sfruttamento:

A) Tener costante d e far variare λ ; studiare cioè le riflessioni di varie specie di raggi sopra una stessa faccia cristallina, in modo da poterle confrontare tra di loro.

B) Si tiene costante λ facendo variare d ; ossia si studiano le riflessioni di una stessa radiazione monocromatica sopra le varie faccie di uno stesso cristallo, o sopra faccie di cristalli diversi. Questi studii furono con particolare successo seguiti dai Bragg. È chiaro come la conoscenza dei d , fornendoci elementi intimamente legati alla struttura del cristallo possa, almeno in casi semplici, condurre alla completa determinazione del reticolato cristallino, ciò che per parecchi cristalli fu effettivamente fatto per opera dei Bragg e di altri. Riservando al seguito i particolari di queste ricerche, ci limitiamo ad osservare che, una volta conosciuto il reticolato cristallino, la conoscenza del numero di Avogadro ci permette di avere d , e quindi anche λ in misura assoluta. Naturalmente in queste misure assolute si ha l'incertezza del numero di Avogadro, che non c'è invece in quelle relative. Vogliamo ora esaminare i risultati del metodo A). Si trovò intanto subito che lo spettro della radiazione Röntgen è costituito da un fondo continuo intenso, sul quale emergono delle righe molto nettamente definite, le cui lunghezze d'onda dipendono solo dal materiale di cui è fatto l'anticatodo e non dalla forma del tubo o dal modo di eccitazione.

Inoltre questi spettri Röntgen, o di alta frequenza costituiscono una proprietà atomica, nel senso che ogni elemento dà lo stesso spettro Röntgen, sia che si trovi nell'anticatodo allo stato elementare, o in qualunque combinazione chimica o che sia comunque soggetto alle più energiche azioni fisiche o chimiche.

Tale proprietà, praticamente assai importante, perché permette l'analisi spettrografica di elementi liquidi o gassosi, ha una vasta portata teorica

in quanto dimostra che l'origine dei raggi X è nelle parti profonde dell'atomo che sono poco o nulla influenzate dalle circostanze esterne. E ciò costituisce una profonda differenza tra gli spettri d'alta frequenza e gli spettri ordinari, i quali hanno origine nelle regioni corticali dell'atomo, e spiega come i primi abbiano una struttura assai più semplice e decifrabile che non i secondi.

Una notevole differenza di origine esisterebbe tra i raggi costituenti il fondo continuo e quelli costituenti le radiazioni caratteristiche, in quanto che questi ultimi si interpretano come dovuti alle perturbazioni causate nell'atomo dall'urto di un elettrone catodico, mentre i primi sarebbero invece onde di accelerazione, in questo caso negativa, emananti dall'elettrone catodico quando questo viene fermato dall'urto contro l'anticatodo. Cominciamo con l'esame delle radiazioni caratteristiche: Lo spettro Röntgen di un qualsiasi elemento è costituito da varie linee, raggruppabili in serie assai distanziate che, in ordine di lunghezza d'onda crescente o, come si dice, di durezza decrescente, si chiamano, con una denominazione di Barkla, che le aveva scoperte, nel suo studio sopra l'assorbimento, assai prima delle esperienze di Laue, serie K, L, M, ... La durezza di una stessa serie, per esempio della serie K cresce da elemento a elemento col numero atomico, così che per gli elementi leggeri è osservabile soltanto la serie K, siccome L ed M sono troppo molli per poter essere studiate, mentre per gli elementi pesanti la K diventa troppo dura e restano osservabili soltanto L ed M. Ogni serie è costituita da alcune righe di cui qualcuna doppia; le elencheremo parlando della loro teoria. Una relazione importantissima passa tra la lunghezza di onda delle righe Röntgen e il numero atomico dell'elemento emittente. Consideriamo per esempio la K_{α} che è la più intensa riga della serie K. Moseley (4), nel 1913 misurò le frequenze ν della K_{α} di 10 elementi presi in fila nel sistema periodico dal Ca al Cu e trovò verificata la seguente relazione:

$$(2) \quad \nu = \frac{3}{4} R (Z - 1)^2$$

essendo R il numero di Rydberg. Tale relazione ci fornisce un criterio assai più sicuro che non il peso atomico, per determinare il numero atomico di un elemento, e basandosi su di essa si evitano le inversioni che si presentano nel sistema periodico tra Ni e Co, A e K etc.

La relazione di Moseley non è più rigorosamente soddisfatta per grossi numeri atomici. In genere anche per ogni altra riga si hanno relazioni approssimativamente lineari tra $\sqrt{\nu}$ e Z. Elementi isotopi, corrispondendo allo stesso numero atomico hanno anche le stesse righe. Parleremo in particolare di tali proprietà esponendo la teoria degli spettri, al quale proposito mostriamo anche la spiegazione delle divergenze tra le formule analoghe a quella di Moseley e l'esperienza.

Il fondo continuo, detto anche per la sua origine « Bremsstrahlung », è costituito da una radiazione di intensità piuttosto debole e di frequenza variabile con continuità da zero fino ad un certo massimo ν_m che si calcola

(4) H. G. MOSELEY, « Phil. Mag. », 26, 1024 (1913).

con la formula di Planck-Einstein:

$$h\nu_m = eV$$

essendo V il potenziale di eccitazione. La formula è verificata molto bene, tanto che fornisce un metodo abbastanza preciso per la determinazione di h . In genere con un potenziale di eccitazione V non si possono produrre radiazioni di frequenza superiore a ν_m né nella Bremsstrahlung né nello spettro di righe; anzi per eccitare una determinata riga non basta il potenziale $h\nu/e$, perché facendo crescere il potenziale tutte le righe di una stessa serie compaiono in una volta sola quando il potenziale ha raggiunto il valore capace di eccitare il limite di questa serie, che ha frequenza maggiore di tutte le righe della serie. A questo proposito notiamo che mentre la serie K ha un solo limite, la serie L ne ha invece due, e le sue righe compaiono in due gruppi via via che questi due limiti vengono raggiunti.

§ 3. - L'ASSORBIMENTO. — I fenomeni or ora descritti trovano il loro riscontro nei fenomeni dell'assorbimento dei raggi X per parte dei materiali da essi traversati. Lo studio di questi fu in gran parte fatto da Barkla assai prima della scoperta di Laue. Cominciamo con l'osservare che l'assorbimento dei raggi X avviene per due ragioni essenzialmente diverse, in quanto che un corpo irradiato da raggi Röntgen emette a sua volta dei raggi Röntgen a spese dell'energia del fascio irradiante; ma questi raggi sono costituiti da una parte di lunghezza d'onda eguale a quella della radiazione primaria (raggi diffusi) e da una parte di lunghezza d'onda diversa (raggi di fluorescenza); studieremo perciò separatamente i due fenomeni.

Diffusione. — Si chiama coefficiente di diffusione (σ) il rapporto tra l'energia dei raggi diffusi dall'unità di volume e l'intensità della radiazione primaria. Se ρ è la densità del materiale σ/ρ sarà il coefficiente di diffusione relativo all'unità di massa, σ coefficiente massico di diffusione. Barkla e Crowther⁽⁵⁾ osservarono che, per una stessa radiazione primaria i coefficienti massici di diffusione sono per molti elementi leggeri press'a poco eguali tra di loro, salvo per l'idrogeno per il quale si trova un valore quasi doppio che per gli altri. Tutto ciò si accorda bene con la teoria della diffusione di Thomson⁽⁶⁾. Secondo Thomson il meccanismo della diffusione è il seguente: sotto l'azione del campo elettrico oscillante prodotto dalla radiazione primaria, un elettrone del corpo diffondente si mette a vibrare e conseguentemente irradia energia della stessa frequenza. Le note formule di elettrodinamica danno, con un calcolo facilissimo, che l'energia diffusa da un solo elettrone sotto l'azione dell'intensità primaria I è: $\frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4}$. D'altra parte in un grammo di sostanza si trovano NZ/A elettroni; il coefficiente di diffusione massico è dunque: $\frac{8\pi N}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{Z}{A}$. Esso risulta dunque indipendente dalla lunghezza d'onda e variando l'elemento disperdente varia come Z/A ; ora è noto che Z/A è press'a poco $= 1/2$ per tutti gli elementi, salvo per

(5) C. G. BARKLA, « Phil. Mag. », 7, 543 (1904); J. A. CROWTHER, *ibid.*, 14, 653 (1907).

(6) J. J. THOMSON, *Conduction of Electricity through Gases*, Cambridge, 1903.

l'idrogeno, per il quale $\epsilon = 1$. Con ciò si spiegano dunque completamente i risultati di Barkla e Crowther; anche il valore teorico del coefficiente coincide abbastanza bene con quello sperimentale. Vediamo ora invece i punti nei quali si ha divergenza tra questa teoria e l'esperienza. In primo luogo la teoria di Thomson oltre a dar il modo di calcolare l'energia totale diffusa, permette anche di calcolarne la distribuzione e prevede precisamente che l'energia sia diffusa simmetricamente rispetto a un piano perpendicolare alla radiazione primaria e passante per il corpo diffondente. Sperimentalmente invece Barkla ⁽⁷⁾, Owen ⁽⁸⁾ ed altri trovarono risultati, invero discordi tra loro, che però concordavano nel trovar maggiore l'energia diffusa in senso concorde ai raggi primarii, che non quella in senso opposto. Wilson e Debye ⁽⁹⁾ cercarono di interpretar tale fatto con anomalie prodotte da fenomeni di diffrazione che avessero luogo o nei reticolati di microcristalli contenuti nel corpo disperdente, o addirittura nei reticolati atomici di cui son costituite le molecole.

Un'altra divergenza ben più grave tra la teoria di Thomson e l'esperienza consiste in ciò, che mentre la teoria prevede il coefficiente indipendente dall'elemento disperdente e dalla lunghezza d'onda, l'esperienza verifica questa proprietà solo per elementi leggeri e per lunghezze d'onda intermedie. In genere per lunghezze d'onda estremamente piccole il coefficiente ha valore minore di quello che avrebbe secondo la teoria, e tende a zero insieme a λ . Mentre per λ grande σ/ρ cresce assai rapidamente. Teoricamente Debye ⁽¹⁰⁾ spiegò i grandi valori di σ/ρ per elementi pesanti e grandi lunghezze d'onda con l'osservazione che in tale caso molti elettroni vengono in certo modo a vibrare in blocco esercitando perciò un'azione proporzionale al quadrato del loro numero invece che al loro numero.

Più misteriosa si presenta invece la decrescita di σ/ρ per piccole lunghezze d'onda. Compton cercò di spiegarla ammettendo un elettrone anulare, invece che sferico, di raggio 185×10^{-10} cm. La stessa stranezza di tale ipotesi mostra quanto lontani siamo da una spiegazione. Probabilmente ci troviamo di fronte ad uno di quei casi in cui finisce la validità dell'elettrodinamica classica per cedere il posto alla teoria dei quanti.

Fluorescenza. - Quando un elemento è irradiato da una radiazione primaria Röntgen emette, oltre ad una radiazione diffusa, di frequenza eguale a quella primaria, anche delle radiazioni con le proprie frequenze caratteristiche per fluorescenza, quando almeno la radiazione primaria abbia durezza sufficiente. Si chiama coefficiente di fluorescenza (τ) il rapporto della energia emessa per fluorescenza dall'unità di volume di un elemento all'intensità della radiazione primaria. Come nel caso della diffusione τ/ρ si chiama coefficiente massico di fluorescenza. Il fenomeno della fluorescenza è in molte particolarità analogo alla emissione di raggi Röntgen sotto l'azione di un bombardamento catodico. Teniamo presente che per mezzo della costante h

(7) C. G. BARKLA, « Phil. Mag. », 15, 228 (1927).

(8) E. A. OWEN, « Proc. Camb. Phil. Soc. », 16, 161 (1911).

(9) P. DEBYE, « Ann. d. Phys. », 46, 809 (1915).

(10) P. DEBYE, op. cit.

di Planck si ha tra quanto di energia ε , e frequenza ν , la relazione $\varepsilon = h\nu$. Ora abbiamo visto a suo luogo che per eccitare una riga Röntgen. per esempio la K_{α} non bastava che la particella catodica avesse energia $\varepsilon = eV = h\nu_{K_{\alpha}}$, ma occorre un'energia maggiore, equivalente almeno alla frequenza del limite della serie K. In modo in tutto analogo per eccitare per fluorescenza l'emissione della K_{α} , non basta che la radiazione primaria abbia frequenza superiore alla riga da eccitare, ma deve aver frequenza almeno eguale al limite della serie K.

Lo stesso accade naturalmente anche per le altre serie, soltanto che per esse i limiti possono essere più d'uno. Vedremo a suo tempo come questi fatti si interpretino teoricamente. Esaminiamo intanto la variazione del coefficiente di fluorescenza in funzione della lunghezza d'onda. C'è intanto da aspettarsi che esso presenti delle discontinuità per le lunghezze d'onda corrispondenti ai limiti delle serie del corpo fluorescente. Nel tratto tra due limiti di assorbimento esso varia, secondo le misure di Glocker⁽¹¹⁾, come $\lambda^{2,6}$; cresce dunque rapidamente con λ . Esso cresce poi rapidissimamente col numero atomico dell'elemento fluorescente, essendo press'a poco proporzionale a Z^4 . Se λ_A è la lunghezza d'onda del limite della serie K si ha, secondo Glocker:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\tau}{\rho} = 22,8 \cdot 10^{-6} Z^{4,28} \lambda^{2,8} & \text{per } \lambda > \lambda_A \\ \frac{\tau}{\rho} = 1120 \cdot 10^{-6} Z^{3,72} \lambda^{2,8} & \text{per } \lambda > \lambda_A. \end{cases}$$

I fenomeni ora descritti spiegano bene il seguente fatto osservato da Barkla: se si misurano i coefficienti di assorbimento della radiazione emessa da un anticatodo di numero atomico Z per parte di elementi di numero atomico via via crescente, si trova che tale coefficiente presenta una brusca diminuzione tra i numeri atomici dell'elemento assorbente $Z - 2$ e $Z - 1$. Ciò dipende dal fatto che la K_{α} che è la più intensa radiazione dell'elemento ha frequenza compresa tra i limiti della serie K degli elementi di numero atomico $Z - 2$ e $Z - 1$, ed è quindi capace di eccitare per fluorescenza soltanto la serie K di elementi di numero atomico $\leq Z - 2$.

Di questi fenomeni ci si vale anche nei misuratori di durezza usati nella pratica medica. Quello di Wehnelt per esempio è costituito da un cuneo di alluminio posto accanto ad una lamina uniforme di argento. Si confrontano su uno schermo di platinocianuro di bario le intensità della radiazione da esaminare dopo che ha traversato l'apparecchio, e si cerca quale spessore di alluminio deve essere traversato per assorbire quanto la lamina d'argento. La durezza è maggiore quanto più grande è questo spessore.

Sulle leggi dell'assorbimento sono pure fondate le celebri esperienze di Barkla che lo condussero alla scoperta delle serie K ed L assai prima dei lavori di Laue. Consideriamo un fascio monocromatico di raggi X. Sia $\mu = \sigma + \tau$ il suo coefficiente complessivo di assorbimento in un certo mate-

(11) R. GLOCKER, « Phys. Zeits. », 19, 66 (1918).

riale. Allora se W è la sua energia iniziale, dopo aver traversato lo spessore l del materiale assorbente, essa si ridurrà a:

$$(5) \quad W = W_0 e^{-\mu l}.$$

Se in ascisse portiamo l e in ordinate W troviamo dunque una curva esponenziale. Tale conclusione cessa di essere valida se il fascio in esame non è monocromatico. Supponiamolo per esempio costituito da due radiazioni monocromatiche di energie iniziali $W_0^{(1)}$ e $W_0^{(2)}$ e di coefficienti di assorbimento rispettivamente μ_1 e μ_2 . L'intensità dopo attraversato lo spessore l sarà:

$$(6) \quad W = W_0^{(1)} e^{-\mu_1 l} + W_0^{(2)} e^{-\mu_2 l}.$$

La nostra grafica (l, W) non sarà dunque più un'esponenziale e da essa potranno facilmente rilevarsi μ_1 e μ_2 . Infatti da 4 suoi punti sostituendo in (6) le loro coordinate ricaviamo 4 equazioni dalle quali otteniamo le 4 incognite $W_0^{(1)}, W_0^{(2)}, \mu_1, \mu_2$. Si capisce che in pratica questa risoluzione può spesso farsi in modo assai più semplice.

Se per esempio μ_1 è abbastanza più grande di μ_2 avverrà che per l abbastanza grande il primo termine del secondo membro di (6) diventerà trascurabile di fronte al secondo e la grafica diventerà un'esponenziale dalla quale si ricaveranno subito $W_0^{(2)}$ e μ_2 . Fisicamente l'essersi annullato il primo termine significa che sono stati completamente assorbiti i raggi di coefficiente μ_1 , che cioè sono stati « filtrati » i raggi più penetranti. Tale metodo di analisi per filtrazione, che può evidentemente applicarsi anche a fasci comunque complessi, permise a Barkla di separare la serie K dalla L che è meno penetrante, ed è ancora da raccomandarsi per ottenere dei fasci approssimativamente omogenei.

Nelle ricerche sperimentali sopra l'assorbimento si può procedere in due modi. Quando non interessi distinguere tra coefficiente di diffusione e di fluorescenza si possono misurare, a mezzo di una camera di ionizzazione le intensità di un fascio di raggi prima e dopo che questo ha traversato uno spessore l della sostanza da esaminare. Se I_0 ed I sono queste intensità si avrà $I/I_0 = e^{-(\sigma+\tau)l}$, da cui si ricava $\sigma + \tau$. Se invece si desidera distinguere la diffusione dalla fluorescenza converrà esaminare in una qualunque direzione la radiazione uscente dal corpo colpito dai raggi primari, mediante una camera di ionizzazione. Questa radiazione è costituita da una parte dovuta a fluorescenza, e da un'altra naturalmente più dura, dovuta alla diffusione. Queste due parti posson quindi separarsi per filtrazione attraverso opportune sostanze assorbenti; e così si ottengono separatamente σ e τ .

Prima di abbandonar l'argomento dell'assorbimento citiamo ancora un altro fenomeno che si presenta sempre ad accompagnare l'emissione per fluorescenza, ed è del tutto analogo all'effetto fotoelettrico.

Esso consiste nella emissione di elettroni per parte di un corpo colpito da raggi X. Anche questo fenomeno è regolato dalla relazione quantistica $\epsilon = h\nu$, ϵ è l'energia cinetica dell'elettrone emesso, aumentata dell'energia necessaria a liberarlo dall'atomo in cui è contenuto. In questo fenomeno è

da ricercarsi la causa della ionizzazione dei gas per parte dei raggi X che li attraversano.

§ 4. - LA POLARIZZAZIONE DEI RAGGI RÖNTGEN. — Come la luce ordinaria anche i raggi X possono esser polarizzati; anzi i raggi emessi dagli ordinari tubi lo sono per lo più parzialmente. Barkla ⁽¹²⁾ lo ha potuto dimostrare al modo seguente: un fascio di raggi X emesso da un tubo ordinario in direzione perpendicolare a quella dei raggi catodici, colpiva un corpo diffondente e si esaminava l'intensità della radiazione diffusa nelle varie direzioni perpendicolari ai raggi primari; Barkla osservò che era maggiore l'intensità diffusa in direzione perpendicolare al piano del fascio primario e dei raggi catodici che non quella in direzione parallela al fascio catodico. Ciò, interpretato secondo la teoria di Thomson, significa che gli elettroni del corpo diffondente vibrano prevalentemente in senso parallelo ai raggi catodici, e quindi che il piano di polarizzazione dei raggi primari è perpendicolare al fascio catodico. Questo si accorda bene con la teoria di Stokes e Wiechert secondo la quale la Bremsstrahlung è dovuta alle accelerazioni degli elettroni catodici al momento dell'urto; perché in questo caso appunto il campo magnetico dell'onda elettromagnetica emessa deve essere perpendicolare alle direzioni dei raggi catodici.

§ 5. - LA TEORIA DELLE RADIAZIONI CARATTERISTICHE ⁽¹³⁾. — La teoria delle righe d'alta frequenza, che ha permesso di rendersi conto con una precisione che difficilmente si sarebbe sperata, della struttura degli spettri Röntgen è basata sul modello atomico di Rutherford-Bohr che brevemente richiamiamo. Sono note le celebri esperienze di Rutherford sopra la diffusione delle particelle α che lo indussero ad ammettere contro il vecchio concetto di Thomson, che la parte elettricamente positiva dell'atomo occupasse un nucleo di dimensioni estremamente piccole rispetto a quelle di tutto l'atomo, e che avesse carica complessiva eguale al numero atomico dell'elemento, moltiplicato per la carica elettronica, e racchiudesse in sé praticamente tutta la massa dell'atomo. Secondo questa rappresentazione l'atomo sarebbe come una specie di sistema planetario in cui il Sole è rappresentato dal nucleo positivo e i pianeti dagli elettroni, che sono in numero eguale al numero atomico, o più, o meno secondo che l'atomo è neutro o ionizzato negativamente, o positivamente. Se a questo sistema planetario si applicano le leggi della elettrodinamica classica, si trovano dei risultati che non hanno nulla a che vedere coi risultati sperimentali. Fu nel 1913 che N. Bohr diede le leggi che regolano il moto dei sistemi atomici.

L'idea fondamentale di tali leggi è la seguente: calcoliamo secondo le solite leggi meccaniche ed elettrodinamiche le orbite meccanicamente possibili del nostro sistema, trascurando l'irradiazione. Secondo Bohr non tutte queste orbite possono effettivamente esser descritte dagli elettroni, ma solo alcune,

(12) C. G. BARKLA, « Phil. Mag. », dal 1906 in poi.

(13) L'esposizione di queste teorie si può trovare, assai per disteso nel libro di SOMMERFELD, *Atombau und Spektrellinien*, Vieweg, Braunschweig, 1921.

orbite statiche, formanti una successione discreta da scegliersi con una legge che diremo tra poco. Finché il sistema si trova sopra un'orbita statica, non irradia energia. Ogni tanto accade però che esso salta da un'orbita statica a un'altra, e allora si ha emissione di tanta energia quanta è la differenza tra le energie W_1 e W_2 delle due orbite. Secondo Bohr poi questa energia viene emessa in un solo quanto. Se quindi ν è la frequenza di emissione si ha:

$$(7) \quad h\nu = W_1 - W_2.$$

Questa formula, una volta calcolate tutte le orbite statiche, e quindi le loro energie, permette di calcolare le frequenze di tutte le righe del nostro atomo.

Le leggi per la scelta delle orbite statiche da tutte quelle meccanicamente possibili sono alquanto complicate e furono formulate solo nel 1916 da Sommerfeld.

Ma per noi non occorre tale formulazione completa che serve solo per la considerazione delle orbite ellittiche. Limitandosi alle sole orbite circolari esse si riducono a richiedere che la quantità di moto areale di ogni elettrone sia un multiplo intero di $h/2\pi$. Descriviamo quali siano le orbite statiche nel caso dell'idrogeno perché, benché tale elemento non dia propriamente uno spettro Röntgen, esso costituisce tuttavia un modello analogamente al quale sono costruiti gli atomi più complessi. L'atomo di idrogeno è costituito dal nucleo e da un solo elettrone che meccanicamente potrà descrivere le ellissi kepleriane; limitiamoci dunque dapprima alle sole orbite circolari.

Un facile calcolo, in base alle leggi accennate, mostra che vi sono infinite orbite statiche circolari di raggi crescenti come i quadrati dei numeri interi, e di energie:

$$W_n = - \frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \frac{1}{n^2},$$

dove n è il numero d'ordine dell'orbita. L'applicazione della formula (7) ci dà ora:

$$(8) \quad \nu = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

con n ed m numeri interi qualunque, come frequenze di tutte le righe dell'idrogeno. Facendo $n=2 : m=3, 4, 5 \dots$ si ha la serie di Balmer; facendo $n=1, m=2, 3 \dots$ si ha la serie ultravioletta di Lyman; facendo $n=3, m=4, 5 \dots$ si ha la serie infrarossa di Paschen. Il coefficiente $2\pi^2 me^4/h^3$ coincide, entro i limiti dell'errore sperimentale col numero R di Rydberg.

Chiamiamo i successivi anelli $K, L, M \dots$. Se accanto alle orbite circolari si considerano anche quelle ellittiche, si trova che ad ogni orbita statica circolare ne corrispondono alcune ellittiche, di varie eccentricità, le quali hanno però eguale energia che le corrispondenti circolari, per modo che non danno luogo a nuove righe oltre quelle comprese nella formula (8). In generale l'energia W_n si ha nell' n^{esimo} cerchio e in $n-1$ orbite ellittiche. Così che l'energia W_2 si ha nel solo cerchio K ; l'energia W_3 nel cerchio L ed in una orbita ellittica e così via.

Le cose non vanno così semplicemente se nel calcolo delle orbite si tiene conto della variabilità della massa, prevista dalla teoria della relatività. Tenendo conto di questo si trova infatti che le energie di un'orbita circolare e delle corrispondenti ellittiche non sono rigorosamente eguali. Da ciò deriva che al posto di una semplice riga della formula (8) compaiono dei gruppi di righe vicinissime (Feinstruktur). La verifica quantitativa di queste previsioni teoriche costituisce insieme una brillante conferma della teoria di Bohr e di quella della relatività.

Sulla linea tracciata dal modello dell'atomo di idrogeno vediamo ora come si concepiscano i modelli almeno delle parti più interne degli atomi più complessi. Si ha intanto un nucleo positivo di carica Ze , attorno al quale girano Z elettroni disposti in anelli concentrici, denominati ordinatamente K, L, M, \dots . Cominciamo a considerare gli elettroni dell'anello K . Essi risentono naturalmente poco l'azione degli elettroni degli anelli esterni e son soggetti principalmente all'attrazione del nucleo e alla repulsione tra di loro. Il risultato di queste due azioni è che si può considerare soltanto l'azione del nucleo, purché invece che la carica eZ gli si attribuisca la carica $e(Z - z)$, dove z dipende dal numero di elettroni di cui si pensa costituito l'anello. L'energia dell' n^{esimo} anello che per l'idrogeno era $\frac{hR}{n^2}$ risulta ora $\frac{hR}{n^2}(Z - z)^2$. Già da questa rappresentazione piuttosto semplicistica possiamo ricavare dei risultati interessanti.

Invero la formula analoga alla (8) si scrive ora:

$$(9) \quad \nu = R(Z - z)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Secondo che in questa facciamo $n = 1, 2, 3, \dots$ troviamo righe delle serie K, L, M, \dots : la prima riga della serie K , la K_α si ha facendo $n = 1, m = 2$. Si ha dunque:

$$\nu_{K_\alpha} = (Z - z)^2 R \frac{3}{4}$$

se l'anello K si pensa occupato da tre elettroni si ha press'a poco $z = 1$, e quindi:

$$\nu_{K_\alpha} = \frac{3}{4} R (Z - 1)^2$$

che è la relazione di Moseley; ed analogamente si ha la spiegazione delle relazioni approssimativamente lineari, che passano tra la radice quadrata della frequenza di una riga qualunque, ed il numero atomico. Attenendosi al modello ora esposto, si troverebbero però meno righe di quelle che effettivamente si osservano e si avrebbe una approssimazione assai grossolana della loro frequenza. Le differenze spariscono in buona parte se si tien conto della variabilità nella massa prevista dalla teoria della relatività.

Tale correzione è per gli atomi pesanti assai più importante che per l'idrogeno, perché le orbite degli atomi pesanti sono descritte con velocità assai maggiore. Così che mentre le « Feinstrukturen » delle righe dell'idrogeno sono soltanto osservabili con mezzi di alta risoluzione, quelle degli spettri di alta frequenza sono per lo più bene osservabili in condizioni ordinarie.

Per effetto relativistico l'anello K resta semplice, quello L si sdoppia in due L, L' ecc. . . . Possiamo ora dare un elenco delle righe dello spettro d'alta frequenza di qualunque elemento.

Serie K. - Costituita dalle righe che vengono emesse nel salto di un elettrone da un anello qualunque, sopra l'anello K. Ne diamo i nomi, secondo Sommerfeld, e le origini in ordine di durezza crescente: α' (L' - K), α (L - K), α_3 (? - K), α_4 (? - K), β (M - K), γ (N - K). Le righe più intense sono la doppia $\alpha\alpha'$; α_3 ed α_4 si osservano solo negli elementi più leggeri. La serie K si è potuta osservare a misurare solo per gli elementi tra il Sodio ($Z = 11$) e il Neodimio ($Z = 60$). Prima del Na è troppo poco penetrante; dopo il Neodimio è troppo dura per poter essere eccitata.

Serie L. - Essa è conosciuta per gli elementi dallo Zn ($Z = 30$) fino all'Uranio. I nomi e le origini delle sue righe più importanti sono: α' (M' - L), α (M - L), α_3 (?), β (M' - L'), γ (N - L), δ (N - L'), ε (? - L), η (? - L). A proposito della serie L notiamo che, oltre ai due anelli L, L', si ha anche traccia di un terzo anello L, forse dovuto a perturbazioni tra gli anelli L e K.

Serie M. - È conosciuta per gli elementi dal Disprosio ($Z = 66$) all'Uranio. Le sue righe principali sono, secondo Stenström: α' (N' - M), α (N - M), β (N' - M'). In generale possiamo osservare che le serie L ed M sono più complicate e indecifrabili della K, fatto di cui ci si rende facilmente conto tenendo presente che si vengono via via considerando sistemi con maggior numero di elettroni ai quali le semplificazioni introdotte sono sempre meno strettamente applicabili.

Notiamo ancora che in qualche caso è stata osservata⁽¹⁴⁾ una serie J, più dura della K, osservabile solo per elementi molto leggeri.

Il meccanismo dell'eccitazione dei raggi X per parte di un bombardamento catodico, o per fluorescenza, si pensa che sia il seguente. Un elettrone da un anello interno viene proiettato fuori dell'atomo a spese dell'energia della particella o dei raggi primari; mentre è riassorbito, salta da un anello all'altro emettendo le righe. Con questa rappresentazione ci si spiega il comparire simultaneo di tutte le righe di una serie quando viene raggiunto il suo limite di eccitazione. Le frequenze di tali limiti infatti a meno del fattore $— h$, coincidono con le energie dei vari anelli, così per esempio solo quando i raggi catodici hanno energia sufficiente a liberare un elettrone dell'anello K possono cominciare a comparire le righe della serie K.

§ 6. - SPETTRI DEI RAGGI γ . — Questi raggi sono, come è noto, di natura analoga ai raggi X, dai quali si distinguono solo per la molto maggiore durezza. Ciò rende assai difficile la loro analisi spettrale che fu eseguita da Rutherford e Andrade⁽¹⁵⁾ con un metodo particolare che non descriviamo. Il risultato fu che essi sono costituiti da una radiazione molto penetrante, che per estrapolazione si ritiene esser la serie K dell'elemento radio-attivo, da radiazioni più penetranti non analizzabili, e forse da un fondo continuo.

(14) C. G. BARKLA, *Bakerian Lecture*, 1914; R. LEDOUX-LEBARD, « C. R. », 163, 608 (1919).

(15) E. RUTHERFORD e N. da C. ANDRADE, « Phil. Mag. », 27, 855 (1919).

§ 7. - SPETTROGRAFI A RAGGI RÖNTGEN. — Nello spettrografo più comune, a cristallo girante, il cristallo è montato sopra un asse, mosso da un movimento a orologeria e la registrazione è fatta sopra una pellicola fotografica avvolta a cilindro, con per asse l'asse di rotazione.

Da fenditura si fa spesso servire lo stesso anticatodo, che in tale caso, invece che a becco di flauto, come nei tubi ordinarii è tagliato quasi perpendicolarmente ai raggi catodici e viene osservato in direzione normale a questi, di modo che si presenta come una strettissima ellisse. È importante che l'anticatodo, oppure, se v'è, la fenditura distino dal cristallo quanto la pellicola fotografica, perché tale condizione, come osservano i Bragg, è necessaria per ottenere delle righe sottili anche usando un fascio aperto, il che è opportuno per utilizzare tutta la faccia cristallina e diminuire quindi il tempo di posa. Se invece che del metodo fotografico ci si vuol servire di quello della camera di ionizzazione, che è più raccomandabile specialmente nelle ricerche di analisi cristallina, per le quali occorre un confronto quantitativo delle intensità delle riflessioni dei varii ordini, sia il cristallo che la camera di ionizzazione si montano sopra un cerchio graduato e si fa una serie di letture girando sempre il cristallo di un certo angolo e la camera dell'angolo doppio. Questo è il metodo usato dai Bragg nelle loro classiche ricerche sulla struttura dei cristalli.

Quando si voglia ottenere rapidamente tutto lo spettro di un certo anticatodo senza bisogno di una particolare esattezza si può usare come cristallo riflettente una lamina di mica curvata a cilindro che viene tutta investita dal fascio da analizzare, per modo che l'angolo di incidenza varia da punto a punto. Si ha naturalmente la riflessione solo nei punti per i quali è verificata la relazione (1) di Bragg, ed i raggi riflessi vengono raccolti sopra una lastra fotografica. Questo metodo è dovuto a De Broglie⁽¹⁶⁾. La sig.na Brunetti ottenne con esso buoni risultati sostituendo alla mica una lamina di salgemma curvata a caldo.

I metodi fin qui descritti non si prestano spesso all'analisi cristallina, essendo per essi necessario che i cristalli abbiano facce un po' sviluppate. Debye e Scherrer⁽¹⁷⁾ hanno perciò escogitato un importante metodo che permette l'analisi anche di polveri cristalline. Un sottile fascio di raggi X vien fatto cadere sopra un tubetto contenente la polvere cristallina. In essa si trovano naturalmente tutte le facce cristalline in tutte le possibili orientazioni, ve ne saranno perciò sempre di quelle che si troveranno sotto un angolo adatto a riflettere in raggi incidenti; ed i raggi riflessi segneranno, sopra una lastra posta perpendicolarmente ai raggi primarii dei cerchi concentrici. Questo metodo certamente prezioso per ricerche mineralogiche, non si presterebbe naturalmente a ricerche spettrometriche per le quali è necessario ottenere righe fini. Una comoda variante di questo metodo è descritta da Bohlin⁽¹⁸⁾. Per misure spettrometriche di grandi lunghezze d'onda, che sono assorbite da pochi mm. di aria è necessario operare nel vuoto interpo-

(16) M. DE BROGLIE, « Journal de Phys. », 4, 265 (1914).

(17) P. DEBYE e P. SCHERRER, « Phys. Zeits. », 17, 277 (1916).

(18) H. BOHLIN, « Ann. d. Phys. », 61, 421 (1920).

nendo sul passaggio dei raggi solo qualche sottile diaframma di alluminio. È pure importante osservare che dalla formula di Bragg: $n\lambda = 2d \sin \theta$ si ricava $\lambda < 2d$.

Per studiare le grandi lunghezze d'onda conviene dunque scegliere dei cristalli con d molto grande, quali il gesso ($2d = 15,2 \text{ \AA}$), la mica ($2d = 20,2 \text{ \AA}$). Il cristallo che presenta la maggior costante conosciuta è secondo Stenström il sale sodico del dietilglicolato di argento ($2d = 38 \text{ \AA}$). Misure spettrometriche sulle grandi lunghezze d'onda furono fatte per la prima volta da Moseley, e poi sistematicamente da Siegbahn⁽¹⁹⁾ e dai suoi scolari. A questo proposito accenniamo anche, ad una importante serie di ricerche, in buona parte tutt'ora in corso, destinate ad esplorare la regione dello spettro tra i raggi Röntgen più molli e l'estremo ultravioletto.

La produzione di questi raggi si può fare con delle specie di tubi Röntgen con catodo rovente, che possono così lavorare sotto voltaggi bassissimi, anche poche decine di volt.

L'analisi si fa dall'estremo ultravioletto dei raggi così detti di Schumann ($\lambda = 1000 \text{ \AA}$) fino a 300 o 400 \AA con dei reticoli artificiali; in tutto l'intervallo poi da 300 a 15 \AA non si può disgraziatamente ricorrere che a metodi di filtrazione analoghi a quelli descritti usati da Barkla, che non permettono naturalmente la misura delle lunghezze d'onda.

Nelle misure su piccole lunghezze d'onda invece, anche usando cristalli di costante molto piccola quali il salgemma ($d = 2,814$) o la calcite ci si trova sempre di fronte alla difficoltà prodotta dalla scarsa deviazione dei raggi riflessi. È interessante a questo proposito il metodo escogitato da Rutherford e Andrade⁽²⁰⁾ nella loro analisi dei raggi γ .

Generalmente in uno spettro si nota una rapida diminuzione di intensità col crescere dell'ordine. Tale diminuzione è dovuta in parte all'imperfezione del cristallo e in parte all'irregolarità prodotta nel reticolato cristallino dall'agitazione termica. L'effetto di quest'ultima fu studiato per la prima volta da Debye⁽²¹⁾, che dimostrò che col crescere della temperatura dovevano decrescere le intensità delle righe, specialmente per quelle di ordine elevato, senza che si avesse diminuzione del potere risolutivo.

Queste previsioni teoriche furono confermate dall'esperienza; per il salgemma per esempio già a 300° sparisce ogni fenomeno di diffrazione.

Facciamo un'ultima osservazione riguardo al potere risolutivo. A prima vista potrebbe sembrare che questo fosse enorme; è enorme infatti il numero degli elementi diffrangenti (qualche milione per mm. di spessore). Contro questo però vi sono molte ragioni che producono un allargamento delle righe.

In primo luogo l'impossibilità di usar fenditure molto strette; secondo il fatto di operare con onde sferiche invece che piane, che impedisce che

(19) Per queste e per le altre misure spettrometriche sistematiche dell'istituto fisico di Lund vedi i lavori di SIEGBAHN, FRIMAN e STENSTRÖM nel « Phil. Mag. » dal 1916 in poi.

(20) E. RUTHERFORD e N. da C. ANDRADE, « Phil. Mag. », 27, 854 (1914).

(21) P. DEBYE, « Ann. d. Phys. », 43, 49 (1914).

possano interferire tra loro atomi un po' lontani; terzo l'irregolarità naturale del cristallo e quarto infine lo spessore del cristallo. Il complesso di queste cause impedisce di raggiungere praticamente un potere risolutivo molto superiore all'1 per 1000.

§ 8. - L'ANALISI DEI CRISTALLI. — Passiamo da ultimo all'esame dell'applicazione dei fenomeni di diffrazione dei raggi X all'analisi cristallina. Ricordiamo perciò come il concetto moderno di molecola di un cristallo differisca notevolmente dal concetto di molecola in un liquido o in un gas. Invero in un fluido, nel quale le molecole, per effetto dell'agitazione termica si allontanano via via dalla posizione iniziale, esse possono definirsi come le più grosse particelle che restano unite nel movimento termico. In un corpo solido invece i moti termici consistono come è noto in vibrazioni attorno a posizioni medie di equilibrio; la nozione precedente viene perciò in questo caso a perdere ogni significato. Per i cristalli non è tuttavia difficile trovare una definizione soddisfacente. Teniamo presente perciò che in qualunque reticolato cristallino possono sempre trovarsi tre traslazioni non complanari tali che per effetto di ciascuna di esse il reticolato venga a ricoprirsì. Il complesso di tutti i punti che con una successione qualunque di tali traslazioni si deducono da solo punto assegnato è quel che si dice un reticolato semplice di Bravais. Esso non è altro dunque che il complesso delle intersezioni di tre famiglie di piani paralleli ed equidistanti, che non siano parallele a una stessa retta. Ma per la proprietà detta, che il cristallo si ricopra per ciascuna delle tre traslazioni fondamentali, esso verrà ad esser costituito da un certo numero di reticolati semplici. Chiameremo molecola il complesso degli atomi, i reticolati semplici dei quali costituiscono tutto il cristallo. Naturalmente in questo concetto resta ancora alquanto arbitrarietà, che può in parte togliersi, scegliendo la molecola con criterii di semplicità, ma in genere non si può eliminare completamente. Per esempio nel salgemma, che è fatto da un reticolato di cubi coi vertici occupati alternativamente da atomi di cloro e di sodio, per modo che ogni atomo di cloro è circondato da sei di sodio, e viceversa, si intenderà naturalmente la molecola costituita da un atomo di cloro e da uno dei sei atomi di sodio circostanti; manca però evidentemente ogni criterio per scegliere quali tra questi sei debba prendersi.

Da tutto questo risulta che il compito dell'analisi cristallina si divide naturalmente in due parti: la ricerca del reticolo semplice, ossia delle tre traslazioni fondamentali, e la ricerca della molecola, ossia di quel complesso di atomi che con le tre traslazioni fondamentali generano tutto il cristallo.

La risoluzione del primo problema è abbastanza facile; Bravais e Schönflies hanno infatti dimostrato che per ogni particolare simmetria cristallina esistono soltanto pochi tipi di reticolati semplici; precisamente indicando con a , b , c le lunghezze delle traslazioni fondamentali, e con \widehat{bc} , \widehat{ca} , \widehat{ab} gli angoli tra di esse compresi le caratteristiche di questi tipi sono date dalla seguente tabella:

| | Sistema cristallino |
|---|------------------------|
| 1 ^a Reticolato più generale | triclino. |
| 2 ^a $a = b \quad \widehat{ac} = \widehat{bc}$ } | monoclino. |
| 3 ^a $\widehat{ab} = \widehat{ac} = \frac{\pi}{2}$ } | |
| 4 ^a $a = b \quad \widehat{ac} = \widehat{bc} = \frac{\pi}{2}$ | } trimetrico. |
| 5 ^a id. con un punto nel centro di ogni parallelepipedo elementare | |
| 6 ^a $\widehat{ab} = \widehat{bc} = \widehat{ca} = \frac{\pi}{2}$ | |
| 7 ^a id. con un punto nel centro di ogni parallelepipedo elementare | |
| 8 ^a $a = b = c \quad \widehat{ab} = \widehat{bc} = \widehat{ca}$ | trigonale. |
| 9 ^a $a = b \quad \widehat{ab} = \frac{\pi}{6} \quad \widehat{ac} = \widehat{bc} = \frac{\pi}{2}$ | esagonale. |
| 10 ^a $a = b \quad \widehat{ab} = \widehat{bc} = \widehat{ca} = \frac{\pi}{2}$ | } dimetrico. |
| 11 ^a id. con un punto nel centro di ogni parallelepipedo elementare | |
| 12 ^a $a = b = c \quad \widehat{bc} = \widehat{cb} = \widehat{ca} = \frac{\pi}{2}$ | } monometrico. |
| 13 ^a id. con un punto nel centro di ogni cubo elementare | |
| 14 ^a come la 12 ^a con un punto nel centro di ogni faccia del cubo elementare | |

Data questa tabella la scelta è già limitata tra pochi casi possibili, una volta che dalla cristallografia già conosciamo il sistema al quale il cristallo in esame appartiene. Per decidere completamente basta la misura dei d di due o tre delle sue faccie.

Per esempio per il sistema monometrico ci troviamo nel caso 12, 13, 14 secondo che il rapporto dei d dei piani (010), (110) (111) è $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$, $1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \sqrt{3}$, $1 : \sqrt{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$; con tre misure spettrometriche si può dunque decidere la questione. Nel caso degli altri sistemi si procederebbe con criterii analoghi. Determinato così il reticolato fondamentale, che possiamo per esempio intender costituito coi centri di gravità delle molecole, resta ancora da risolvere il problema più difficile; precisamente quale sia la distribuzione degli

atomi attorno al centro della loro molecola. Per risolverla mancano criteri generali e bisogna volta per volta procedere con artifici speciali, tanto che finora non si è potuto riuscirvi che in un limitato numero di casi semplici. Per lo più la ricerca si conduce così: se il cristallo fosse costituito da un solo reticolato semplice tutti i piani reticolari paralleli sarebbero tra di loro eguali. Ciò non accadrà in genere più se il reticolato non è semplice ed una serie di piani paralleli sarà costituita da una successione di piani, diversi per densità e distanza tra di loro, ripetentesi con un certo periodo. Il primo punto da risolvere è di determinare le distanze intercedenti tra i piani di uno di questi periodi, e le densità dei varii piani. Questo primo problema può spesso risolversi con un metodo generale che andiamo ad illustrare in un caso particolare facilmente generalizzabile. Supporremo precisamente che il periodo della successione di piani che vogliamo analizzare sia costituito da due soli piani di densità K e K' . Se θ è l'angolo di incidenza si vede subito che la differenza di fase tra l'onda riflessa sul primo piano e quella riflessa sopra un piano a profondità p è $2\pi \frac{2p \cos \theta}{\lambda}$. Ora per i piani di densità K si ha $p = md$, (m intero), per quelli di densità K' , $p = md + \delta$ (d e δ rappresentano le distanze da un qualunque piano K , risp. del successivo piano K e del piano K' dello stesso periodo).

Per quanto si è visto a proposito della diffusione dei raggi questa è approssimativamente proporzionale alla densità del materiale diffondente. L'onda riflessa sul piano K avrà dunque ampiezza proporzionale alla parte reale di

$$\sqrt{K} e^{2\pi i \left(vt - \frac{2md \cos \theta}{\lambda} \right)}$$

quella riflessa nel piano K' a:

$$\sqrt{K'} e^{2\pi i \left(vt - \frac{2(md+\delta) \cos \theta}{\lambda} \right)}.$$

Se N è il numero degli strati l'ampiezza risultante è:

$$\left(\sqrt{K} + \sqrt{K'} e^{-2\pi i \frac{2\delta \cos \theta}{\lambda}} \right) e^{2\pi i vt} \sum_0^{N-1} e^{-2\pi i \frac{2nd \cos \theta}{\lambda}}$$

o calcolando la somma, come progressione geometrica:

$$\left(\sqrt{K} + \sqrt{K'} e^{-2\pi i \frac{2\delta \cos \theta}{\lambda}} \right) e^{2\pi i vt} \frac{1 - e^{-2\pi i \frac{2Nd \cos \theta}{\lambda}}}{1 - e^{-2\pi i \frac{2d \cos \theta}{\lambda}}}$$

e passando dall'ampiezza all'intensità col liberarsi dagli immaginari, si trova l'intensità proporzionale a:

$$(9) \quad \left\{ K + K' + 2\sqrt{KK'} \cos \frac{4\pi\delta \cos \theta}{\lambda} \right\} \frac{\sin^2 \frac{2\pi Nd \cos \theta}{\lambda}}{\sin^2 \frac{2\pi d \cos \theta}{\lambda}}.$$

Perché questa intensità sia considerevolmente grande occorre che il denominatore sia nullo, cioè che

$$n\lambda = 2d \cos \theta \quad (n = \text{intero})$$

che è la relazione di Bragg. Soddisfatta questa, l'intensità varia da ordine a ordine come il primo fattore di (9) che può ora scriversi:

$$(10) \quad K + K' + 2\sqrt{KK'} \cos 2\pi n \frac{\delta}{d}.$$

Basta dunque confrontare tra di loro le intensità dei vari ordini, fare cioè in (10) $n = 1, 2, 3 \dots$ per ricavare dal loro confronto i rapporti $\frac{K'}{K}$ e $\frac{\delta}{d}$. Si intende che in questa teoria semplicistica abbiamo trascurato l'irregolarità del cristallo e i moti termici. Queste cause, come altrove dicemmo provocano un regolare decremento di intensità col crescere dell'ordine dello spettro, e nel confronto delle intensità bisognerà naturalmente, prima di applicare le (10), aver riguardo a questo decremento, ciò che in pratica si fa moltiplicando, prima di confrontarle, le intensità quali si ottengono dalla misura diretta, per 1 il primo ordine, per 5 il secondo, per 14 il terzo ecc. Supponiamo per esempio che sia $K = K'$; $d = 2\delta$. Allora (10) si annulla per $n = 1, 3, 5 \dots$ Spariranno cioè gli spettri di ordine dispari. Questo caso si presenta per esempio nel KCl, i cui piani (010) sono costituiti da una successione di piani equidistanti alternativamente di K e di Cl che, siccome K e Cl hanno peso atomico quasi eguale, hanno presso a poco la stessa densità. In queste riflessioni restano assai indeboliti gli spettri d'ordine dispari. Se invece pure avendosi $K = K'$, si avesse $d = 4\delta$ le intensità dei successivi ordini starebbero tra di loro come:

$$\frac{1}{2} : 1 : \frac{1}{2} : 0 : \frac{1}{2} \dots$$

È evidente come il metodo esposto di analisi delle serie di piani sia, almeno teoricamente, applicabile anche quando i piani del periodo sono più di due. Si capisce però anche come in casi appena un po' complicati l'imprecisione stessa delle misure, e sopra tutto l'incertezza dovuta al naturale decremento di intensità di ordine in ordine, siano tali da renderne impossibile l'applicazione.

Una volta determinata al modo descritto la struttura del maggior numero di serie di piani, ciò che richiede naturalmente l'applicazione del metodo quantitativo della camera di ionizzazione, conviene procedere, puramente per tentativi, alla ricerca di un reticolato cristallino, col quale si spieghino le modalità di riflessione sopra le varie faccie. Questa ricerca, oltremodo penosa e difficile, non può naturalmente condursi a termine che in casi molto semplici, e fa meraviglia che si sia riusciti a determinare la struttura di cristalli di molecola alquanto complicata, come la calcite (Bragg).

È pur vero però che, nonostante numerosi sforzi restano ancora ignote le strutture di cristalli chimicamente assai semplici, quali il quarzo e lo zolfo.

Inoltre i metodi precedenti hanno l'inconveniente di non potersi applicare altro che a cristalli con facce di una certa estensione. Per l'analisi di

minerali a struttura micro o criptocristallina si applica perciò il metodo di Debye e Scherrer.

Naturalmente non si può in questo caso pensare ad una analisi troppo accurata, perché i vari elementi vengono dati troppo mescolati tra di loro; tuttavia si possono sempre ottenere dei dati interessanti per lo studio di qualche minerale. Inoltre questo metodo dà anche qualche risultato interessante nella metallografia, mostrando chiaramente il cambiamento della struttura di un metallo nel passaggio da crudo a ricotto. Si osserva infatti in generale che il metallo crudo dà luogo a fenomeni di diffrazione assai più intensi e marcati rivelando l'esistenza di particelle cristalline molto più grosse e numerose che non il metallo ricotto.

N° 7.

Formazione di immagini coi raggi Röntgen.

Per questo lavoro vedi la notizia premessa all'altro: *I raggi Röntgen*. Qui aggiungiamo che i tubi speciali coi quali Fermi sperimentò la formazione delle immagini, furono costruiti nell'Istituto di Fisica della Università di Pisa da Fermi, aiutato validamente dal meccanico dell'Istituto stesso, sig. Orfeo Di Nasso.

G. POLVANI.

This paper contains the results of Fermi's first experimental work, which he presented as a dissertation at the University of Pisa in the spring of 1922. The following comment describes his activities in the Physics Department of that university.

For those unfamiliar with the organization of Italian universities, it must be explained that a physics student at the termination of the second year attains a sufficient amount of knowledge in the general field of physics to gain him acceptance in the department under a status similar to that of a graduate student in an American university. Thereafter he follows advanced courses and undertakes research work, frequently in the field where he will later prepare a dissertation.

In the fall of 1920, three students, Enrico Fermi, Nello Carrara and Franco Rasetti were thus admitted to the Physics Department at Pisa. Owing to the recently terminated First World War, there were no older students enjoying a similar status, hence the three, aged 19, represented the entire "graduate" group at that time. Professor Luigi Puccianti, director of the Physics Laboratory, allowed them freedom of initiative to a degree seldom granted to students in Italy or elsewhere. They were allowed to use the research laboratories at all times, received keys to the library and instruments cabinets, and were given permission to try any experiment they wished with the apparatus contained therein. Carrara and Rasetti, who in the previous year had come to recognize Fermi's immense superiority in the knowledge of mathematics and physics, henceforth regarded him as their natural leader, looking to him rather than to the professors for instruction and guidance.

A few weeks were happily spent opening the instrument cabinets, guessing at the possible use of the apparatus, and sometimes trying simple experiments. It turned out that the laboratory was best equipped for research in spectroscopy, a field to which Professor Puccianti had brought important contributions. Some x-ray equipment was also available, although of the type designed for lecture demonstration rather than research.

Fermi, after much reading of the pertinent literature, decided that x-rays were the field that offered the best chance for original research, and suggested that all three learn some of the technique. The tubes available were of the gas-filled type and were operated by a large induction coil, using a spark gap as rectifier. The first task that Fermi set for the group was to produce a Laue photograph, and after several attempts and mishaps, one was obtained. Although the poor collimation of the beam and the imperfect orientation of the crystal had contributed to produce an unprepossessing Laue pattern, the three students were thrilled by the result.

It soon appeared that sealed-in tubes were not fit for research and the experimenters decided to build their own tubes. The glass part was made to specification by a glass blower, while the physicists had to seal windows and electrodes. No diffusion pumps were available, hence the tubes were evacuated by means of rotary mercury pumps of the Gaede type. Considerable time was spent before these tubes could be satisfactorily operated, but eventually the K radiations of several elements were obtained and observed by Bragg reflection.

Early in 1922 Fermi decided to undertake some original work with the x-ray technique he had been learning, in order to prepare a dissertation. Since at that time he had

already published or at least completed several important theoretical papers, it may be asked why he did not present a theoretical thesis. It must be explained that at the time in Italy theoretical physics was not recognized as a discipline to be taught in universities, and a dissertation in that field would have been shocking at least to the older members of the faculty. Physicists were essentially experimentalists, and only an experimental dissertation would have passed as physics. The nearest subject to theoretical physics, mechanics, was taught by mathematicians as a field of applied mathematics, with complete disregard for its physical implications. These circumstances explain why such topics as the quantum theory had gained no foothold in Italy: they represented a "no man's land" between physics and mathematics. Fermi was the first in the country to fill the gap.

However, there is not the slightest doubt in the writer's mind that Fermi's experimental activities in his third and fourth university years were not prompted by the convenience of presenting an acceptable dissertation. He obviously enjoyed experimental work as much as theoretical abstraction, and especially the alternation of the two types of activities. He was from the first a complete physicist for whom theory and experiment possessed equal weights, even though for many years his fame was chiefly based on the theoretical contributions. But he never for a moment was one of those theoreticians who, to use a joking expression later much in use among the Rome group, "could not tell steel from aluminum".

The present paper, as explained by Fermi in his introductory remarks, describes the experimental realization of a method suggested by Gouy for obtaining images with monochromatic x-rays by means of a curved crystal. Dardord (*) appears to have independently obtained similar results. Curved crystals had been used since the earliest times of x-ray spectroscopy as a substitute for rocking the crystal, but the experiments of Fermi and Dardord are the first where focusing was obtained. Curved-crystal focusing spectrometers acquired considerable importance in the following decades.

F. RASETTI.

7.

FORMAZIONE DI IMMAGINI COI RAGGI RÖNTGEN

«Nuovo Cimento», 25, 63-68, (1923).

I Raggi Röntgen non subiscono né rifrazioni né riflessioni, almeno nel senso ordinario di questa parola, poiché la riflessione di diffrazione avviene solo sotto angoli di incidenza determinati. Ne segue che nell'ottica dei raggi X il problema di ottenere immagini non può, come nell'ottica ordinaria, risolversi per mezzo di lenti o di specchi sferici.

Gouy (1) ha suggerito teoricamente un metodo per ottenere delle immagini monocromatiche con raggi X, per mezzo di un cilindro di mica. Esso è, in poche parole, il seguente:

Consideriamo un cilindro circolare di mica e supponiamo che in un punto del suo asse sia una sorgente S di raggi Röntgen monocromatici. Essi si rifletteranno sulla mica in quei punti per i quali è verificata la relazione di Bragg, che si trovano evidentemente sopra cerchi sezione del cilindro. Ed i raggi riflessi sopra uno di questi cerchi si riuniranno evidentemente in un punto I

(*) M. R. DARDORD, «*Jour. Physique et Radium*», 3, 218 (1922).

(1) C. R. GOUY, «*C. R.*», 161, 176 (1915).

dell'asse, simmetrico di S rispetto al piano del cerchio riflettente, dove si avrà un'immagine reale monocromatica di S.

Se S si trovasse nelle vicinanze dell'asse se ne formerebbe ancora un'immagine nelle vicinanze dell'asse ⁽²⁾. Supponiamo ora di avere in vicinanza dell'asse una figura piana da cui punti escano raggi X monocromatici, e di porre una lastra fotografica nella posizione dove se ne forma l'immagine.

Sia r la distanza specchio oggetto, R il raggio del cilindro di mica, θ l'angolo di incidenza di Bragg, r' la distanza immagine specchio. Se proiettiamo il tutto sopra un piano perpendicolare all'asse del cilindro di mica le proiezioni di r ed r' saranno $r \cos \theta$, $r' \cos \theta$; e quindi per le solite formule degli specchi sferici sarà

$$\frac{1}{r \cos \theta} + \frac{1}{r' \cos \theta} = \frac{2}{R},$$

da cui

$$r' = \frac{R r}{2 r \cos \theta - R}.$$

Il coefficiente lineare di ingrandimento dei segmenti perpendicolari ad r e all'asse del cilindro sarà:

$$(1) \quad \mu_1 = \frac{r'}{r} = \frac{R}{2 r \cos \theta - R}.$$

Se l'oggetto è in vicinanza dell'asse si ha dunque press'a poco $\mu_1 = 1$.

Per calcolare l'ingrandimento dei segmenti paralleli al piano dell'asse e di r indichiamo con φ e φ' gli angoli che le perpendicolari al piano dell'oggetto e della lastra fotografica formano rispettivamente con r , r' .

Si vede allora subito che l'ingrandimento cercato è:

$$(2) \quad \mu_2 = \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi}.$$

Supponiamo ora di fotografare una fenditura posta perpendicolarmente al piano di r e dell'asse con una lastra di mica piana di lunghezza l . Se h è la lunghezza della fenditura la lunghezza della sua immagine sarà $2l + h$. Se invece curviamo la mica in modo che l'immagine si formi in fuoco la lunghezza diventerà h . Le intensità delle due immagini staranno evidentemente press'a poco nel rapporto inverso delle loro lunghezze. Il loro rapporto è dunque

$$\frac{2l + h}{h}.$$

Se per esempio $h = 1$ cm. $l = 4$ cm. il rapporto è 9. L'intensità è dunque quasi decuplicata.

Descriverò ora il modo con cui mi è riuscito ottenere effettivamente queste immagini.

La sorgente dei raggi era costituita da un tubo della forma e dimensioni indicate press'a poco nella figura I.

Facevo il vuoto nel tubo con una pompa rotativa Cacciari, tipo Gaede. Il catodo K era concavo, di raggio di 6 o 7 cm. quando si desiderava concentrare il più possibile i raggi catodici sopra l'anticatodo; volendo invece

(2) Purché naturalmente, il cilindro sia limitato ad una regione sufficientemente piccola compresa tra due generatrici.

che tutta la superficie dell'anticatodo fosse colpita dai raggi, il catodo veniva fatto di raggio più piccolo. L'anticatodo era generalmente di ferro e qualche volta era tagliato quasi perpendicolarmente ai raggi catodici, per modo da poter fare a meno della fenditura. In altre esperienze invece era tagliato a becco di flauto, in modo da presentare una superficie estesa agli strumenti

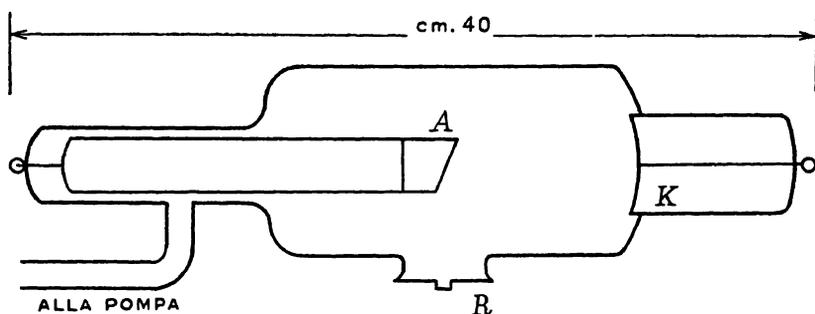


Fig. I.

di osservazione. Siccome le radiazioni caratteristiche del ferro sono considerevolmente assorbite dal vetro dell'ampolla trovai opportuno di fornire i tubi di una finestrella di alluminio R. Durante il funzionamento il tubo era mantenuto attaccato alla pompa, per modo che dopo un po' di tempo assumeva un regime abbastanza regolare. Il tubo era azionato da un grosso rocchetto di induzione con interruttore Wehnelt; nelle condizioni ordinarie la scintilla equivalente era di 10 o 12 cm.

Il tubo era racchiuso in una cassetta di legno foderata di piombo dello spessore di 6 mm dalla parte degli strumenti, e di 3 dalle altre parti.

Per ottenere delle immagini discretamente precise era necessario che la lastra di mica riflettente fosse il più possibile regolare. Essa veniva perciò accuratamente scelta tra molti campioni, e tuttavia non mi è mai riuscito di trovarne di quelle che, alla riflessione della luce, si mostrassero più regolari di un ordinario vetro da finestra. A questo fatto sono dovute le irregolarità e i baffi osservabili nelle immagini riportate. La mica veniva curvata legandola strettamente sopra un cilindro tornito di ottone. Sopra la parte convessa si stendeva poi uno strato di ceralacca spesso poco più di mezzo centimetro. Quando la ceralacca si era raffreddata si potevano togliere le legature e distaccare lo specchio dal cilindro. A questo modo mi è riuscito di ottenere degli specchi cilindrici relativamente precisi dato il limite imposto dalla naturale irregolarità delle lamine utilizzate. Essi avevano per lo più dimensioni di 4×6 cm. ma ordinariamente se ne limitava l'apertura riducendola a 4×2 per utilizzare le porzioni meno irregolari, che si giudicavano provando gli specchi alla riflessione della luce ordinaria. Lo specchio era montato su un cerchio graduato per poterlo mettere a posto. (L'angolo di cui si girava, per l'esame del 3° ordine della K_{α} del ferro era $16^{\circ} 50'$). La rivelazione dei raggi era fatta fotograficamente.

Eseguii dapprima alcune esperienze di orientamento con cristalli piani per accertare la natura dell'anticatodo e l'intensità delle riflessioni dei vari ordini. Risultò che veniva emessa la doppia K_{α} $K_{\alpha'}$ ($\lambda = 1,932; 1,928$) poco

risolubile nelle condizioni sperimentali in cui mi trovavo; la K_{β} ($\lambda = 1,748$). La K_{γ} era poco visibile per la scarsa intensità. Gli ordini più intensi erano il primo ed il terzo. Preferii lavorare sopra il terzo per non dover usare angoli di incidenza troppo vicini a 90° .

Esperimentai poi l'indicato metodo per ottenere immagini dapprima sopra l'anticatodo che funzionava anche da fenditura.

Le distanze anticatodo cristallo e cristallo immagine variavano tra 18 e 22 cm. La posa durava una diecina di minuti.

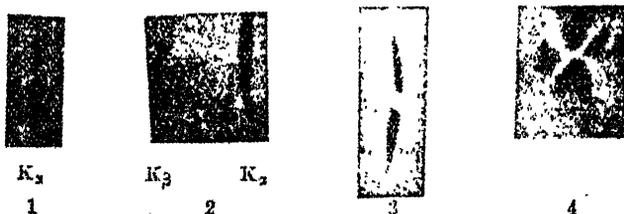


Fig. II, 1-4.

Potei subito constatare il fortissimo aumento di intensità che così si otteneva. Una grossolana idea di questo è data dalle figure II, 1 e II, 2 che rappresentano due fotografie del 3° ordine della K_{α} del ferro fatte press'ò poco nelle stesse condizioni di posa e di funzionamento del tubo, la prima con mica piana e la seconda con mica curva. L'aumento di intensità anzi, specialmente usando specchi di apertura di 6 cm. era tale che abituando qualche minuto l'occhio al buio della stanza si riusciva a vedere distintamente le immagini sopra uno schermo di platino-cianuro di bario. Dalla fig. II, 2 è chiaramente visibile che l'intensità di emissione della parte centrale dell'anticatodo, dove venivano concentrati i raggi catodici è notevolmente maggiore di quella delle parti laterali. Ciò si vede perché il metodo delle immagini permette una osservazione della fenditura «alla Lockyer», permette cioè di osservare punto per punto ciò che accade nella fenditura. Per mettere ciò meglio in chiaro feci la seguente esperienza: Misi davanti alla finestra d'alluminio del tubo un filo di piombo del diametro di circa 1 mm. e spostai la lastra fotografica in modo da portarla nel punto dove si formava l'immagine della finestra di alluminio.

La fig. II, 3 dà il risultato di questa esperienza; in essa è chiaramente visibile l'intervallo prodotto nell'immagine dal filo di piombo.

La fig. II, 4 rappresenta infine un tentativo di ottenere l'immagine di un oggetto a due dimensioni. L'anticatodo di ferro fu perciò tagliato a becco di flauto e vi furono fatti due solchi in croce nei quali furono incastrati due fili di rame in modo da formare una specie di X. Nella fig. II, 4 si vede l'immagine di questa X, naturalmente insieme a parecchie irregolarità dovute alla irregolarità del riflettore.

8.

RELAZIONE

letta dal Corrispondente G. ARMELLINI (relatore), a nome anche del Socio T. LEVI-CIVITA, nella seduta del 7 gennaio 1923, sulla Memoria del dott. ENRICO FERMI, intitolata: *Sul peso dei corpi elastici*.

L'Autore immagina un corpo elastico immerso in uno spazio euclideo in condizioni di riposo, cioè in modo che le sue tensioni interne siano tutte nulle.

Suppone poi che il corpo venga tolto dallo spazio euclideo ed immerso in uno spazio statico einsteiniano, la cui metrica è determinata dalla forma data dal prof. Levi-Civita

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - \sum g_{ik} dx_i dx_k,$$

dove le g sono funzioni delle sole x . L'Autore calcola quindi la variazione della energia specifica nell'intorno di un punto generico del corpo elastico quando esso passa dallo spazio euclideo allo spazio einsteiniano, e dimostra che ad essa corrisponde in generale una variazione del peso del corpo, variazione che non ha la direzione della gravità.

Poiché, però, i procedimenti adoperati sarebbero più adattati a dimostrare l'esistenza piuttosto che a calcolare l'ammontare di questa variazione di peso, l'Autore consacra il seguito della Memoria allo studio di due casi particolarmente semplici: quando cioè il corpo elastico sia una sfera od un cilindro circolare.

La condotta del lavoro rivela nell'Autore una completa padronanza dello strumento analitico. Non ostante che le formule generali - date nella prima parte della Memoria - fossero già state trovate dal Ricci, il quale però le ha soltanto esposte nelle sue lezioni all'Università di Padova senza mai pubblicarle, i relatori giudicano che il lavoro del dott. Fermi arreca un vero e sostanziale contributo all'argomento di cui tratta, e ne propongono quindi l'inserzione integrale negli Atti accademici.

SUL PESO DEI CORPI ELASTICI

« Mem. Lincei », Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, *14*, 114-124 (1923).

I. - FORMULE GENERALI.

Intendendo in questo lavoro considerare soltanto fenomeni statici, supporremo che nello spazio-tempo valga la metrica che corrisponde a questo caso⁽¹⁾; che sia cioè

$$(1) \quad ds^2 = g_{\infty} dt^2 - \sum_{i,k=1}^3 \gamma_{ik} dx_i dx_k,$$

dove g_{∞} e le γ_{ik} sono funzioni solamente delle coordinate di spazio x_1, x_2, x_3 . Consideriamo ora un corpo elastico che possa distendersi in uno spazio euclideo in posizione di riposo, in modo cioè che siano nulle tutte le tensioni elastiche tra le sue parti. Se lo spazio S di metrica

$$(2) \quad d\sigma^2 = \sum_{i,k} \gamma_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

fosse euclideo, potremmo in ∞^6 modi distendere in esso il nostro corpo in posizione di riposo. Siccome però ciò in generale non sarà, accadrà generalmente che nel nostro corpo, quando è immerso nello spazio S , avranno luogo delle tensioni elastiche; e l'energia di queste tensioni varierà generalmente spostando il corpo. Ne segue che il peso del nostro corpo, oltre che alla parte dovuta al peso della sua eventuale massa materiale ed al peso della sua energia elastica, conterà ancora di un'altra parte dovuta alle variazioni di energia elastica ora accennate. Lo scopo di questo lavoro è appunto di calcolare quale sia questo peso addizionale. Faremo l'ipotesi che lo spazio S sia quasi euclideo, nella quale non è contenuto altro se non la limitazione che si fa sempre nella teoria dell'elasticità, che le deformazioni del corpo elastico siano molto piccole.

Pensiamo per un momento il nostro corpo elastico disteso in uno spazio euclideo ed indichiamo con u_1, u_2, u_3 delle coordinate cartesiane ortogonali in questo spazio. Quando il corpo si trova immerso nello spazio S , x_1, x_2, x_3 verranno ad essere funzioni di u_1, u_2, u_3 per modo che l'elemento metrico di S potrà anche esprimersi, per le u ,

$$(3) \quad d\sigma^2 = \sum_{i,k} a_{ik} du_i du_k,$$

essendo naturalmente

$$(4) \quad a_{ik} = \sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial u_i} \frac{\partial x_s}{\partial u_k}.$$

(1) T. LEVI-CIVITA, « Rendiconti Accademia Lincei », serie 5^a, vol. XXVI (1917).

Indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ le tre dilatazioni principali relative ad una particella del corpo. L'energia elastica specifica circostante alla particella sarà, come è noto,

$$(5) \quad W_0 = 4A (S\alpha_1)^2 - 4B S\alpha_2 \alpha_3,$$

indicandosi con S la somma eseguita circolando sugli indici $(1, 2, 3)$ ed essendo A e B costanti di elasticità che si esprimono per mezzo del modulo di elasticità E e del coefficiente σ di Poisson con le formule

$$(6) \quad A = \frac{E(1-\sigma)}{8(1+\sigma)(1-2\sigma)} \quad ; \quad B = \frac{E}{4(1+\sigma)}.$$

Ora le solite considerazioni di cinematica dei mezzi continui mostrano che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, sono le radici dell'equazione.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - (1+x)^2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - (1+x)^2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - (1+x)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

E quindi, per le note relazioni tra coefficienti e radici, si ha

$$(7) \quad \begin{cases} S(1 + \alpha_1)^2 = S a_{11} \\ S(1 + \alpha_2)^2 (1 + \alpha_3)^2 = S \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Indicando al solito con ϵ_{ik} , i oppure o , secondo che $i = k$ oppure $i \neq k$, si avrà, per le ipotesi fatte, $a_{ik} = \epsilon_{ik} + \beta_{ik}$, essendo le β_{ik} piccolissime. Dalle (7) si ha allora.

$$\begin{aligned} 2S\alpha_1 + S\alpha_1^2 &= S\beta_{11} \\ S(1 + \alpha_2)^2 (1 + \alpha_3)^2 &= 3 + 2S\beta_{11} + S \begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

da cui, essendo, sempre per le ipotesi fatte, le α molto piccole, si ricava approssimativamente

$$(8) \quad S\alpha_1 = \frac{1}{2} S\beta_{11} \quad ; \quad S\alpha_2 \alpha_3 = \frac{1}{4} S \begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix},$$

e quindi (5)

$$(9) \quad W_0 = A (S\beta_{11})^2 - BS \begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}.$$

Siccome nei nostri calcoli ci serviremo del principio di Hamilton, occorre che troviamo la variazione di W_0 , quando variano le x_i , considerate come funzioni delle u_i ; da (9) si ha:

$$(10) \quad \begin{aligned} \delta W_0 &= 2A (S\beta_{11}) S \delta \beta_{11} - BS (\beta_{22} \delta \beta_{33} + \beta_{33} \delta \beta_{22} - 2\beta_{23} \delta \beta_{23}) \\ &= S [\delta \beta_{11} \{2A\beta_{11} + (2A - B)(\beta_{22} + \beta_{33})\} + 2B\beta_{23} \delta \beta_{23}]. \end{aligned}$$

Si ha poi da (4)

$$\delta \beta_{ik} = \delta a_{ik} = \sum_{rst} \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_t} \delta x_t \frac{\partial x_r}{\partial u_i} \frac{\partial x_s}{\partial u_k} + 2 \sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial u_i} \frac{\partial \delta x_s}{\partial u_k}.$$

Per aver formule più semplici, possiamo prender le coordinate x coincidenti con le u , e la formula precedente diventa

$$(11) \quad \delta\beta_{ik} = \sum_i \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_i} \delta x_i + 2 \sum_s \gamma_{is} \frac{\partial \delta x_s}{\partial u_k}.$$

Come espressione dell'azione possiamo prendere

$$(12) \quad W = \iiint W_0 \sqrt{g_{\infty}} d\tau dt + \iiint k \sqrt{g_{\infty}} d\tau dt + \iiint \sum_i F_i x_i dt d\tau,$$

nella quale il primo termine dà l'azione elastica; il secondo l'azione delle masse materiali di densità k ; $d\tau$ è l'elemento di volume dello spazio; l'ultimo termine rappresenta infine l'azione di una forza esterna di componenti F_1, F_2, F_3 adatta a sostenere il corpo perchè non cada: forza che dunque altro non è se non l'eguale e contraria del peso del corpo. La variazione di W può ora immediatamente effettuarsi e siccome il principio di Hamilton richiede che sia $\delta W = 0$, troviamo l'equazione

$$\begin{aligned} & \iiint \sum_i F_i \delta x_i d\tau dt + \iiint k \sum_i \frac{\partial \sqrt{g_{\infty}}}{\partial x_i} \delta x_i d\tau dt \\ & + \iiint \left(W_0 \sum_i \frac{\partial \sqrt{g_{\infty}}}{\partial x_i} \delta x_i + \delta W_0 \sqrt{g_{\infty}} \right) dt d\tau = 0. \end{aligned}$$

In δW_0 , come risulta dalle (10) (11), sono contenute, oltre ai δx_i , anche le loro derivate, che però possono subito eliminarsi con una integrazione per parti. Siccome poi possiamo per esempio supporre le F_i costanti, annullando i coefficienti dei δx_i , troviamo delle equazioni adatte a determinarci la posizione del corpo, ossia, ciò che è equivalente, le β_{ik} . Fatto questo, restano ancora da determinare le F_i , cioè le componenti del peso del corpo. E questo si fa ora facilmente, supponendo le δx costanti. Si trova infatti, da (10) (11),

$$\delta\beta_{ik} = \sum_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} \delta x_i;$$

e quindi

$$(13) \quad \delta W_0 = \sum_i K_i \delta x_i,$$

avendo per brevità posto

$$(14) \quad K_i = S \left[\frac{\partial \beta_{11}}{\partial u_i} \{ 2A\beta_{11} + (2A - B)(\beta_{22} + \beta_{33}) \} + 2B\beta_{23} \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_i} \right].$$

Il principio di Hamilton ci dà dunque, annullando i coefficienti dei δx_i ,

$$(15) \quad \int F_i d\tau + \int (k + W_0) \frac{\partial \sqrt{g_{\infty}}}{\partial x_i} d\tau + \int K_i \sqrt{g_{\infty}} d\tau = 0.$$

Dalla quale risulta che il peso è:

$$\int (k + W_0) \frac{\partial \sqrt{g_{\infty}}}{\partial x_i} d\tau + \int K_i \sqrt{g_{\infty}} d\tau.$$

Esso consta dunque di due parti: la prima non è altro se non il peso delle masse materiali e dell'energia elastica, ed ha la direzione della gravità; la seconda, di componenti $\int K_i \sqrt{g_{\infty}} d\tau$, ha in generale direzione diversa ed è dovuta

alla ragione accennata al principio di questa Nota. Essa può in particolare esser diversa da zero anche quando g_{∞} è costante, ossia quando non c'è forza di gravità nel senso ordinario.

2. - CASO DI UN CILINDRO CON LE GENERATRICI PARALLELE ALL'ASSE z .

Il metodo dato ora per calcolare questo peso addizionale è però, per lo più, inapplicabile perchè richiede la risoluzione di un complicato problema di teoria dell'elasticità. Mi propongo di mostrare, con due esempi particolarmente semplici, come in qualche caso si possa giungere a calcolare effettivamente questo peso addizionale dei corpi elastici. Supporremo, nel primo esempio, che il ds^2 dello spazio tempo sia

$$(16) \quad ds^2 = g_{\infty} dt^2 - dz^2 - E dx^2 - 2 F dx dy - G dy^2,$$

essendo g_{∞} , E , F , G funzioni soltanto di x e di y . Supporremo poi che il nostro corpo elastico sia costituito da un cilindro con le generatrici parallele all'asse z e che, disteso in posizione di riposo in uno spazio euclideo, abbia sezione circolare di raggio piccolo in confronto al raggio di curvatura della forma quadratica $E dx^2 + 2 F dx dy + G dy^2$. Quanto alle proprietà elastiche del nostro corpo, possiamo press'a poco indifferentemente supporre o che sia isotropo, ma di forma tanto allungata chesia trascurabile l'influenza degli estremi oppure che abbia lunghezza qualunque, ma sia costituito come da fibre rigide parallele all'asse. Siccome questa seconda ipotesi conduce a calcoli un po' più semplici della prima, ci atterremo ad essa.

Sia H la curvatura della forma quadratica $E dx^2 + 2 F dx dy + G dy^2$. Noi supporremo che H e g_{∞} non varino sensibilmente entro il nostro corpo, di modo che esso continuerà ad aver forma di cilindro circolare. Indichiamo con r la distanza di una particella generica del cilindro dall'asse, quando il cilindro è in posizione di riposo in uno spazio euclideo, e con $r + \varepsilon$ la sua distanza dall'asse quando il cilindro è immerso nel nostro spazio non euclideo. La lunghezza del cerchio col centro sull'asse passante per la nostra particella era $2\pi r$; ed ora, se lo spazio fosse euclideo, sarebbe $2\pi(r + \varepsilon)$. Siccome però ciò non è, la lunghezza di quel cerchio risulta, con la nostra approssimazione, $2\pi(r + \varepsilon)\left(1 - \frac{Hr^2}{6}\right)$, di modo che gli allungamenti della nostra particella in direzione radiale e trasversale sono rispettivamente, trascurando nella nostra approssimazione il prodotto εH ,

$$\frac{d\varepsilon}{dr} \quad ; \quad \frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6}.$$

L'energia elastica specifica nell'intorno della nostra particella è dunque

$$(17) \quad W_0 = 4A \left\{ \left(\frac{d\varepsilon}{dr} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right)^2 \right\} + 4B \frac{d\varepsilon}{dr} \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right),$$

essendo A e B costanti di elasticità legate al modulo di elasticità E ed al coefficiente di contrazione σ (naturalmente considerati nel piano perpendi-

colare alle fibre) dalle relazioni

$$(18) \quad A = \frac{E}{8(1-\sigma^2)}, \quad B = \frac{\sigma E}{4(1-\sigma^2)}.$$

Supponiamo che il nostro cilindro abbia altezza 1; allora l'energia corrispondente allo strato compreso tra i due cilindri coassiali di raggio r ed $r + dr$ è $2\pi r W_0 dr$. Sia R il raggio del cilindro: l'energia totale sarà allora

$$2\pi \int_0^R r W_0 dr,$$

cioè

$$8\pi \int_0^R r dr \left[A \left\{ \left(\frac{d\varepsilon}{dr} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right)^2 \right\} + B \frac{d\varepsilon}{dr} \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right) \right].$$

Per l'equilibrio elastico dobbiamo determinare ε in funzione di r per modo che l'espressione precedente sia un minimo.

Abbiamo perciò, con le solite regole del calcolo delle variazioni, l'equazione differenziale

$$2A \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right) + B \frac{d\varepsilon}{dr} = \frac{d}{dr} \left\{ 2A \frac{d\varepsilon}{dr} r + B \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right) r \right\}$$

con le condizioni ai limiti

$$\text{per } r = 0 \quad \varepsilon = 0$$

$$\text{per } r = R \quad 2A \frac{d\varepsilon}{dr} + B \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right) = 0.$$

Queste condizioni sono sufficienti a determinare ε in funzione di r , e ci forniscono precisamente

$$(19) \quad \varepsilon = \frac{(2A - B)HR^2}{32A} r - \frac{(2A - 3B)H}{32A} r^3.$$

Ci conviene ora sostituire questa espressione di ε nell'espressione dell'energia totale. Dopo qualche calcolo un po' laborioso, ma assolutamente privo di difficoltà si trova così per l'energia totale l'espressione:

$$\frac{\pi H^2 R^6}{3456 A^2} [224 A^3 - 108 A^2 B + 72 AB^2 + 27 B^3];$$

o, ponendo

$$(20) \quad M = \frac{\pi}{3456 A^2} [224 A^3 - 108 A^2 B + 72 AB^2 + 27 B^3],$$

otteniamo finalmente come energia totale

$$MH^2 R^6.$$

Ed M è una costante che dipende esclusivamente dalle costanti elastiche del nostro corpo.

Indichiamo ora con m la massa totale del nostro cilindro e con F_x, F_y, F_z la tre componenti della equilibrante del peso. Per il principio di Hamilton, come prima, dovrà essere nulla la variazione dell'espressione

$$\sqrt{g_\infty} (m + MH^2 R^6) + F_x x + F_y y + F_z z.$$

Ora, tale variazione è

$$\left(\delta x \frac{\partial \sqrt{g_{\infty}}}{\partial x} + \delta y \frac{\partial \sqrt{g_{\infty}}}{\partial y} \right) (m + MH^2 R^6) + 2\sqrt{g_{\infty}} MHR^6 \left(\frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial y} \delta y \right) + F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z,$$

poichè g_{∞} e H sono soltanto funzioni di x e di y .

Annullando i coefficienti di δx , δy , δz , troviamo ora

$$(21) \quad \begin{cases} F_x + \frac{\partial \sqrt{g_{\infty}}}{\partial x} (m + MH^2 R^6) + 2\sqrt{g_{\infty}} MHR^6 \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ F_y + \frac{\partial \sqrt{g_{\infty}}}{\partial y} (m + MH^2 R^6) + 2\sqrt{g_{\infty}} MHR^6 \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ F_z = 0. \end{cases}$$

Supponiamo, per comodità, che in vicinanza del nostro corpo la velocità della luce sia 1, cioè $g_{\infty} = 1$.

Allora $\frac{\partial \sqrt{g_{\infty}}}{\partial x}$, $\frac{\partial \sqrt{g_{\infty}}}{\partial y}$ non sono altro se non le componenti G_x e G_y dell'accelerazione di gravità. Risulta allora che le componenti del peso del nostro corpo sono

$$G_x (m + MH^2 R^6) + MR^6 \frac{\partial H^2}{\partial x}$$

$$G_y (m + MH^2 R^6) + MR^6 \frac{\partial H^2}{\partial y}$$

o

ossia, con scrittura vettoriale, che il suo peso è

$$(22) \quad \mathbf{P} = \mathbf{G} (m + MH^2 R^6) + MR^6 \text{grad} (H^2).$$

Esso consta dunque di due parti bene distinte. La prima non è altro se non il peso ordinario della massa e dell'energia elastica ed ha la direzione dell'accelerazione di gravità \mathbf{G} . La seconda, dovuta invece alle deviazioni dell'euclideanità del solo spazio, ha in generale direzione diversa dalla prima, determinata soltanto dalla curvatura H . Essa può dunque esistere anche quando la prima non esista: cioè un corpo elastico può pesare anche in un campo in cui non vi sia accelerazione di gravità propriamente detta.

3. - CASO DI UNA SFERA ISOTROPA.

Il secondo esempio è il seguente: calcolare il peso di una sfera elastica isotropa di dimensioni molto piccole rispetto ai raggi di curvatura dello spazio. Anche ora conviene naturalmente cercare prima l'energia totale elastica della nostra sfera.

Consideriamo perciò, accanto allo spazio S di metrica (2), anche uno spazio euclideo S' e supponiamo che la nostra sfera successivamente sia distesa in posizione di riposo in S' ; e poi posta in S .

Riferiamo lo spazio S' a coordinate cartesiane ortogonali (ξ, η, ζ) con centro nel centro della sfera. Siccome poi tra i punti di S e di S' vi è corrispondenza biunivoca (facendo corrispondere quelle coppie di punti che sono occupate dalla medesima particella della sfera elastica), potremo riferire anche lo spazio S alle coordinate ξ, η, ζ . Osserviamo poi che, per la approssimazione introdotta, alle tre direzioni principali ortogonali di curvatura dello spazio S , relative al centro della sfera, corrisponderanno in S' tre direzioni, pure ortogonali, che potremo prendere per direzioni degli assi coordinati. L'elemento metrico di S sia ora riferito al nuovo sistema

$$(23) \quad ds^2 = (1 + \beta_{11}) d\xi^2 + (1 + \beta_{22}) d\eta^2 + (1 + \beta_{33}) d\zeta^2 \\ + 2\beta_{23} d\eta d\zeta + 2\beta_{31} d\zeta d\xi + 2\beta_{12} d\xi d\eta$$

dove le β saranno molto piccole. Possiamo svilupparle in serie delle ξ, η, ζ , fermandoci ai termini quadratici. Osserviamo poi che, per le ipotesi fatte, mancheranno in questo sviluppo i termini lineari (se vi fossero, infatti, essi permetterebbero di distinguere un senso dall'opposto), e nei termini quadratici mancheranno quelli rettangolari (se vi fossero, infatti, la quadrica ottenuta eguagliando questo termine quadratico a una costante avrebbe il triedro principale non coincidente col triedro principale di curvatura, ciò che è contro la simmetria). Inoltre in $\beta_{23}, \beta_{31}, \beta_{12}$ mancherà anche il termine costante, perchè, per $\xi = \eta = \zeta = 0$, deve essere $\beta_{23} = \beta_{31} = \beta_{12} = 0$. Così che, in ultima analisi, il nostro sviluppo sarà

$$(24) \quad \begin{cases} \beta_{11} = \gamma_{11} + p_{11} \xi^2 + q_{11} \eta^2 + r_{11} \zeta^2 \\ \beta_{23} = p_{23} \xi^2 + q_{23} \eta^2 + r_{23} \zeta^2 \end{cases}$$

e le analoghe circolando sugli indici. Le γ, p, q, r sono costanti.

Ora la (9) ci permette di calcolare l'energia specifica W_0 , e si trova

$$W_0 = G + SL_x \xi^2 + SP_x \xi^4 + S\pi_x \eta^2 \zeta^2,$$

essendo le G, L, P, π costanti formate con le γ, p, q, r . L'energia totale sarà $W = \int_{\tau} W_0 d\tau$, esteso a tutto il volume della sfera.

Ora si ha

$$\int_{\tau} d\tau = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \int_{\tau} \xi^2 d\tau = \frac{4}{15} \pi R^5; \quad \int_{\tau} \xi^4 d\tau = \frac{4}{35} \pi R^7; \quad \int_{\tau} \eta^2 \xi^2 d\tau = \frac{4}{105} \pi R^7;$$

di modo che l'energia totale risulta

$$W = \frac{4}{3} \pi R^3 G + \frac{4}{15} \pi R^5 SL_x + \frac{4}{35} \pi R^7 SP_x + \frac{4}{105} \pi R^7 S\pi_x.$$

Dalla (9) e dalla (24) si trova poi, effettuando i calcoli, che

$$G = AS \gamma_{11}^2 + (2A - B) S \gamma_{22} \gamma_{33},$$

$$SL_x = 2AS \gamma_{11} (p_{11} + q_{11} + r_{11})$$

$$+ (2A - B) S \{ \gamma_{22} (p_{33} + q_{33} + r_{33}) + \gamma_{33} (p_{22} + q_{22} + r_{22}) \},$$

$$SP_x = AS(p_{11}^2 + q_{11}^2 + r_{11}^2) + (2A - B)S(p_{22}p_{33} + q_{22}q_{33} + r_{22}r_{33}) \\ + B(p_{23}^2 + q_{23}^2 + r_{23}^2),$$

$$S\pi_x = 2AS(q_{11}r_{11} + r_{11}p_{11} + p_{11}q_{11}) + (2AB)S(q_{22}r_{33} + q_{33}r_{22} + r_{22}p_{33} \\ + r_{33}p_{22} + p_{22}q_{33} + p_{33}q_{22}) + 2BS(q_{23}r_{23} + r_{23}p_{23} + p_{23}q_{23}).$$

Sostituendo queste espressioni in (25) si trova W espresso per le γ , p , q , r . Ora per l'equilibrio bisogna determinare γ , p , q , r in modo che W sia minimo. Le γ , p , q , r son però soggette anche alla condizione che le curvatures dello spazio abbiano il valore che debbono avere. Ora da (23) (24) risulta subito

$$(26) \quad (23, 23) = -r_{22} - q_{33}; \quad (31, 31) = -p_{33} - r_{11}; \quad (12, 12) = -q_{11} - p_{22}.$$

La determinazione delle γ , p , q , r si può fare ora col metodo dei coefficienti indeterminati a_1 , a_2 , a_3 , perchè, dato che le β_{ik} sono piccolissime, si può intendere che (23, 23) (31, 31) (12, 12) siano le tre curvatures principali. Si trova, con un calcolo un po' laborioso ma privo di ogni difficoltà

$$(27) \quad \delta \left(\frac{W}{4\pi R^3} - Sa_x [(23, 23) + r_{22} + q_{33}] \right) \\ = S\delta\gamma_{11} \left[\frac{2A}{3} \gamma_{11} + \frac{2A-B}{3} (\gamma_{22} + \gamma_{33}) + \frac{2AR^2}{15} (p_{11} + q_{11} + r_{11}) \right. \\ \left. + \frac{(2A-B)R^2}{15} (p_{33} + q_{33} + r_{33} + p_{22} + q_{22} + r_{22}) \right] \\ + S\delta p_{11} \left[\frac{2AR^2}{15} \gamma_{11} + \frac{(2A-B)R^2}{15} (\gamma_{22} + \gamma_{33}) + \frac{2AR^4}{105} (3p_{11} + r_{11} + q_{11}) \right. \\ \left. + \frac{(2A-B)R^4}{105} (3p_{33} + r_{33} + q_{33} + 3p_{22} + r_{22} + q_{22}) \right] \\ + S\delta q_{11} \left[\frac{2AR^2}{15} \gamma_{11} + \frac{(2A-B)R^2}{15} (\gamma_{22} + \gamma_{33}) + \frac{2AR^4}{105} (3q_{11} + r_{11} + p_{11}) \right. \\ \left. + \frac{(2A-B)R^4}{105} (3q_{33} + r_{33} + p_{33} + 3q_{22} + r_{22} + p_{22}) - a_3 \right] \\ + S\delta r_{11} \left[\frac{2AR^2}{15} \gamma_{11} + \frac{(2A-B)R^2}{15} (\gamma_{22} + \gamma_{33}) + \frac{2AR^4}{105} (3r_{11} + p_{11} + q_{11}) \right. \\ \left. + \frac{(2A-B)R^4}{105} (3r_{33} + p_{33} + q_{33} + 3r_{22} + p_{22} + q_{22}) - a_2 \right] \\ + \frac{2BR^4}{105} S [\delta p_{23} (3p_{23} + q_{23} + r_{23}) + \delta q_{23} (3q_{23} + r_{23} + p_{23}) \\ + \delta r_{23} (3r_{23} + p_{23} + q_{23})] = 0.$$

Dobbiamo ora annullare tutti i coefficienti dei $\delta\gamma$, δp , δq , δr ; e alle equazioni, così ottenute, aggiungere le (26). Otteniamo così 24 equazioni lineari ed omogenee tra le 24 incognite γ , p , q , r , a .

Dalle 3 che si ottengono annullando i coefficienti di δp_{23} , δq_{23} , δr_{23} si ricava intanto $p_{23} = q_{23} = r_{23} = 0$, da cui $\beta_{23} = 0$ ed analogamente $\beta_{31} = \beta_{12} = 0$.

Per determinar le rimanenti 15 incognite, poniamo

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{R^2} S_1 = p_{11} + q_{11} + r_{11} \\ \frac{2 A \gamma_{11} + (2 A - B) (\gamma_{22} + \gamma_{33})}{R^2} = C_1 \\ 3 p_{11} + r_{11} + q_{11} = P_1 \frac{7}{R^2} \\ \alpha_1 = a_1 \frac{15}{R^2} \end{array} \right.$$

Le equazioni che si ottengono annullando le rimanenti variazioni sono

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 + 2 A S_1 + (2 A - B) (S_2 + S_3) = 0 \\ C_1 + 2 A P_1 + (2 A - B) (P_2 + P_3) = 0 \\ C_1 + 2 A Q_1 + (2 A - B) (Q_2 + Q_3) = \alpha_3 \\ C_1 + 2 A R_1 + (2 A - B) (R_2 + R_3) = \alpha_2 \end{array} \right.$$

e le analoghe. Per determinare da queste le S , P , Q , R , in funzione delle C , α , si trovano sempre sistemi del tipo

$$\begin{aligned} 2 A x + (2 A - B) (y + z) &= X \\ 2 A y + (2 A - B) (z + x) &= Y \\ 2 A z + (2 A - B) (x + y) &= Z \end{aligned}$$

che ha per soluzione

$$\begin{aligned} x &= M X + N (Y + Z) \\ y &= M Y + N (Z + X) \\ z &= M Z + N (X + Y) \end{aligned}$$

avendo posto

$$(30) \quad M = \frac{4 A - B}{6 A B - 2 B^2} \quad ; \quad N = \frac{-2 A + B}{6 A B - 2 B^2} .$$

Si ottiene così

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} -S_1 = M C_1 + N (C_2 + C_3) \\ -P_1 = M C_1 + N (C_2 + C_3 - \alpha_2 - \alpha_3) \\ -Q_1 = M (C_1 - \alpha_3) + N (C_2 + C_3 - \alpha_2) \\ -R_1 = M (C_1 - \alpha_2) + N (C_2 + C_3 - \alpha_3) \end{array} \right.$$

e analoghe.

D'altra parte, dalle posizioni (28) risulta subito $5 S_1 = 7 (P_1 + Q_1 + R_1)$ e quindi (31)

$$(32) \quad M C_1 + N (C_2 + C_3) = \frac{7}{8} N \alpha_1 + \frac{7}{16} (M + N) (\alpha_2 + \alpha_3)$$

e, sostituendo nelle (31) queste espressioni, si hanno le S , P , Q , R , espresse per le α . D'altra parte, dalle (28) si ha

$$r_{22} = \frac{1}{2 R^2} (7 R_2 - 5 S_2)$$

e le 8 analoghe. Mettendo, poi al posto delle α_i , $\frac{15}{R^2} a_i$, troviamo infine

$$(33) \quad \begin{cases} p_{11} = \frac{105}{16 R^4} [-2 N a_1 + (7 N - M) (a_2 + a_3)] \\ q_{11} = \frac{105}{16 R^4} [6 N a_1 - (M + N) a_2 + (7 M - N) a_3] \\ r_{11} = \frac{105}{16 R^4} [6 N a_1 + (7 M - N) a_2 - (M + N) a_3] \end{cases}$$

e analoghe.

Sostituendo questi valori nelle (26), troviamo

$$(34) \quad \begin{cases} -\frac{16 R^4}{105} (23, 23) = 2 (7 M - N) a_1 + (5 N - M) (a_2 + a_3) \\ -\frac{16 R^4}{105} (31, 31) = 2 (7 M - N) a_2 + (5 N - M) (a_3 + a_1) \\ -\frac{16 R^4}{105} (12, 12) = 2 (7 M - N) a_3 + (5 N - M) (a_1 + a_2). \end{cases}$$

Da queste tre equazioni si possono ricavare a_1, a_2, a_3 , e, sostituendo i valori così ottenuti in (33) si otterrebbero le incognite cercate. Esse poi dovrebbero sostituirsi nell'espressione (25) di W , e così si otterrebbe l'energia elastica cercata. Possiamo abbreviare questo calcolo osservando che W è funzione omogenea di secondo grado delle γ, ρ, q, r , e che quindi, per il teorema di Eulero, si ha

$$2 W = \Sigma \gamma \frac{\partial W}{\partial \gamma} + \Sigma \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} + \Sigma q \frac{\partial W}{\partial q} + \Sigma r \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Ma dalla (27) risulta che tutte le derivate parziali di W sono zero, tranne quelle rapporto a $q_{11}, r_{11}, r_{22}, \rho_{22}, \rho_{33}, q_{33}$ che, a meno del fattore $4 \pi R^3$, sono eguali ad $a_3, a_2, a_1, a_3, a_2, a_1$; abbiamo dunque

$$W = 2 \pi R^3 (a_3 q_{11} + a_2 r_{11} + a_1 r_{22} + a_3 \rho_{22} + a_2 \rho_{33} + a_1 q_{33})$$

e, introducendo i valori (33)

$$W = \frac{105 \pi}{4 R} [(5 N - M) S a_2 a_3 + (7 M - N) S a_1^2].$$

Basta ora ricavare dalle (34) i valori delle a e sostituirli qui dentro, per trovare successivamente

$$a_1 = \frac{4 R^4}{105 (15 M - 7 N) (3 M + 2 N)} [-(13 M + 3 N) (23, 23) + (5 N - M) \{(31, 31) + (12, 12)\}],$$

$$S a_1^2 = \frac{16 R^8}{105^2 (15 M - 7 N)^2 (3 M + 2 N)^2} [(171 M^2 + 58 M N + 59 N^2) S (23, 23)^2 + 2 (27 M^2 - 134 M N + 31 N^2) S (31, 31) (12, 12)],$$

$$S a_2 a_3 = \frac{16 R^3}{105^2 (15 M - 7 N)^2 (3 M + 2 N)^2} [(27 M^2 - 134 M N + 31 N^2) S(23, 23)^2 + (198 M^2 - 76 M N + 54 N^2) S(31, 31)(12, 12)],$$

$$W = \frac{4 \pi R^7}{105 (15 M - 7 N)^2 (3 M + 2 N)^2} [(1170 M^3 + 504 M^2 N - 346 M N^2 + 96 N^3) \cdot S(23, 23)^2 + (180 M^3 - 864 M^2 N + 268 M N^2 + 269 N^3) S(31, 31)(12, 12)],$$

Ci conviene trasformare ancora un momento questa espressione in modo da farvi figurare elementi invarianti.

Introduciamo perciò il tensore controvariante α^{ik} di Ricci, in luogo dei simboli di Riemann; osservando che nella (23) le β_{ik} sono piccolissime, si vede che praticamente si avrà

$$S(23, 23)^2 = \sum_{ik} \alpha^{ik} \alpha_{ik},$$

$$S(31, 31)(12, 12) = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_i \alpha_i^i \right)^2 - S \alpha^{ik} \alpha_{ik} \right].$$

Troviamo così, infine

$$(35) \quad W = R^7 \left[\mu \sum_{ik} \alpha^{ik} \alpha_{ik} + \nu \left(\sum_i \alpha_i^i \right)^2 \right]$$

dove si è posto

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{2 \pi (2160 M^3 + 1872 M^2 N - 960 M N^2 - 77 N^3)}{105 (15 M - 7 N)^2 (3 M + 2 N)^2} \\ \nu = \frac{2 \pi (180 M^3 - 864 M^2 N + 268 M N^2 + 269 N^3)}{105 (15 M - 7 N)^2 (3 M + 2 N)^2} \end{array} \right.$$

Se, come in molti metalli, fosse $\sigma = 1/3$. si troverebbe

$$\mu = \pi E \frac{38669}{9274720} \quad \nu = \pi E \frac{13171}{9274720}.$$

Per calcolare il peso, possiamo ora procedere in modo dal tutto analogo a quello seguito dall'esempio precedente. Con le notazioni di allora si trova che, vettorialmente, il peso è espresso da

$$G(m + W) + R^7 \left[\mu \operatorname{grad} \left(\sum_{ik} \alpha^{ik} \alpha_{ik} \right) + \nu \operatorname{grad} \left\{ \left(\sum_i \alpha_i^i \right)^2 \right\} \right].$$

Il secondo termine rappresenta quella parte del peso che non ha la direzione della gravità.

N° 9.

It is not known how Fermi came to consider this problem. Many years later (around 1950) he gave this problem in an open book doctoral examination at the University of Chicago. Remarkably a student thought that this was probably a problem treated by Fermi in his early years and succeeded in finding it in the library. Rumor has it that he was the only one who gave the correct solution.

E. SEGRÈ

9.

SUL TRASCINAMENTO DEL PIANO DI POLARIZZAZIONE DA PARTE DI UN MEZZO ROTANTE

« Rend. Lincei », 32 (1), 115-118 (1923) (*).

1. Le esperienze di Fizeau, e le numerose teorie relativistiche e non relativistiche che ne son state fatte, hanno dimostrato che la luce che si propaga in un mezzo in moto è trascinata nel senso di questo non completamente, ma con un coefficiente di trascinamento eguale a $\frac{n^2-1}{n^2}$, essendo n l'indice di rifrazione del mezzo. Mi sono proposto lo studio di un problema analogo. Supponiamo che un mezzo trasparente ruoti attorno ad un asse e che della luce polarizzata rettilineamente si propaghi attraverso al mezzo parallelamente all'asse; se il piano di polarizzazione fosse trascinato completamente dalla rotazione del mezzo, esso dovrebbe evidentemente presentare una specie di potere rotatorio, di grandezza $\omega n/c$, essendo ω la velocità angolare e c la velocità della luce, poichè a percorrere la lunghezza 1 la luce impiega il tempo n/c , e in questo tempo il mezzo ruota appunto dell'angolo $\omega n/c$.

Troveremo invece ⁽¹⁾ che le cose vanno diversamente, e che anche in questo caso bisogna tener conto di un coefficiente di trascinamento, che si

(*) Presentata dal Corrispondente L. Puccianti nella Seduta del 4 febbraio 1923.

(1) J. J. Thomson ha studiato lo stesso problema (« Proc. Camb. Phil. Soc. », 1885), trovando un coefficiente di trascinamento eguale ad 1; ma la sua conclusione è errata, perchè in essa si considerano i campi elettrico e magnetico della luce come trasversali anche nel mezzo in moto, ciò che è in evidente contrasto con la formula (4) del suo lavoro. Un'altra causa di errore nel lavoro di Thomson consiste nel porre $f = \frac{K}{4\pi} P$; essendo P, Q, R , conformemente alle (4) (5) (6), calcolate come somma della forza elettrica P' e della forza elettromagnetica P'' agente sul corpo per effetto del suo moto; poichè quest'ultima agisce solo sopra lo spostamento elettrico del corpo e non su quello dell'etere. La formula corretta sarebbe $f = \frac{KP'}{4\pi} + \frac{K-1}{4\pi} P''$.

Il suo risultato è del resto evidentemente in contraddizione col fatto intuitivo che il coefficiente deve certo essere nullo, per corpi di indice di rifrazione = 1.

trova ancora eguale precisamente a quello di Fizeau, per modo che come potere rotatorio, invece che $\omega n/c$, si trova $\frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{\omega n}{c}$.

2. Consideriamo un dielettrico isotropo di polarizzabilità elettrica k , per modo che, essendo n l'indice di rifrazione, sia

$$(1) \quad n^2 = 1 + 4\pi k.$$

Supponiamo poi che il dielettrico ruoti attorno all'asse x con velocità angolare ω . Essendo \mathbf{E} ed \mathbf{H} le forze elettrica e magnetica, le equazioni di Maxwell ⁽²⁾ si scriveranno per esso:

$$(2) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad ; \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j} \right),$$

dove \mathbf{j} rappresenta la densità di corrente (u.e.s.). Indicando con \mathbf{S} la polarizzazione, si vede subito che \mathbf{j} è la somma della corrente dovuta alla variazione della \mathbf{S} col tempo $d\mathbf{S}/dt$, e della corrente dovuta alla convezione delle cariche elettriche libere $= -\mathbf{V} \text{ div } \mathbf{S}$, se con \mathbf{V} si indica la velocità del punto generico del dielettrico. Si ha dunque

$$(3) \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \mathbf{V} \text{ div } \mathbf{S}.$$

D'altra parte, \mathbf{S} sarà dato ⁽³⁾ da

$$(4) \quad \mathbf{S} = k \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{H} \right).$$

3. Abbiamo così raccolto tutti gli elementi per lo svolgimento della nostra teoria; per semplificare un pò le cose limiteremo le nostre considerazioni ai punti posti assai vicino all'asse di rotazione x , e trascureremo i quadrati ⁽⁴⁾ di ω .

Cerchiamo se si possono soddisfare le (2) con le posizioni

$$E_x = E_x(x, y, z, t) \quad ; \quad E_y = E_y(x, t) \quad ; \quad E_z = E_z(x, t);$$

$$H_x = 0 \quad ; \quad H_y = H_y(x, t) \quad ; \quad H_z = H_z(x, t),$$

introducendo cioè, oltre alle ordinarie componenti trasversali dei vettori elettrico e magnetico, anche una componente longitudinale del vettore elettrico. Tenendo presente che le componenti di \mathbf{V} sono 0, $-\omega z$, ωy , si ha dalla (4)

$$S_x = k \left\{ E_x - \frac{\omega}{c} (y H_y + z H_z) \right\} \quad ; \quad S_y = k E_y \quad ; \quad S_z = k E_z$$

$$\text{div } \mathbf{S} = k \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\omega}{c} \left(y \frac{\partial H_y}{\partial x} + z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \right\}$$

(2) Abbiamo scritto le equazioni di Maxwell senza metter esplicitamente in evidenza la costante dielettrica, perché di essa è tenuto conto nel termine $4\pi \mathbf{j}$.

(3) Ciò equivale manifestamente a far la teoria trascurando la dispersione, ponendo cioè l'indice di rifrazione per tutte le lunghezze d'onda eguale alla radice quadrata della costante dielettrica.

(4) Propriamente il numero di cui si trascurano i quadrati è $\omega r/c$, essendo r la massima distanza, dall'asse, dei punti in considerazione.

e quindi per la (3), trascurando i termini in ω^2 ,

$$j_x = k \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\omega}{c} \left(y \frac{\partial H_y}{\partial t} + z \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \right\} ; \quad j_y = k \left\{ \frac{\partial E_y}{\partial t} + \omega z \frac{\partial E_x}{\partial x} \right\},$$

$$j_z = k \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial t} - \omega y \frac{\partial E_x}{\partial x} \right\}.$$

Le (2), nella solita approssimazione, possono ora scriversi:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} = (n^2 - 1) \frac{\omega}{c} \left(y \frac{\partial H_y}{\partial t} + z \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi k}{c} \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial t} + \omega z \frac{\partial E_x}{\partial x} \right\} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi k}{c} \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial t} - \omega y \frac{\partial E_x}{\partial x} \right\}. \end{array} \right.$$

Dalla prima equazione del secondo gruppo si rileva che E_x contiene ω , e quindi le due ultime possono semplificarsi trascurando i termini in ω^2 .

Tenendo presente (1), le (5) possono semplificarsi e scriversi:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} = (n^2 - 1) \frac{\omega}{c} \left(y \frac{\partial E_y}{\partial t} + z \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{n^2}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{n^2}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Con facili operazioni di eliminazione si deduce da queste trascurando termini in ω^2 :

$$(7) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{(n^2 - 1) \omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t};$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\frac{(n^2 - 1) \omega}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Proviamo a soddisfarle ponendo

$$E_y = \mathcal{E}_y e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{n' x}{c} \right)} ; \quad E_z = \mathcal{E}_z e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{n' x}{c} \right)},$$

essendo \mathcal{E}_y , \mathcal{E}_z costanti complesse: le (7) ci danno

$$(7 \text{ bis}) \quad 2\pi \nu \mathcal{E}_y (n^2 - n'^2) = (n^2 - 1) \omega i \mathcal{E}_z$$

$$2\pi \nu \mathcal{E}_z (n^2 - n'^2) = -(n^2 - 1) \omega i \mathcal{E}_y.$$

Per aver soluzioni non identicamente nulle, deve dunque essere:

$$4\pi^2 \nu^2 (n^2 - n'^2)^2 = (n^2 - 1)^2 \omega^2,$$

dalla quale si deduce

$$n'^2 = n^2 \pm \frac{(n^2 - 1) \omega}{2\pi \nu},$$

cioè, con la nostra solita approssimazione,

$$(8) \quad n' = n \left(1 \pm \frac{(n^2 - 1) \omega}{4\pi \nu n^2} \right).$$

I due valori n'_1 ed n'_2 che la (8) dà per n' , sono i due indici di rifrazione delle onde polarizzate circolarmente nei due sensi, come subito si rileva dalle 7 (*bis*). Essi sono, come è noto, legati al potere rotatorio R dalla relazione $R = 2 \pi (n'_1 - n'_2) v/c$. Tenendo dunque presenti i valori (8), si trova infine

$$R = \frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{\omega n}{c} .$$

Il coefficiente di trascinamento del piano di polarizzazione è dunque, come si era annunciato, eguale a quello di Fizeau, e cioè

$$\frac{n^2 - 1}{n^2} .$$

N° 10.

For the introduction to this paper see N° 4.

10.

SULLA MASSA DELLA RADIAZIONE IN UNO SPAZIO VUOTO

E. FERMI e A. PONTREMOLI

«Rend. Lincei», 32 (1), 162-164 (1923) (*).

Recentemente uno di noi ⁽²⁾ ebbe a dimostrare, introducendo un più esatto concetto della rigidità, come l'elettrodinamica ordinaria consenta di giungere alla determinazione della massa di riposo di un elettrone non diversa da quella attribuitagli secondo la teoria della relatività, e che, come è noto, si ottiene semplicemente dividendo per il quadrato della velocità della luce l'energia del sistema.

Abbiamo osservato che una simile differenza, tra il valore determinato secondo l'elettrodinamica ordinaria o colla relatività, si presenta nel calcolo della massa della radiazione di uno spazio vuoto ⁽³⁾, e ci proponiamo di dimostrare che questo divario può eliminarsi mediante analoghe considerazioni.

Il procedimento sinora seguito per determinare colla elettrodinamica la massa della radiazione in una cavità consisteva anzitutto nel calcolare l'impulso elettromagnetico \mathbf{G}_0 per moti lenti e quasi stazionari, che risulta espresso ⁽³⁾, trascurando termini in v^2/c^2 , da

$$\mathbf{G}_0 = \frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} \mathbf{v},$$

dove W_0 è l'energia della radiazione allo stato di quiete, \mathbf{v} è la velocità attuale della cavità, c è la velocità della luce. Da questo si deduceva che la reazione di inerzia è

$$-\frac{d\mathbf{G}_0}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} \mathbf{\Gamma}.$$

dove $\mathbf{\Gamma}$ è l'accelerazione; donde una massa apparente della radiazione eguale a $\frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2}$, mentre, secondo la teoria della relatività, essa dovrebbe essere semplicemente W_0/c^2 .

(*) Presentata dal Scio O. M. Corbino nella Seduta del 18 febbraio 1923.

(1) E. FERMI, questi «Rendiconti», vol. XXXI, pp. 184 e 306 (1922), «Physikalische Zeit.», vol. XXIII (1922), p. 340.

(2) F. HASENÖHRL, «Ann. der Physik», vol. XV, p. 344 (1904), e vol. XVI, p. 589 (1905) K. VON MOSENTEIL, «Ann. der Physik», vol. XXII, p. 867 (1907); M. PLANCK, «Berlin Sitzber.», p. 542 (1907); M. ABRAHAM, *Theorie der Elektrizität*, vol. II, p. 341 (1920).

(3) M. ABRAHAM, loc. cit., p. 345.

In questo procedimento è contenuta implicitamente l'asserzione che la forza esterna F sia eguale alla derivata dell'impulso elettromagnetico rispetto al tempo, cioè alla somma vettoriale delle forze elettromagnetiche $d\varphi$ agenti sopra le singole parti del sistema; con ciò si viene a porre dunque:

$$(1) \quad \mathbf{F} = \int d\varphi.$$

Ma ciò non è esatto, perchè, se si tiene conto della nozione di corpo rigido discussa da uno di noi nel lavoro citato, la forza esterna è data invece dalla relazione

$$(2) \quad \mathbf{F} = \int d\varphi \left[\mathbf{I} + \frac{\mathbf{I} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} \right]$$

essendo $(\mathbf{P} - \mathbf{O})$ il vettore che ha termine nel punto \mathbf{P} cui è applicata la forza $d\varphi$ ed origine in un punto fisso \mathbf{O} , che possiamo prendere per centro delle coordinate, interno al sistema.

Ora, $d\varphi$ è la risultante della forza $d\varphi_1$, esercitata dalla pressione di radiazione che sussisterebbe se la cavità fosse ferma, e di una forza $d\varphi_2$, causata dalle perturbazioni di detta pressione, dovute al moto della cavità. Applicando la formola (1), si trova che, essendo evidentemente $\int d\varphi_1 = 0$, perchè $d\varphi_1$ è la forza esercitata da una pressione omogenea sopra una superficie chiusa, la forza esterna è

$$(3) \quad \mathbf{F} = \int d\varphi_2.$$

Questa forza è precisamente quella calcolata come reazione d'inerzia dagli autori citati, onde

$$(4) \quad \int d\varphi_2 = -\frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} \Gamma.$$

Invece per la formola (2), tenendo ancora presente che $\int d\varphi_1 = 0$, si trova

$$\mathbf{F} = \int (d\varphi_1 + d\varphi_2) \left[\mathbf{I} + \frac{\mathbf{I} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} \right] = \int d\varphi_1 \frac{\mathbf{I} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} + \int d\varphi_2 + \int d\varphi_2 \frac{\mathbf{I} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2}.$$

Trascurando i termini in Γ^2 ed osservando che $d\varphi_2$ è proporzionale a Γ , si può porre semplicemente

$$(5) \quad \mathbf{F} = \int d\varphi_1 \frac{\mathbf{I} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} + \int d\varphi_2.$$

La differenza tra (3) e (5) non è *a priori*, in questo caso, trascurabile, benchè contenga c^2 al denominatore, potendo $d\varphi_1/d\varphi_2$ divenire molto grande, come rapporto tra una forza e la sua perturbazione (4). Infatti è $d\varphi_1 = p n d\sigma$, dove p è la pressione di radiazione eguale, come è noto, ad $\frac{1}{3} \frac{W_0}{V}$, V è il

(4) Nel caso delle masse elettromagnetiche si ha $d\varphi$ eguale alla somma delle forze di Coulomb (che formano la parte preponderante) e delle forze dovute alla accelerazione. Per le prime vale evidentemente anche in questo caso la relazione $\int d\varphi_1 = 0$; ancor esse quindi fanno sentire il loro effetto solo ove si applichi la formola (5) anzichè la (3).

volume della cavità, \mathbf{n} è un vettore unitario colla direzione della normale esterna relativa all'elemento $d\sigma$, di coordinate (x, y, z) , della superficie della cavità.

La componente sull'asse x del primo integrale di (5) è dunque

$$\begin{aligned} \left[\int d\Phi_x \frac{\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} \right]_x &= \frac{W_0}{3c^2 V} \int (\Gamma_x x + \Gamma_y y + \Gamma_z z) \cos \hat{n}x \, d\sigma \\ &= \frac{W_0}{3c^2 V} \left[\Gamma_x \int x \cos \hat{n}x \, d\sigma + \Gamma_y \int y \cos \hat{n}x \, d\sigma + \Gamma_z \int z \cos \hat{n}x \, d\sigma \right]; \end{aligned}$$

ma l'immediata applicazione del teorema di Gauss dimostra che

$$\int x \cos \hat{n}x \, d\sigma = V \quad , \quad \int y \cos \hat{n}x \, d\sigma = \int z \cos \hat{n}x \, d\sigma = 0.$$

La nostra componente è perciò $W_0 \Gamma_x / 3c^2$ e quindi

$$\int d\Phi_x \frac{\Gamma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{c^2} = \frac{W_0}{3c^2} \Gamma.$$

Tenendo presente questa relazione e la (4), si vede che il rapporto tra gl'integrali del secondo membro della (5) è $-1/4$ e quindi effettivamente non trascurabile.

Sostituendo questi valori nella (5), si trova

$$\mathbf{F} = - \frac{W_0}{c^2} \Gamma,$$

da cui la richiesta massa di quiete risulta, conformemente al principio di relatività, eguale a W_0/c^2 .

N° 11 a and 11 b.

This paper is one of the group on analytical mechanics which Fermi completed during his stay in Göttingen. N° 11 a is a German translation of N° 11 b. The following information was kindly supplied by Dr. G. E. Uhlenbeck: Prof. P. Ehrenfest, who had delved deeply into the foundations of statistical mechanics, was impressed by the paper. He gave to Uhlenbeck, who was going to Rome for a while, a letter for Fermi with a number of questions and in this way Uhlenbeck met Fermi for the first time in the fall of 1924. They remained friends for life and the visits of Fermi to Ann Arbor were in part prompted by his friends Uhlenbeck and Goudsmit who were professors at the University of Michigan. Probably through this contact with Ehrenfest Fermi decided to go to Leyden for about three months.

The proof of the ergodic theorem given by Fermi is not considered rigorous from the mathematical point of view and it is difficult to make it rigorous. Some recent comments on the subject and bibliographical indications are given e.g. in C. L. SIEGEL, *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, page 201, Springer, Berlin, 1956.

E. SEGRÈ.

11 a.

I. — BEWEIS, DASS EIN MECHANISCHES NORMALSYSTEM IM ALLGEMEINEN QUASI-ERGODISCH IST

« Phys. Zeits. », 24, 261–265 (1923).

§ 1. Es sei ein mechanisches System gegeben; Γ sei sein Phasenraum, in dem die Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_n und die zugehörigen Momente p_1, p_2, \dots, p_n durch einen Punkt dargestellt sind. Die von einem Punkt P_0 von Γ ausgehende Bahn des darstellenden Punktes wird völlig auf der durch P_0 gehende Energiefläche laufen. Wir wollen beweisen dass im allgemeinen diese Kurve unendlich nah an jeden Punkt der Energiefläche herankommt, d. h. dass unser System quasi-ergodisch ⁽¹⁾ ist. Genauer gesagt, wollen wir folgendes beweisen.

Es seien auf einer Energiefläche E zwei beliebig kleine Gebiete gegeben, die, falls die Oberfläche aus mehreren Stücken besteht, auf demselben Stück liegen müssen, so dass es möglich ist, sie durch eine ganz auf E laufende Linie zu verbinden. Ich behaupte, dass es im allgemeinen Bahnen gibt, die durch beide Gebiete gehen.

(1) Bekanntlich würde das System ergodisch heissen, wenn die Bahn durch alle Punkte der Energiefläche gehen würde. Es sei hier erwähnt, dass Rosenthal [« Ann. d. Phys. », 42, 179 (1913)] und Plancherel [« Ann. d. Phys. », 42, 1061 (1913)] bewiesen haben, dass es keine ergodischen Systeme geben kann.

Um den Beweis durchzuführen, wollen wir zuerst einen Poincaréschen Satz verallgemeinern.

§ 2. Poincaré⁽²⁾ hat nämlich bewiesen, dass ein kanonisches Normalsystem im allgemeinen, ausser dem Energieintegral $F = \text{konst.}$ keine weiteren analytischen, eindeutigen, von der Zeit unabhängigen Integrale besitzen kann. Geometrisch bedeutet das, dass es im Phasenraum Γ , ausser den Energieflächen $F = \text{konst.}$ keine andere Oberflächenfamilie gibt, mit der Eigenschaft, dass die Bahn des darstellenden Punktes immer auf derselben Oberfläche verläuft, auf der ihr Anfangspunkt liegt. Wir wollen diesen Satz verallgemeinern, indem wir beweisen werden, dass es ausser den $F = \text{konst.}$ nicht nur keine weitere Oberflächenfamilie, sondern überhaupt keine weitere Oberfläche mit der Eigenschaft gibt, dass alle von einem ihrer Punkte ausgehende Bahnen immer auf der Oberfläche bleiben. Wir werden nämlich beweisen, dass, wenn eine analytische eindeutige Fläche diese Eigenschaft besitzt, sie im allgemeinen nur mit einer der $F = \text{konst.}$ zusammenfallen kann, und zwar sobald $n > 2$ ist.

§ 3. Weil unser mechanisches System normal ist, können wir statt der $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$, neue Koordinaten $y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_n$, einführen, so dass folgendes gelte:

1. Die Energie F ist von der Zeit unabhängig.
2. Ausser den Koordinaten x, y , enthält F auch einen Parameter μ , und ist nach Potenzen desselben für hinreichend kleine Werte von μ entwickelbar, so dass:

$$(1) \quad F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

wo die F_i Funktionen der y und der x darstellen.

3. Die Lage des Systems, und daher auch F und die F_i , hängen nur periodisch (mit der Periode 2π) von den x_1, x_2, \dots, x_n ab.

4. F_0 ist von den x unabhängig.

Nehmen wir also an, dass die Oberfläche S , mit der Gleichung $\Phi(x, y, \mu) = 0$, die am Ende des § 2 besprochene Eigenschaft habe, und dass Φ analytisch, eindeutig, und in den x periodisch sei. Die Lage von S hängt von μ ab, was wir durch die Schreibweise S_μ bezeichnen werden. Wir können Φ nach Potenzen von μ entwickeln, und schreiben:

$$(2) \quad \Phi = \Phi_0 + \mu \Phi_1 + \mu^2 \Phi_2 + \dots$$

wo die Φ_i Funktionen der x und der y darstellen.

Wir bemerken aber, dass, wenn wir die Lage von S_μ für alle Werte von μ kennen, dadurch die Φ_i nicht völlig bestimmt sind. Und zwar, wenn wir S_μ für alle μ kennen, können wir z.B. y_1 folgendermassen darstellen:

$$y_1 = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots,$$

(2) H. POINCARÉ, *Méth. nouv. de la mécanique céleste*, Vol. I, C. 5.

wo die f_i , bekannte Funktionen von $y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ sind. Setzen wir in Φ diesen Ausdruck statt y_1 , so muss Φ identisch verschwinden. Wir können aber Φ nach Potenzen von μ entwickeln, und wir finden endlich:

$$\begin{aligned} \Phi_{y_1=f_0+\mu f_1+\dots} &= [\Phi_0] + \mu \left[f_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} + \Phi_1 \right] \\ &+ \mu^2 \left[\frac{f_1^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y_1^2} + f_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} + f_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} + \Phi_2 \right] + \dots = 0, \end{aligned}$$

wo die Ausdrücke in eckiger Klammer für $y_1 = f_0$, d. h. auf der Oberfläche S_0 zu berechnen sind. Sämtliche Koeffizienten der Potenzen von μ müssen verschwinden; und so finden wir für die Φ_i folgende Bedingungen;

$$\begin{aligned} [\Phi_0] &= 0, \\ [\Phi_1] &= -f_1 \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} \right], \\ [\Phi_2] &= -\frac{f_1^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y_1^2} \right] - f_2 \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} \right] - f_1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \right]. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Wegen der ersten dieser Bedingungen, muss Φ_0 auf S_0 verschwinden. Wählen wir Φ_0 ausserhalb S_0 ganz willkürlich, so wird dadurch Φ_1 auf S_0 durch die 2. Bedingung bestimmt, und bleibt ausserhalb S_0 ganz willkürlich. Nachdem wir Φ_1 usserhalb S_0 beliebig gewählt haben, wird Φ_2 auf S_0 durch die 3. Bedingung bestimmt usw.

Ich behaupte jetzt, dass man Φ_0 immer von den x unabhängig wählen kann. Dafür genügt es zu beweisen dass alle Punkte, die mit einem Punkte von S_0 die y -Koordinaten gemeinsam haben, ebenfalls zu S_0 gehören.

Ist nun P_0 ein Punkt von S_0 so muss S_0 die ganze Bahn des Systems für $\mu = 0$, die von P_0 ausgeht, enthalten. Weil aber F_0 die x nicht enthält, so haben alle Punkte dieser Bahn dieselben y -Werte wie P_0 , während die x lineare Funktionen der Zeit sind. Im n dimensionalen Raum der x ist die Bahn also eine Gerade. Wegen der vorausgesetzten Periodizitätseigenschaften der x können wir aber sämtliche Punkte dieser Geraden in einen Würfel von der Seite 2π zurückführen. Dieser Würfel wird bekanntlich dicht mit Punkten erfüllt sein, wenn keine lineare ganzzahlige Beziehung zwischen

$$\frac{\partial F_0}{\partial y_1}, \frac{\partial F_0}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial F_0}{\partial y_n}$$

besteht. Wir können nun immer annehmen, dass keine Beziehung wie:

$$(3) \quad m_1 \frac{\partial F_0}{\partial y_1} + m_2 \frac{\partial F_0}{\partial y_2} + \dots + m_n \frac{\partial F_0}{\partial y_n} = 0$$

identisch besteht, d. h. dass das ungestörte System nicht entartet ist. Würde nun Gl. (3) identisch auf S_0 gelten, so würde (3) eine Folge von $\Phi_0 = 0$ sein, und wir könnten daher, wegen der Willkürlichkeit von Φ_0 , immer

$$\Phi_0 = \sum_i m_i \frac{\partial F_0}{\partial y_i}$$

setzen, woraus, wie behauptet, folgen würde, dass Φ_0 die x nicht enthält.

Ist keine Gleichung wie (3) auf S_0 identisch erfüllt, so ist im allgemeinen der Würfel dicht mit Punkten erfüllt, die zu S_0 gehören, und er muss daher in S_0 enthalten sein; also ist auch in diesem Falle der Beweis geliefert.

§ 4. Die Eigenschaft von S_μ lässt sich analytisch dadurch ausdrücken, dass die Gleichung ⁽³⁾

$$(4) \quad [F, \Phi] = 0$$

eine Folge der anderen

$$(5) \quad \Phi = 0$$

ist. Wir können daher aus Gl. (5) z. B. y_r als Funktion von $y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$ finden, den gefundenen Wert in (4) setzen, und nach Potenzen von μ entwickeln. Dann müssen die Koeffizienten sämtlicher Potenzen von μ identisch verschwinden. Nun ist aber identisch $[F_0, \Phi_0] = 0$, weil F_0 , so wie Φ_0 , die x nicht enthält. Das erste Glied der Entwicklung von (4) ist daher $\mu ([F_0, \Phi_r] + [F_r, \Phi_0])$, berechnet auf S_0 . Auf S_0 muss also sein:

$$(6) \quad [F_0, \Phi_r] + [F_r, \Phi_0] = 0.$$

Aus den Periodizitätseigenschaften von F_r und Φ_r geht hervor, dass wir

$$\Phi_r = \sum_m A_m e^{\Theta_m} \quad ; \quad F_r = \sum_m B_m e^{\Theta_m}$$

setzen können, wo A_m und B_m Funktionen der y darstellen, Θ_m eine Abkürzung für

$$i(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n)$$

ist, und m statt der n Indizes (m_1, m_2, \dots, m_n) geschrieben ist. Gl. (6) wird jetzt, nach einer einfachen Rechnung:

$$\sum_m e^{\Theta_m} \left(A_m \sum_i m_i \frac{\partial F_0}{\partial y_i} - B_m \sum_i m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i} \right) = 0.$$

Diese Gleichung soll gelten, wenn wir z. B. statt y_r , den aus der Gleichung

$$\Phi_0(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

gefundenen Wert setzen. Auf S_0 müssen also sämtliche Koeffizienten von e^{Θ_m} verschwinden, d. h.:

$$(7) \quad A_m \sum_i m_i \frac{\partial F_0}{\partial y_i} = B_m \sum_i m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i};$$

hieraus folgt, dass, wenn in einem Punkte von S_0 $\sum m_i \frac{\partial F_0}{\partial y_i} = 0$ ist, auch $\sum m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i} = 0$ sein muss, weil im allgemeinen ⁽⁴⁾ $B_m \neq 0$ ist.

(3) Für die Eigenschaften des hier benutzten Symbols $[F, \Phi]$ siehe Poincaré, l. c., $[F, \Phi]$ ist eine Abkürzung für den Ausdruck:

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \right).$$

(4) Es könnte wohl geschehen, dass auf S_0 eine der $B_m = 0$ wäre. Das würde aber, wie leicht ersichtlich, das Folgende nicht beeinflussen. Über diesen Punkt siehe auch Poincaré, l. c.

Jetzt müssen wir unterscheiden, ob die Anzahl der Freiheitsgrade = oder > 2 ist. Ist $n = 2$, so kann es wohl eintreten, dass S_0 die Gleichung $\frac{\omega_2}{\omega_1} - \alpha = 0$ habe, wo wir $\omega_i = \frac{\partial F_0}{\partial x_i}$ gesetzt haben und α eine beliebige irrationale Zahl darstellt. Dann ist es nicht möglich, zwei ganze Zahlen m_1 und m_2 zu finden, so dass $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 = 0$, in einem Punkte von S_0 erfüllt sei; dann können wir auf S_0 setzen:

$$A_m = \frac{B_m}{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2} \sum_i m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i},$$

weil der Nenner immer $\neq 0$ ist; wählen wir die A_m ausserhalb S_0 willkürlich, so ist Φ_1 bestimmt; und es lässt sich leicht einsehen, dass ein ähnliches Verfahren mindestens formal zur Bestimmung von Φ_2, Φ_3, \dots führen würde. Es bliebe noch die Frage der Konvergenz der so erhaltenen Reihen. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass für hinreichend schnell mit wachsenden m verschwindende B_m , und eventuell für besondere Werte von α die Reihen wirklich konvergieren. Hieraus sieht man, dass es, im Fall $n = 2$ im allgemeinen nicht ausgeschlossen ist, dass ausser den Energieflächen noch weitere, eventuell unendlich viele, Oberflächen gebe, mit der am Ende des § 2 besprochenen Eigenschaft.

§ 5. Anders steht es im Falle $n > 2$. Wir wollen z. B. $n = 3$ voraussetzen; unsere Schlussweise ist aber auch für $n = 4, 5, \dots$ gültig.

Von den drei Verhältnissen $\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_2}$ kann im allgemeinen höchstens eines auf S_0 konstant sein, so dass wir immer annehmen dürfen, dass z. B. $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ und $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ auf S_0 nicht konstant sind. Dann ist S_0 dicht mit Punkten besetzt, für die z. B. $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ rationale Werte hat; in irgendeinem solcher Punkte kann man zwei ganze Zahlen finden, für die $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 = 0$. Dann ist in demselben Punkte auch $m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_2} = 0$; und daher:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_2} / \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1}.$$

Da nun diese Gleichung in unendlich vielen, dicht auf S_0 verteilten Punkten gilt, so ist sie gewiss auf S_0 identisch befriedigt. In gleicher Weise beweist man, dass auch die Gleichung

$$\omega_3 : \omega_1 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_3} : \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1}$$

auf S_0 identisch gilt. Also sind auf S_0 die partiellen Ableitungen von Φ_0 nach den y_i , denen von F_0 proportional. Das kann aber nur dann geschehen, wenn $\Phi_0 = \sigma$ eine der $F_0 = \text{konst.}$, sagen wir $F_0 = -\epsilon_0$, ist. Daher können wir, wegen der Willkürlichkeit von Φ_0 ausserhalb S_0 , im ganzen Raum $\Phi_0 = F_0 + \epsilon_0$ setzen. Jetzt, da S_0 so bestimmt ist, kann im allgemeinen kein Ausdruck wie $\sum m_i \frac{\partial F_0}{\partial x_i}$ auf S_0 identisch verschwinden, wenn nur nicht $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$ ist. Auf S_0 können wir daher Gl. (7) durch $\sum m_i \frac{\partial F_0}{\partial y_i} = \sum m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i}$

halb S_0 , auf den ganzen Raum ausdehnen. Und damit ist der Beweis vollständig erbracht.

§ 7. Wir sind jetzt imstande, durch eine einfache geometrische Überlegung zu beweisen, dass ein mechanisches Normalsystem im allgemeinen quasi-ergodisch ist. Ehe wir weiter gehen, wollen wir aber die Bedingungen ⁽⁵⁾ zusammenstellen, unter denen der verallgemeinerte Poincarésche Satz gültig ist:

1. Die Zahl der Freiheitsgrade muss > 2 sein.
2. Das ungestörte System darf nicht entartet sein.
3. Aus keiner Gleichung wie z. B. $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \text{konst.}$ darf identisch eine ähnliche, wie z. B. $\frac{\omega_4}{\omega_3} = \text{konst.}$ folgen.
4. Auf keiner Fläche $F_0 = \text{konst.}$ darf $\sum_i m_i \omega_i$ identisch verschwinden, wenn nicht

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0.$$

5. Auf keiner der $F_0 = \text{konst.}$ darf im allgemeinen aus $\sum_i m_i \omega_i = 0$ auch $B_m = 0$ folgen.

§ 8. Wir wollen jetzt wieder unser System durch die q und die p definieren. Sei σ ein beliebiges Gebiet auf einer Energiefläche E , und σ' das von den durch σ gehenden Bahnen besetzte Gebiet von E . Ich behaupte, dass σ' das ganze mit σ zusammenhängende Stück von E bedeckt. Wäre das nicht der Fall, so nennen wir σ'' das übrige Gebiet des mit σ zusammenhängenden Stückes von E , und S die Trennungsfläche von σ' und σ'' . Nun kann keine Bahn des Systems, die einen Punkt P' von σ' enthält, auch einen Punkt P'' von σ'' enthalten. Denn sonst würde, der repräsentative Punkt, der zur Zeit 0 in P' ist, z. B. zur Zeit t in P'' sein; wegen der Kontinuität der Lösungen der mechanischen Gleichungen kann man dann aber ein hinreichend kleines, ganz in σ' enthaltenes Gebiet η' um P' finden, so dass alle seine Punkte zur Zeit t sich in einem um P'' gelegenes, ganz in σ'' enthaltenes Gebiet η'' befinden. Durch η' gehen aber gewiss auch Bahnen, die durch σ gehen; die würden nun auch durch η'' gehen, und daher kann η'' nicht ganz in σ'' liegen.

Sei jetzt P ein auf S gelegener Punkt, P' und P'' zwei in σ' bzw. σ'' liegende Punkte. Nach Verlauf der Zeit t seien P, P', P'' bzw. in P_1, P'_1, P''_1 angekommen; P'_1, P''_1 werden bzw. in σ', σ'' liegen. Lassen wir nun P' und P'' an P unendlich nah kommen, so werden auch P'_1 und P''_1 , wegen der Kontinuität, P_1 zustreben, sie müssen aber immer in σ' bzw. σ'' bleiben, und das kann nur dann geschehen, wenn P_1 auf der Trennungsfläche S liegt. Hieraus folgt, dass jede durch einen beliebigen Punkt P von S hindurchgehende Bahn ganz auf S liegt. Wir wissen aber, dass es ausser den Energieflächen im allge-

(5) Eigentlich sind diese Bedingungen für die Gültigkeit des Beweises hinreichend, aber nicht notwendig. Es wäre auch leicht, aus dem Beweise die für seine Gültigkeit wirklich nötigen Bedingungen zu finden.

meinen keine solche Flächen ⁽⁶⁾ gibt. Im allgemeinen muss daher σ' das ganze mit σ zusammenhängende Stück von E bedecken.

§ 9. Es seien nun σ und σ^* zwei auf demselben Stück von E gelegene, beliebig kleine Gebiete. Die durch σ gehenden Bahnen werden, wie bewiesen, das ganze Stück von E bedecken, und daher auch σ^* . Es gibt also gewiss Bahnen, die durch beide Gebiete hindurchgehen, d.h. das System ist quasi-ergodisch.

Göttingen, im April 1923.

(6) Anm. b. d. Korr.: Natürlich muss man für diese Flächen die im vorigen benutzten Regularitätseigenschaften annehmen.

II a.

II. — ÜBER DIE EXISTENZ QUASI-ERGODISCHER SYSTEME

« Phys. Zeits. », 25, 166–167 (1924).

Herr W. Urbanski hat in dieser "Zeitschr." 25, 47 (1924) eine Kritik meines Beweises der Existenz quasi-ergodischer Systeme⁽¹⁾ veröffentlicht. Es werden nämlich zwei Punkte kritisiert:

1. Dass für die S-Fläche meines Beweises Regularitätseigenschaften angenommen werden, die nicht erfüllt sein können.

2. Dass aus meinem Beweise zwar die Existenz einer quasi-ergodischen Bahnkurve, nicht aber die von mehreren, hergeleitet werden kann.

Zum ersten Punkte möchte ich bemerken, dass die Kritik von Herrn Urbanski gewiss prinzipiell richtig ist. Die Schwierigkeit, dass die S-Fläche nicht regulär sein kann, ist von mir selbst in der Fussnote zu S. 255 meines Beweises bemerkt worden; ich möchte nur bemerken, dass die Schwierigkeit vielleicht nicht so gross ist, wie es Herrn Urbanski scheint. In der Tat ist es aus meinem Beweise leicht zu ersehen, dass die Funktion $\Phi(x, y, \mu)$ nur als Funktion von μ analytisch zu sein braucht; und daher werden die Eigenschaften der S-Fläche viel weniger eingeschränkt, als wenn Φ als Funktion sämtlicher Variablen analytisch sein müsste.

Zu dem zweiten Punkte möchte ich bemerken, dass ich nur folgendes bewiesen zu haben gedenke: wenn σ und σ^* zwei beliebig kleine, auf einem zusammenhängenden Stück von E liegende Gebiete sind, gibt es immer mindestens eine Bahn des Systems, die durch beide Gebiete hindurchgeht. Dabei ist es notwendig, dass beide Gebiete endlich sind. Wenn in der Tat eines der beiden Gebiete, z. B. σ^* punktförmig wäre, so könnte es wohl geschehen, dass es auf einer periodischen Bahn läge. Und in diesem Falle würde nur diese geschlossene Bahn durch diesen Punkt gehen.

Als quasi-ergodisches System wird also bei meinem Beweise ein System gemeint, für das es Bahnen gibt, die beliebig nah an zwei beliebige Punkte einer zusammenhängenden Energiefläche herankommen, und nicht, wie es, wenn ich recht verstanden habe, Herr Urbanski meint, ein System, dessen sämtliche Bahnen die Energiefläche dicht erfüllen.

Ich vermute sogar, dass es überhaupt keine Systeme gibt, die quasi-ergodisch in diesem letzten Sinne sind. Solche Systeme würden z.B. keine periodischen Bahnen enthalten können, weil diese gewiss eine Ausnahme bilden würden.

Rom, 3. März 1924.

(1) FERMI, « Physik. Zeitschr. », 24, 261 (1923).

12.

IL PRINCIPIO DELLE ADIABATICHE ED I SISTEMI CHE NON AMMETTONO COORDINATE ANGOLARI

« Nuovo Cimento », 25, 171-175 (1923).

§ 1. - È nota l'importanza del principio delle adiabatiche di Ehrenfest⁽¹⁾ per la determinazione delle regole per la scelta delle orbite statiche di un sistema, nella teoria di BOHR. Tale principio, come si sa, può enunciarsi al modo seguente: Supponiamo che in un sistema meccanico, le forze oppure i vincoli vengano continuamente modificati in funzione del tempo ma lentissimamente in confronto ai periodi proprii del sistema, ossia, secondo l'espressione di Ehrenfest, adiabaticamente; il principio delle adiabatiche afferma che, se inizialmente il sistema si trovava in un'orbita quantisticamente privilegiata, esso vi si troverà anche alla fine della trasformazione.

Consideriamo per esempio un pendolo, e supponiamo di accorciare il filo assai lentamente in confronto al periodo del pendolo stesso. La frequenza ν del pendolo andrà allora piano piano aumentando, ma è facile riconoscere che anche l'energia u andrà aumentando, e precisamente in modo che il rapporto u/ν resta costante. Così che se inizialmente questo rapporto era un multiplo intero della costante h di Planck, esso resterà sempre tale, e quindi lo stato del sistema si manterrà durante tutta la trasformazione quantisticamente privilegiato. Per altri numerosi esempi rimandiamo alla memoria di Ehrenfest.

La base formale del principio delle adiabatiche è data da un teorema dovuto a Burgers⁽²⁾. Consideriamo un sistema che in certe coordinate generali q_1, q_2, \dots, q_f ammetta la separazione delle variabili⁽³⁾. Poniamo poi

$$(1) \quad I_K = \oint p_K dq_K \quad (K = 1, 2, \dots, f)$$

(1) EHRENFEST, « Ann. d. Phys. », 51, 327 (1916).

(2) BURGERS, « Versl. Akad. van Wetensch. », Amsterdam 1916, 1917; « Ann. d. Phys. », 52, 195 (1917).

(3) Per la validità delle considerazioni di Burgers basta più generalmente che il sistema ammetta coordinate angolari, ossia che si possano introdurre al posto delle q_K, p_K delle nuove variabili w_K, j_K tali che le q_K , espresse per le (w_K, j_K) siano periodiche a periodo 1 nelle w_K , e che l'energia, nelle nuove coordinate risulti funzione soltanto delle j . Allora, per le equazioni di Hamilton le j risultano costanti e le w funzioni lineari del tempo, e le q in funzione del tempo potranno svilupparsi in serie di Fourier ad f indici.

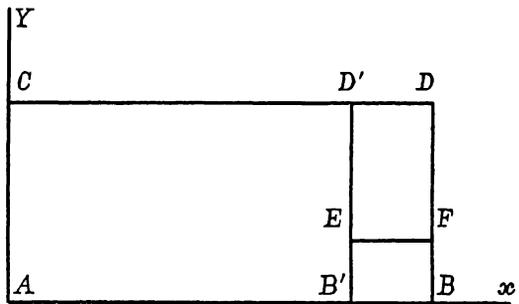
essendo le p_K i momenti coniugati canonicamente alle q_K , e l'integrale esteso, conformemente alle prescrizioni della teoria dei quanti, ad una oscillazione completa della coordinata q_K ; di modo che le condizioni perché l'orbita in considerazione del sistema sia quantisticamente privilegiata sono:

$$(2) \quad I_x = n_x h \quad ; \quad I_a = n_a h ; \dots ; I_f = n_f h$$

essendo n_x, n_a, \dots, n_f dei numeri interi. Supponiamo ora di modificare adiabaticamente il nostro sistema, in modo però che ad ogni istante esso ammetta sempre la separazione delle variabili. Il teorema di Burgers ci dice allora che gli integrali I_x, I_a, \dots, I_f non variano durante la trasformazione, ossia che essi sono invarianti adiabatici. E dunque, se le condizioni (2) sono soddisfatte al principio della trasformazione, esse lo saranno ancora alla fine, e quindi il principio delle adiabatiche è soddisfatto.

In questa Nota mi propongo di far vedere, con un semplice esempio che se un sistema si trasforma adiabaticamente in un altro, e gli stati iniziale e finale ammettono entrambi la separazione delle variabili, ma gli stati intermedi no, gli I_K non sono più invarianti adiabatici, e quindi in questo caso il principio delle adiabatiche viene a perdere la sua base.

§ 2. - Consideriamo un punto materiale, mobile in un piano nell'interno di un rettangolo; supporremo che sopra il punto non agisca alcuna forza mentre si trova nell'interno del rettangolo, ma che quando urta le pareti rimbalzi elasticamente contro queste. Prendiamo i lati AB ed AC del rettangolo come assi coordinati x, y . È evidente allora che questo sistema ammette la separazione delle variabili in tali coordinate. Chiamando a, b le lunghezze dei lati AB, AC, la coordinata x oscilla infatti tra i valori 0, a ; quella y tra i valori 0, b .



Inoltre se ad un certo istante le componenti della velocità sono u, v , esse ad un istante qualunque saranno $\pm u, \pm v$, dove bisogna prendere il segno + o quello - secondo che, all'istante considerato, la rispettiva coordinata cresce o decresce.

I momenti coniugati ad x e ad y saranno $\pm mu, \pm mv$, essendo m la massa del punto; si avrà dunque

$$(3) \quad I_x = \oint (\pm mu) dx = \int_0^a mu dx + \int_a^0 (-mu) dx = 2mua$$

e parimenti

$$(3') \quad I_y = 2m vb.$$

Vogliamo ora studiare come variano I_x ed I_y , trasformando adiabaticamente il nostro sistema. Ci proponiamo precisamente di trasformare il ret-

tangolo ABCD nell'altro AB' CD'; ed osserviamo che tale trasformazione può farsi in tre modi:

1° si sposta il segmento BD parallelamente a se stesso, fino ad arrivare in B' D';

2° si sposta il segmento BB' parallelamente a se stesso, fino ad arrivare in DD', di modo che, in un istante intermedio, il nostro punto materiale può muoversi entro il poligono concavo AB' EFDC;

3° si deforma in un modo qualsiasi la linea spezzata B' BDD' fino a portarla a coincidere col segmento di retta B' D'. Escludendo dalle nostre considerazioni quest'ultimo caso che è evidentemente un po' complicato, ci limiteremo a discutere i primi due.

Quanto al primo osserviamo che in esso ad ogni istante il punto può sempre muoversi all'interno di un rettangolo, e quindi anche negli istanti intermedi è sempre possibile la separazione delle variabili; in ordine al teorema di Burgers dobbiamo dunque in questo caso aspettarci che I_x ed I_y restino invariati. Per I_y ciò è senz'altro evidente, perché né b , né v variano durante la trasformazione e quindi, in ordine a (3') neanche I_y . Quanto ad I_x , invece, a decresce durante la trasformazione, riducendosi da $a = AB$, ad $a' = AB'$; contemporaneamente però u cresce per effetto dei rimbalzi contro la parete mobile, ed un'immediata considerazione dimostra che le cose vanno appunto in modo che il prodotto au , e quindi anche I_x , resta costante (4), purchè naturalmente la trasformazione sia effettuata con sufficiente lentezza.

Passando a considerare il caso 2° si riconosce invece facilmente che le cose vanno in modo diverso. Per quanto riguarda I_x infatti si vede subito che la componente x della velocità resta, a meno del segno, invariata, poichè essa potrebbe alterarsi in valore assoluto solo per effetto di un urto contro una parete mobile parallelamente all'asse x , mentre l'unica parete mobile, EF, si muove parallelamente ad y ; invece a diminuisce da AB ad AB'. In complesso dunque I_x si riduce nel rapporto a'/a , e quindi non resta costante. Parimenti non resta costante neanche I_y ; infatti b resta invariato mentre v cresce per effetto degli urti contro la parete mobile EF. Una immediata considerazione quantitativa dimostra che v , e quindi anche I_y , cresce nel rapporto a/a' .

Possiamo da queste considerazioni dunque concludere che gli integrali I_K sono invarianti adiabatici solo se negli stati intermedi il sistema permetta *sempre* la separazione delle variabili o almeno, in ordine ai teoremi di Burgers

(4) Infatti il numero degli urti contro la parete mobile BD nell'intervallo di tempo dt è evidentemente $\frac{u}{2a} dt$; d'altra parte, se V è la velocità della parete BD, l'aumento della velocità del punto ad ogni urto sarà $2V$, e quindi l'aumento di u nel tempo dt sarà:

$$du = 2V \frac{u}{2a} dt = \frac{u}{a} V dt = -\frac{u}{a} da$$

poichè evidentemente $-da = V dt$. Integrando l'equazione precedente si trova appunto $ua = \text{costante}$, come è affermato nel testo.

ammetta sempre un sistema di coordinate angolari, mentre ciò, almeno in generale, non è vero se negli stati intermedi il sistema non ha sempre un moto multiplamente periodico.

Anche dal punto di vista della teoria dei quanti, del resto, ci si rende abbastanza facilmente ragione di questo fatto. Si sa infatti che, secondo Bohr, la quantizzazione ben definita è possibile solo nel caso che il moto del sistema sia multiplamente periodico. Si capisce dunque che se negli stati intermedi della trasformazione il nostro sistema non si può quantizzare rigorosamente, questa imprecisione si trasmetta anche allo stato finale.

Göttingen, febbraio 1923.

13.

ALCUNI TEOREMI DI MECCANICA ANALITICA
IMPORTANTI PER LA TEORIA DEI QUANTI

« Nuovo Cimento », 25, 271-285 (1923).

§ 1.

Il principio delle adiabatiche di Ehrenfest⁽¹⁾ afferma, come è noto, che se un sistema meccanico si trova in un'orbita quantica, ed il suo meccanismo, forze o vincoli, viene alterato in modo infinitamente lento, il sistema si mantiene durante tutta la trasformazione in un'orbita quantisticamente privilegiata.

Perché questo principio abbia un senso determinato, è dunque evidentemente necessario che l'orbita finale del sistema, dipenda soltanto dal meccanismo finale, e non dall'aver seguito durante la trasformazione una od un'altra successione di meccanismi intermedi. Ora, che questo sia effettivamente il caso, è stato dimostrato da Burgers⁽²⁾, almeno per quel tipo di sistemi che fin'ora è stato quasi unicamente preso in considerazione nella teoria dei quanti, cioè per quei sistemi che, o ammettono addirittura la separazione delle variabili, o per lo meno sono rappresentabili per mezzo di coordinate angolari⁽³⁾, di modo che il loro movimento si può sempre considerare come risultante di moti periodici, in generale con tanti periodi quanti sono i gradi di libertà, o, in caso di degenerazione, con un numero inferiore. Ma proprio in questo momento, esaurito lo studio delle strutture atomiche relativamente più semplici, che appartengono a questo tipo⁽⁴⁾, si vanno presentando con sempre maggior insistenza i problemi che non ammettono coordinate angolari, primo di tutti il problema dei tre corpi, che si presenta nello studio dell'atomo di elio, e la forma semplificata di problema dei quattro corpi che si presenta nello studio della molecola d'idrogeno. I tentativi fatti di ridurre con vari artifici lo studio di questi sistemi a quello dei sistemi con coordinate angolari, sono finora come è noto tutti falliti. Appare dunque desiderabile cercare se e fino a che punto si possa tentare un'estensione ai sistemi generali del principio delle adiabatiche, nella speranza che

(1) P. EHRENFEST, « Ann. d. Phys. », 51, 237 (1916).

(2) BURGERS, « Versl. Akad. van Wetensch. », Amsterdam, 25 novembre 1916; « Ann. d. Phys. », 52, 195 (1917); « Phil. Mag. », 33, 514 (1917).

(3) Vedi per esempio SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien*, III ed. Zusatz 7.(4) Esse sono l'atomo di idrogeno e le sue varie perturbazioni (effetti Zeeman, Stark e Feinstruktur) ed il ione della molecola d'idrogeno H_2^+ , quando non vi siano rotazioni dei nuclei.

esso possa dar qualche informazione che possa servire alla ricerca delle regole per determinare le orbite privilegiate di questi sistemi più generali.

§ 2.

Anzitutto ci converrà fissare una classificazione dei sistemi che ci proponiamo di studiare. Ricorriamo perciò alla consueta rappresentazione geometrica dello stato del sistema mediante un punto di uno spazio Γ a $2f$ dimensioni, che ha per coordinate le f coordinate generali del sistema, q_1, q_2, \dots, q_f , e gli f momenti ad esse coniugati p_1, p_2, \dots, p_f . Da ogni punto di questo spazio passa una traiettoria determinata, corrispondente al moto del sistema che ha la posizione e le velocità iniziali determinate dal punto. Noi supporremo che forze e vincoli del sistema siano indipendenti dal tempo e che le forze abbiano un potenziale, di modo che esista un integrale della conservazione dell'energia. Chiameremo ipersuperfici E le ipersuperfici energia = costante; per ogni punto di Γ passa una delle E sulla quale, per l'integrale dell'energia, è situata la traiettoria che passa dal punto.

I sistemi meccanici così detti quasi-ergodici⁽⁵⁾ hanno la proprietà che la traiettoria passa in generale infinitamente vicino ad ogni punto di E , di modo che la traiettoria riempie densamente una varietà a $2f - 1$ dimensioni.

Può darsi però che il nostro sistema, oltre all'integrale della conservazione dell'energia, ammetta qualche altro integrale primo uniforme e indipendente dal tempo, ed allora la varietà riempita dalla traiettoria avrà naturalmente un numero minore di dimensioni. Supponiamo dunque che il nostro sistema abbia in tutto m integrali primi uniformi e indipendenti dal tempo,

$$\Phi_1(p, q) = c_1 \quad ; \quad \Phi_2 = c_2 ; \dots ; \Phi_m = c_m$$

essendo le c_i delle costanti arbitrarie. Allora per ogni punto di Γ passerà una varietà a $2f - m$ dimensioni G , intersezione delle m ipersuperfici $\Phi_i = c_i$; e la traiettoria passante da quel punto dovrà esser tutta contenuta in G .

Entro G non sarà più in generale possibile trovare una varietà subordinata che contenga tutta la traiettoria, anzi noi ammetteremo, in analogia ai sistemi quasi-ergodici, che per i sistemi che noi studiamo in generale tutta la G sia riempita densamente dalla traiettoria, ossia che questa passi infinitamente vicino a tutti i punti di G . Così che la traiettoria resterà caratterizzata, almeno nei suoi elementi statistici, dalla sola conoscenza dei valori di $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$ ad essa corrispondenti.

Chiameremo perciò questi valori *caratteristiche della traiettoria*.

Un sistema quasi-ergodico ha dunque una sola caratteristica, la sua energia.

Un sistema a energia indipendente dal tempo, che ammetta la separazione delle variabili ha in generale tante caratteristiche quanti gradi di libertà, corrispondenti alle f costanti a dell'integrale completo di Iacobi; un numero maggiore può esserci solo in casi di degenerazione, in cui esistano relazioni

(5) Chi scrive ha recentemente dimostrato che i sistemi meccanici normali sono in generale quasi-ergodici, così che questo è il caso più diffuso.

lineari a coefficienti interi tra le frequenze fondamentali. Consideriamo per esempio il moto di un punto mobile in un piano, attratto con forza proporzionale alla distanza da due rette ortogonali. Se i due coefficienti d'attrazione sono tra di loro incommensurabili il punto descrive nel piano una curva di Lissajous aperta.

E nello spazio Γ a quattro dimensioni il punto rappresentativo ricopre densamente una superficie G a due dimensioni. Il sistema ha dunque due caratteristiche; e come tali si possono prendere per esempio le energie delle proiezioni del movimento sopra le due rette ortogonali. Se invece i coefficienti d'attrazione sono commensurabili la curva di Lissajous degenera in una curva chiusa, e quindi la G diventa ad una sola dimensione, ciò che corrisponde a tre caratteristiche.

§ 3.

Noi supporremo ora di potere a nostro arbitrio variare le forze, oppure i vincoli del sistema, ossia ciò che, in complesso, con una felice denominazione dovuta a P. Hertz⁽⁶⁾ chiameremo il *meccanismo* del sistema. Se variamo il meccanismo in modo infinitamente lento, abbiamo quel che si dice una trasformazione adiabatica; e nel § 5, troveremo facilmente un sistema di equazioni differenziali, che ci mostra come variano le caratteristiche del sistema, al variare adiabaticamente di un parametro μ , in funzione del quale è dato il meccanismo. Ma come già si è accennato, perché si possa parlar dell'applicazione del principio di Ehrenfest ad un certo sistema, è necessario che i valori che prendono le sue caratteristiche alla fine di una trasformazione adiabatica, non dipendano che dal meccanismo finale, e non dai meccanismi intermedi attraversati durante la trasformazione. Per studiare questa questione, noi supporremo in seguito, che il meccanismo, anziché da un solo parametro, dipenda da due, λ e μ . Invece che da un sistema di equazioni differenziali ordinarie, la dipendenza delle caratteristiche da λ e μ , sarà allora naturalmente espressa da un sistema di equazioni ai differenziali totali; e le condizioni perché i valori finali delle caratteristiche non dipendano dalla via seguita durante la trasformazione nel piano λ, μ , coincidono quindi con le condizioni di integrabilità illimitata di questo sistema. Noi dimostreremo che queste condizioni, per i sistemi quasi-ergodici sono effettivamente verificate, invece per i sistemi con più di una caratteristica in generale no, benché vi siano importanti classi di eccezioni.

§ 4.

Prima di passare allo studio delle trasformazioni adiabatiche ci conviene premettere alcune formule, che servono a calcolare la probabilità che, ad un istante qualunque, il punto rappresentativo si trovi in un certo ele-

(6) P. HERTZ, « Ann. d. Phys. », 33, 225, 537 (1910). WEBER, GANS, « Repertorium der Physik », I, 2 (1916). A questi lavori rimandiamo per qualche schiarimento relativo alla parte statistica del testo.

mento di G . Indichiamo perciò, per uniformità, con x_1, x_2, \dots, x_{2f} , invece che con $p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f$ le coordinate di Γ . Il nostro problema può allora così formularsi: cercare la probabilità che ad un certo istante $x_1, x_2, \dots, x_{2f-m}$ abbiano valori compresi tra x_1 ed $x_1 + dx_1, x_2$ ed $x_2 + dx_2, \dots, x_{2f-m}$ ed $x_{2f-m} + dx_{2f-m}$, mentre naturalmente le m rimanenti x prendono i valori necessari perché il punto rappresentativo appartenga a G .

Ora si sa dalla meccanica statistica che, in conseguenza del teorema di Liouville, perché una distribuzione di punti nello spazio Γ sia stazionaria, è necessario che la loro densità in Γ abbia, sopra ciascuna delle G , valore costante.

Ora un elemento di volume di Γ può scriversi $dx_1, dx_2, \dots, dx_{2f}$, ma anche, prendendo come nuove variabili $x_1, x_2, \dots, x_{2f-m}, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$ esso si può scrivere $\frac{1}{D} dx_1, \dots, dx_{2f-m} d\Phi_1, \dots, d\Phi_m$, avendo con D rappresentato il determinante funzionale $\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_m)}{\partial(x_{2f-m+1}, \dots, x_{2f})}$. E siccome durante il movimento $d\Phi_1, d\Phi_2, \dots, d\Phi_m$ restano naturalmente costanti, il detto elemento di volume risulta proporzionale a $\frac{1}{D} dx_1, \dots, dx_{2f-m}$.

La probabilità cercata è dunque anch'essa proporzionale a quest'espressione; e siccome poi la probabilità totale è naturalmente $= 1$, si trova infine che la probabilità cercata è eguale a:

$$(1) \quad \frac{\frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}}$$

avendo per brevità posto $d\sigma = dx_1, dx_2, \dots, dx_{2f-m}$, ed essendo l'integrale esteso a tutti quei valori di $x_1, x_2, \dots, x_{2f-m}$ che corrispondono a punti di G .

Prima di abbandonare quest'argomento, vogliamo ancora dedurre una formula che ci servirà nel caso dei sistemi quasi-ergodici. In questo caso la G è un'ipersuperficie, e noi supporremo per semplicità che essa sia chiusa, e tale da essere incontrata in un sol punto dai raggi vettori uscenti da un polo interno ad essa, poiché la considerazione generale, pur non essendo essenzialmente diversa, porta a calcoli alquanto più complicati. Riferiamo lo spazio Γ a coordinate polari, caratterizzandone ogni punto per mezzo del suo raggio vettore, e della traccia di questo sopra la ipersfera di raggio r descritta attorno al polo. Indichiamo con H l'unica caratteristica, cioè la energia. In conformità a quanto si è detto, la probabilità che ad un certo istante il punto rappresentativo si trovi compreso entro un elemento di angolo solido $d\omega$ è proporzionale all'ipervolume compreso tra le due ipersuperfici $H(x_1, \dots, x_{2f}) = H$ ed $H(x_1, \dots, x_{2f}) = H + dH$, e l'angolo solido $d\omega$. Questo volume, a meno del fattore costante dH , è evidentemente $\frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r}$, dove si è posto $H_r = \frac{\partial H}{\partial r}$; e dovendo al solito la probabilità totale essere $= 1$,

si trova che la probabilità cercata è data da:

$$(2) \quad \frac{r^{2f-1} \frac{d\omega}{H_r}}{\int r^{2f-1} \frac{d\omega}{H_r}}$$

essendo l'integrale esteso a tutta la sfera unitaria.

§ 5.

In questo paragrafo supporremo che il meccanismo del nostro sistema sia funzione di un parametro μ e ci proponiamo di studiare come variano le caratteristiche variando adiabaticamente questo parametro. Siccome il meccanismo dipende da μ , in generale anche le caratteristiche $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$, oltre che delle p e delle q , saranno funzioni anche di μ . Se dunque ad un certo istante il parametro μ varia di $d\mu$, la caratteristica Φ_i subirà corrispondentemente la variazione $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu} d\mu$. E siccome poi la variazione è adiabatica, per aver la variazione effettiva di Φ_i bisognerà prendere il valor medio di questa espressione che, in conformità ai risultati del § precedente, risulta:

$$(3) \quad d\mu \frac{\int \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu} \frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}}$$

che non è più funzione altro che di μ e delle Φ_1, \dots, Φ_m . La dipendenza delle caratteristiche da μ in una trasformazione adiabatica viene perciò espressa dal sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$(4) \quad \frac{d\Phi_1}{d\mu} = \frac{\int \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu} \frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}}; \quad \frac{d\Phi_2}{d\mu} = \frac{\int \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu} \frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}}; \quad \dots; \quad \frac{d\Phi_m}{d\mu} = \frac{\int \frac{\partial \Phi_m}{\partial \mu} \frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}}.$$

Se si conoscono i valori delle Φ , per esempio per $\mu = 0$, l'integrazione di questo sistema ce ne fa conoscere i valori per μ qualunque. Nel caso particolare dei sistemi quasi-ergodici il sistema (4) si riduce all'unica equazione:

$$(5) \quad \frac{dH}{d\mu} = \frac{\int \frac{H_\mu}{H_r} r^{2f-1} d\omega}{\int \frac{d\omega}{H_r} r^{2f-1}}$$

nella quale si è posto $H_\mu = \frac{\partial H}{\partial \mu}$.

§ 6.

Vogliamo ora studiare, in quali casi i valori finali delle caratteristiche siano indipendenti dalla via seguita nel passare adiabaticamente dal meccanismo iniziale a quello finale. Perciò rappresenteremo il meccanismo del

sistema in funzione di due parametri λ e μ . Se si variano adiabaticamente questi due parametri rispettivamente di $d\lambda$ e di $d\mu$, la stessa considerazione del § precedente ci mostra che la corrispondente variazione delle caratteristiche è:

$$(6) \quad d\Phi_i = \frac{\int \frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} \frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}} d\lambda + \frac{\int \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu} \frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}} d\mu \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

i coefficienti di $d\lambda$ e di $d\mu$ sono evidentemente funzioni soltanto di $\lambda, \mu, \Phi_1, \dots, \Phi_m$ e quindi le m equazioni (6) rappresentano un sistema di equazioni ai differenziali totali; se esso risulterà illimitatamente integrabile i valori finali delle Φ saranno effettivamente indipendenti dalla via seguita durante la trasformazione, altrimenti no.

Vogliamo dimostrare che, per i sistemi quasi-ergodici la condizione di integrabilità illimitata è soddisfatta. Per questi sistemi il sistema (6) si riduce infatti ad un'unica equazione ai differenziali totali, costruita analogamente alla (5)

$$(7) \quad dH = Ld\lambda + Md\mu$$

dove si è posto

$$(8) \quad L = \frac{\int \frac{r^{2f-1} H_\lambda d\omega}{H_r}}{\int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r}} \quad ; \quad M = \frac{\int \frac{r^{2f-1} H_\mu d\omega}{H_r}}{\int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r}}$$

e quindi L ed M rappresentano delle funzioni di λ, μ ed H .

Per l'integrabilità illimitata della (7) è come si sa necessario e sufficiente che le derivate totali di L rispetto a μ , e di M rispetto a λ siano eguali, dunque deve essere

$$(9) \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} + M \frac{\partial L}{\partial H} = \frac{\partial M}{\partial \lambda} + L \frac{\partial M}{\partial H} .$$

Per dimostrare che quest'eguaglianza è effettivamente soddisfatta, cominciamo col calcolarne il primo membro. Supponiamo perciò di dare ad H ed a μ delle variazioni indipendenti $\delta H, \delta \mu$, lasciando λ invariato; si avrà allora

$$(10) \quad \delta L = \frac{\partial L}{\partial H} \delta H + \frac{\partial L}{\partial \mu} \delta \mu .$$

D'altra parte, dalla prima delle (8) si rileva che:

$$(11) \quad \delta L = \frac{1}{\left(\int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r}\right)^2} \left\{ \left(\int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r}\right) \delta \int \frac{r^{2f-1} H_\lambda d\omega}{H_r} - \left(\int \frac{r^{2f-1} H_\lambda d\omega}{H_r}\right) \delta \int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r} \right\} .$$

Nel calcolare le due variazioni di integrali, contenute in parentesi graffa, si possono senz'altro scambiare i segni δ ed \int , poiché dovendo l'integrale

estendersi a tutta l'ipersfera unitaria, i suoi limiti non variano. Si ha perciò:

$$(12) \quad \delta \int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r} = (2f-1) \int \frac{r^{2f-2} \delta r d\omega}{H_r} - \int \frac{r^{2f-1} \delta H_r d\omega}{H_r^2}.$$

D'altra parte, restando invariata la traccia sopra la sfera unitaria, si ha:

$$\delta H = H_r \delta r + H_\mu \delta \mu$$

da cui

$$\delta r = \frac{\delta H}{H_r} - \frac{H_\mu}{H_r} \delta \mu$$

ed anche

$$\delta H_r = H_{rr} \delta r + H_{r\mu} \delta \mu = \frac{H_{rr}}{H_r} \delta H + \left(H_{r\mu} - \frac{H_{rr} H_\mu}{H_r} \right) \delta \mu.$$

Sostituendo in (12) queste espressioni di δr , δH_r , si trova

$$\begin{aligned} \delta \int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r} &= \delta H \left\{ (2f-1) \int \frac{r^{2f-2} d\omega}{H_r^2} - \int \frac{r^{2f-1} H_{rr} d\omega}{H_r^3} \right\} \\ &- \delta \mu \left\{ (2f-1) \int \frac{r^{2f-2} H_\mu d\omega}{H_r^2} + \int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r^2} \left(H_{\mu r} - \frac{H_\mu H_{rr}}{H_r} \right) \right\}. \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si trova:

$$\begin{aligned} \delta \int \frac{r^{2f-1} H_\lambda d\omega}{H_r} &= \delta H \left\{ (2f-1) \int \frac{r^{2f-2} H_\lambda d\omega}{H_r^2} + \int \frac{r^{2f-1} H_{\lambda r} d\omega}{H_r^2} \right. \\ &- \left. \int \frac{r^{2f-1} H_\lambda H_{rr} d\omega}{H_r^3} \right\} + \delta \mu \left\{ - (2f-1) \int \frac{r^{2f-2} H_\lambda H_\mu d\omega}{H_r^2} \right. \\ &+ \left. \int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r} \left(H_{\lambda \mu} - \frac{H_{\lambda r} H_\mu}{H_r} \right) - \int \frac{r^{2f-1} H_\lambda d\omega}{H_r^2} \left(H_{\mu r} - \frac{H_\mu H_{rr}}{H_r} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Sostituendo in (11) queste due ultime espressioni, e confrontando poi con la (10) si trova infine:

$$\frac{\partial L}{\partial H} = \frac{1}{\left(\int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r} \right)^2} \left[\begin{aligned} &\left(\int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r} \right) \left\{ (2f-1) \int \frac{r^{2f-2} H_\lambda d\omega}{H_r^2} \right. \\ &+ \left. \int \frac{r^{2f-1} H_{\lambda r} d\omega}{H_r^2} - \int \frac{r^{2f-1} H_\lambda H_{rr} d\omega}{H_r^3} \right\} \\ &- \left(\int \frac{r^{2f-1} H_\lambda d\omega}{H_r} \right) \left\{ (2f-1) \int \frac{r^{2f-2} d\omega}{H_r^2} \right. \\ &- \left. \int \frac{r^{2f-1} H_{rr} d\omega}{H_r^3} \right\} \end{aligned} \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{1}{\left(\int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r}\right)^2} \left[\begin{aligned} & \left(\int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r}\right) \left\{ -(2f-1) \int \frac{r^{2f-2} H_\lambda H_\mu d\omega}{H_r^2} \right. \\ & + \int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r} \left(H_{\lambda\mu} - \frac{H_{\lambda r} H_{\mu r}}{H_r} \right) \\ & - \int \frac{r^{2f-1} H_\lambda d\omega}{H_r^2} \left(H_{\mu r} - \frac{H_\mu H_{rr}}{H_r} \right) \left. \right\} \\ & - \left(\int \frac{r^{2f-1} H_\lambda d\omega}{H_r}\right) \left\{ (2f-1) \int \frac{r^{2f-2} H_\mu d\omega}{H_r^2} \right. \\ & + \int \frac{r^{2f-1} d\omega}{H_r^2} \left(H_{\mu r} - \frac{H_\mu H_{rr}}{H_r} \right) \left. \right\} \end{aligned} \right].$$

Queste due ultime equazioni, insieme alla seconda delle (8) ci forniscono tutti gli elementi per calcolare il primo membro di (9). Effettivamente, si riconosce subito che in esso λ e μ figurano simmetricamente; esso sarà dunque certo eguale al secondo membro; e dunque la (9) è verificata.

Possiamo dunque concludere che per i sistemi quasi-ergodici, il valore che assume l'energia alla fine di una trasformazione adiabatica, non dipende affatto dai meccanismi intermedi della trasformazione.

§ 7.

Torniamo ora ad occuparci dei sistemi con più di una caratteristica. Perché anche per questi sistemi le caratteristiche finali fossero indipendenti dai meccanismi intermedi della trasformazione, dovrebbero essere verificate identicamente le condizioni di integrabilità illimitata del sistema ai differenziali totali (6). Se però, con un calcolo naturalmente alquanto più complicato, ma non essenzialmente dissimile da quello svolto nel § precedente, si formano effettivamente queste condizioni di integrabilità, si trova che in generale esse *non* sono soddisfatte. Piuttosto però che riportar qui questo lungo calcolo, preferiamo mostrare la cosa sopra l'esempio di un semplice sistema con due caratteristiche. L'esempio che scegliamo è molto analogo ad un altro, da me recentemente svolto in una nota sul principio delle adiabatiche.

Da un'origine O , tracciamo in un piano due assi ortogonali x, y . Presi poi nel primo quadrante due punti P, Q abbassiamo da essi le perpendicolari PA, PB, QC, QD sopra gli assi. Supporremo che P sia interno al rettangolo $OC QD$.

Pensiamo ora che nell'interno del poligono concavo $APBDQCA$ si muova un punto materiale, sotto l'azione di nessuna forza; che però rimbalzi elasticamente urtando contro le pareti del poligono. I valori assoluti u, v delle componenti della velocità del punto sugli assi x, y restano evidentemente costanti durante il movimento, e quindi il sistema ha due caratteristiche. Supponiamo poi di mantenere fisso il punto Q (di coordinate a, b) e di poter invece muovere il punto P (di coordinate λ, μ). Avremo così effetti-

vamente realizzato un sistema meccanico con due caratteristiche u, v e dipendente da due parametri λ, μ .

Con facili considerazioni, analoghe ad altre svolte nella nota sopra citata, si trova che, variando adiabaticamente la posizione del punto P, u e v variano con la seguente legge:

$$d \log u = \frac{2 \mu d\lambda}{ab - \lambda \mu} \quad ; \quad d \log v = \frac{2 \lambda d\mu}{ab - \lambda \mu} .$$

Evidentemente nessuna di queste due equazioni è illimitatamente integrabile; e perciò i valori che u e v assumono alla fine di una trasformazione dipendono anche dal cammino percorso dal punto P.

In generale dunque non è possibile applicare a sistemi con più caratteristiche il principio di Ehrenfest.

§ 8.

A questa regola esistono però alcune importanti classi di eccezioni, che ci proponiamo di studiare in questo paragrafo. La prima e più importante è quella dei sistemi con coordinate angolari, dei quali non solo si sa, in ordine ai teoremi di Burgers, che il principio di Ehrenfest è applicabile, nel senso che conduce in ogni caso a condizioni finali determinate, ma per i quali il detto principio resta anche *verificato dall'esperienza* come conseguenza logica delle condizioni di Sommerfeld, le quali hanno a loro sostegno tutta la teoria e l'esperienza fatte sopra l'atomo di idrogeno.

Un'altra notevole classe di eccezioni alle conclusioni del § 7, è la seguente: Supponiamo che delle m caratteristiche del nostro sistema una soltanto: l'energia, dipenda esplicitamente dai parametri λ, μ del meccanismo. Io dico che per questi sistemi, alla fine di ogni trasformazione adiabatica, l'energia assume un valore indipendente dai meccanismi intermedi, mentre le altre caratteristiche restano addirittura invariate.

Che tutte le caratteristiche, all'infuori dell'energia restino invariate risulta evidente dal fatto che, non contenendo esplicitamente i parametri, esse restano invariate in ogni processo elementare della trasformazione; od anche del resto dal sistema (6), poiché se Φ_i è una di queste caratteristiche: si ha per ipotesi $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu} = 0$.

Per dimostrare che il valore finale dell'energia non dipende dalla via percorsa durante la trasformazione nel piano λ, μ , si potrebbe fare una considerazione del genere di quella svolta nel § 6. Ma è più semplice osservare che, per le ipotesi fatte, si può, con una trasformazione canonica *indipendente dai parametri*, fare in modo che le caratteristiche indipendenti dai parametri, vengano ad essere coordinate di Γ . Ciò fatto la considerazione del § 6, si può ripetere parola per parola, e le caratteristiche costanti figurano in essa semplicemente come dei parametri costanti.

I sistemi di questo tipo si presentano abbastanza spesso nelle applicazioni; per esempio appartengono ad esso tutti quei sistemi che posseggono, quali unici integrali primi uniformi e indipendenti dal tempo, oltre all'energia, qualche integrale della conservazione delle quantità di moto o delle

quantità di moto areale, perché questi ultimi sono sempre indipendenti dai parametri del meccanismo.

§ 9.

Quanto ad una possibile applicazione di quanto si è detto, alla teoria dei quanti, osserviamo quanto segue:

Resta dalle nostre conclusioni esclusa la possibilità di un'estensione del principio di Ehrenfest ai sistemi non quasi-ergodici, salve le eccezioni indicate. Per i sistemi quasi-ergodici invece, oppure per le eccezioni studiate nel § 8, tale applicazione non è a priori esclusa, benché naturalmente non si possa per ora prevedere se l'esperienza ne debba confermare i risultati; comunque si potrebbe forse tentare se, per questa via, non si riuscisse ad avere qualche utile informazione sopra la forma delle regole per la determinazione delle orbite quantiche per i sistemi senza coordinate angolari. Naturalmente il solo principio di Ehrenfest, se anche l'esperienza dovesse confermarlo in questa sua applicazione più generalizzata, non è di per se stesso sufficiente alla determinazione di tali regole, permettendo solo, quando si conoscano le orbite privilegiate di un certo sistema, di dedurle anche per tutti quei sistemi che da esso possono dedursi con una trasformazione adiabatica. Esso potrebbe dunque forse servire, a parte la complicazione dei calcoli, a trovare le relazioni quantitative tra gli spettri di scintilla per esempio dei metalli alcalini e quelli d'arco dei gas nobili. Poiché i sistemi che emettono questi spettri differiscono solo per la carica del nucleo, e possono quindi con facilità trasformarsi adiabaticamente uno nell'altro.

Göttingen, Aprile 1923.

N° 14.

The problem of equilibrium between photons and electrons in a black cavity originated in Fermi's mind from reading Richardson's « Electron Theory of Matter ». For some time Fermi had in mind to make experiments, or to have somebody else in the Institute make experiments, on the discontinuity suggested by his theory. Then he dropped the matter.

G. POLVANI.

14.

SULLA TEORIA STATISTICA DI RICHARDSON DELL'EFFETTO FOTOELETTRICO

« Nuovo Cimento », 26, 97-104 (1923).

Consideriamo una cavità in un corpo a temperatura uniforme.

In essa si troveranno degli elettroni, e la radiazione nera corrispondente a quella temperatura. Urtando contro le pareti della cavità gli elettroni potranno essere riassorbiti dal corpo, mentre nuovi elettroni, per l'effetto fotoelettrico della radiazione nera verranno dal corpo rimandati nella cavità. Tra questi due processi di assorbimento e di emissione degli elettroni dovrà sussistere equilibrio. Scrivendo appunto questo Richardson⁽¹⁾ è stato condotto ad un'equazione integrale avente per incognita la funzione $\varphi(\nu)$ che, a meno del potere emissivo del corpo, rappresenta il numero di elettroni che viene emesso per effetto fotoelettrico quando viene assorbita l'energia luminosa Γ di frequenza ν . Risolvendo l'equazione integrale si arriva all'interessante risultato che:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(\nu) = 0 & \text{per } h\nu \leq w_0 \\ \varphi(\nu) = H \left(\frac{h}{\nu^2} - \frac{w_0}{\nu^3} \right) & \text{per } h\nu \geq w_0. \end{array} \right.$$

Dove h è la costante di Planck, H una costante e w_0 è l'energia necessaria a liberare un elettrone dall'interno del corpo. Questo risultato è molto interessante, perché dà una chiara interpretazione del fatto che l'emissione fotoelettrica non avviene che quando la frequenza della luce supera un limite, w_0/h , ossia della legge di Einstein. Nella sua teoria tuttavia il Richardson,

(1) RICHARDSON, « Phil. Mag. », 23, 594 (1912); oppure « Electron Theory of Matter », Cap. XVIII. - « Phil. Mag. », 27, 176 (1914). Esperienze destinate alla verifica sperimentale della teoria, si trovano in lavori di Richardson, Compton e altri, nel « Phil. Mag. » (1914-17).

per semplificare un po' le cose, si serve, come formula per la radiazione del corpo nero, anziché della formula di Planck,

$$\frac{8 \pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/RT} - 1}$$

di un'altra espressione, dovuta a Wien, precisamente

$$\frac{8 \pi}{c^3} h\nu^3 e^{-h\nu/RT}.$$

Come si sa le formule di Planck e di Wien vengono a coincidere per frequenze elevate.

In questo lavoro ricercheremo le modificazioni che subisce la teoria di Richardson servendosi della formula di Planck; e mostreremo dapprima che, anche con la formula di Planck, vale rigorosamente il risultato che $\varphi(\nu)$ è zero per $h\nu < w_0$. In secondo luogo mostreremo che, mentre secondo Richardson $\varphi(\nu)$ per $h\nu > w_0$ si mantiene continua con la sua derivata prima, applicando la formula di Planck quest'ultima ha delle discontinuità, salvo eccezioni, per tutti i valori di ν per i quali $h\nu = n w_0$, essendo n un numero intero. Questo risultato, assai caratteristico ed inaspettato, può in certo modo interpretarsi forse dal punto di vista della teoria dei quanti; in quanto è facile comprendere che, via via che $h\nu$ raggiunge i vari multipli interi di w_0 comincino a farsi sentire nuove azioni che provocano le discontinuità di cui si è parlato. Dal punto di vista sperimentale, benché si possa ormai dire con sicurezza che né la presente teoria, né quella di Richardson danno un risultato concordante con l'esperienza, si potrebbe forse sperar di trovare la discontinuità qualitativa per

$$h\nu = 2 w_0,$$

ma non pare che il materiale sperimentale finora raccolto sopra l'emissione fotoelettrica in funzione della lunghezza d'onda, sia sufficientemente esteso e sicuro da permettere un controllo del risultato teorico.

Da un altro punto di vista si può osservare che, come più volte e da più parti ⁽²⁾ è già stato messo in evidenza, tra la formula di Planck e quella di Wien esiste una specie di parallelismo, nel senso che la prima può considerarsi frutto dell'aver ammesso possibili i livelli di energia $n h \nu$; la seconda invece dell'aver ammesso solo il livello di energia $h \nu$. Da questo punto di vista meraviglia meno la differenza qualitativa che si trova applicando l'una o l'altra formula.

Ricordiamo per sommi capi il ragionamento di Richardson: sia T la temperatura assoluta, n il numero di elettroni esistenti per unità di volume nella cavità. Facili considerazioni termodinamiche conducono a scrivere:

$$(2) \quad n = AT^{3/2} e^{-w_0/RT}$$

essendo A una costante. La velocità degli elettroni è proporzionale a $T^{1/2}$, perciò il numero N di elettroni che penetrano dalla cavità nel corpo nell'unità

(2) Vedi per esempio le considerazioni recenti di De Broglie, *C. R.*, fasc. 19 (1922).

di tempo sarà proporzionale ad $n T^{3/2}$; ossia, indicando con B un coefficiente, che dipende anche dagli elementi geometrici della cavità si avrà:

$$(3) \quad N = BT^2 e^{-w_0/RT}.$$

Ora Richardson ammette che quando il corpo assorbe la energia luminosa dq di frequenza ν esso metta in libertà per effetto fotoelettrico $f(\nu) dq$ elettroni. Se con $L(\nu, T)$ indichiamo la legge di distribuzione dell'energia raggiante nello spettro del corpo nero, e con $\varepsilon(\nu)$ il potere assorbente del corpo la quantità totale di elettroni fotoelettrici liberati sarà proporzionale a:

$$\int_0^{\infty} L(\nu, T) \varepsilon(\nu) f(\nu) d\nu$$

ossia, ponendo

$$\varphi(\nu) = \varepsilon(\nu) f(\nu),$$

N risulterà proporzionale a:

$$\int_0^{\infty} L(\nu, T) \varphi(\nu) d\nu.$$

Indicando con K una costante si dovrà dunque avere

$$(4) \quad KT^2 e^{-w_0/RT} = \int_0^{\infty} L(\nu, T) \varphi(\nu) d\nu.$$

Ora Richardson ammette, come si è detto, che $L(\nu, T)$ abbia la forma data da Wien, cioè

$$L(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-h\nu/RT}.$$

La (4) si trasforma così nell'equazione integrale:

$$CT^2 e^{-w_0/RT} = \int_0^{\infty} \nu^3 e^{-h\nu/RT} \varphi(\nu) d\nu \quad (C = \text{costante})$$

che ha appunto per soluzione le (1), dove si ponga

$$H = \frac{Ch}{R^2}.$$

Se invece della legge di Wien adottiamo quella di Planck, poniamo cioè:

$$(5) \quad L(\nu, T) = \frac{8\pi h}{h^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/RT} - 1}$$

la (4) ci dà l'equazione integrale:

$$(6) \quad CT^2 e^{-w_0/RT} = \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 \varphi(\nu) d\nu}{e^{h\nu/RT} - 1}.$$

Per trasformarla un poco cominciamo col porre

$$x = \frac{1}{RT};$$

allora la (6) diventa:

$$(6bis) \quad \frac{C}{R^2} \frac{e^{-w_0 x}}{x^2} = \int_0^{\infty} \frac{v^3 \varphi(v) dv}{e^{h\nu x} - 1}.$$

È facile dimostrare, con una verifica diretta, che la soluzione della (6 bis) è la seguente

$$(6'') \quad \varphi(v) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(v)$$

dove

$$(6''') \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_j(v) = 0 \quad , \quad \text{per } v \leq j \frac{w_0}{h} \\ \varphi_j(v) = A_j \left(\frac{h}{v^2} - \frac{w_0}{v^3} \right) \quad , \quad \text{per } v \geq j \frac{w_0}{h} . \end{array} \right.$$

A_j ha sempre uno dei tre valori $\pm H/j^2$, 0; e precisamente si ha $A_j = (-1)^n H/j^2$ se $j = p_1, p_2, \dots, p_n$, dove i p_i sono numeri primi tutti diversi tra di loro; se invece j è divisibile per il quadrato di un numero primo si ha sempre $A_j = 0$. Si ha dunque

$$A_1 = H \quad ; \quad A_2 = -H/4 \quad ; \quad A_3 = -H/9 \quad ; \quad A_4 = 0 ; \\ A_5 = -H/25 \quad ; \quad A_6 = H/36 ; \dots$$

Di qui si vede che la derivata di $\varphi(v)$ deve, come si è annunziato, essere discontinua per tutti i multipli di w_0/h , salvo quelli secondo 4, 8, 9, 12, ... Le considerazioni che seguono, benché sprovviste di un eccessivo rigore analitico, sono destinate a far vedere la ragione per la quale queste successive discontinuità si presentano. Moltiplichiamo ambo i membri della (6 bis) per $e^{w_0 x} dx$ ed integriamo poi tra $x = y$ ed $x = \infty$. Scambiando le quadrate nel secondo membro, ed effettuandole nel primo si trova:

$$(7) \quad \frac{C}{R^2 y} = \int_0^{\infty} v^3 \varphi(v) dv \int_y^{\infty} \frac{e^{w_0 x} dx}{e^{h\nu x} - 1}.$$

Ora il secondo integrale del secondo membro, come si vede subito è proprio soltanto quando $h\nu > w_0$. Dovrà dunque certamente $\varphi(v)$ essere = 0 tutte le volte che $h\nu \leq w_0$. E questo esprime appunto la legge di Einstein.

Volendo ulteriormente determinare $\varphi(v)$ anche per

$$v > \frac{w_0}{h},$$

trovare cioè la formula corrispondente alla seconda delle (1), osserveremo che, per quanto or ora abbiamo visto basta intanto limitarsi ai valori di

$$v > \frac{w_0}{h} \quad \text{per i quali} \quad \frac{h\nu}{RT}$$

è, almeno per temperature normali, molto grande. Trascurando dunque i quadrati di $e^{-h\nu/RT}$ scriveremo la (6 bis).

$$(8) \quad \frac{C}{R^2} \frac{e^{-w_0 x}}{x^2} = \int_{w_0/h}^{\infty} v^3 \varphi(v) (e^{-h\nu x} + e^{-2h\nu x}) dv.$$

Dove il limite inferiore dell'integrale è, in virtù della legge di Einstein, sostituito con w_0/h . Proviamo a risolverla ponendo:

$$(9) \quad \varphi(v) = H \left(\frac{h}{v^2} - \frac{w_0}{v^3} \right) + \psi(v)$$

dove supporremo che $\psi(v)/\varphi(v)$ abbia l'ordine di grandezza di $e^{-h\nu/RT}$.

Tenendo presente che $H = \frac{Ch}{R^2}$ si trova allora per $\psi(v)$ la equazione integrale (trascurando, per la nostra approssimazione il prodotto $\psi(v) e^{-h\nu/RT}$)

$$\int_{w_0/h}^{\infty} v^3 \psi(v) e^{-h\nu x} dv + \frac{ch}{R^2} \int_{w_0/h}^{\infty} (h\nu - w_0) e^{-2h\nu x} dv = 0$$

che, con ovvie trasformazioni, diventa:

$$\int_{w_0/h}^{\infty} v^3 \psi(v) e^{-h\nu x} dv + \frac{c}{4R^2} \frac{e^{-2w_0 x}}{x^2} = 0.$$

La sua soluzione è evidentemente:

$$(10) \quad \begin{cases} \psi(v) = 0 & \text{per } h\nu \leq 2w_0 \\ \psi(v) = -\frac{H}{4} \left(\frac{h}{v^2} - \frac{2w_0}{v^3} \right) & \text{per } h\nu > 2w_0. \end{cases}$$

Tenendo presente la (9) si trova dunque per $\varphi(v)$ la soluzione seguente:

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi(v) = 0 & \text{per } h\nu < w_0 \\ \varphi(v) = H \left(\frac{h}{v^2} - \frac{w_0}{v^3} \right) & \text{per } w_0 < h\nu < 2w_0 \\ \varphi(v) = H \left(\frac{3}{4} \frac{h}{v^2} - \frac{w_0}{2v^3} \right) & \text{per } 2w_0 < h\nu. \end{cases}$$

Ed abbiamo così trovata la discontinuità anche nel punto

$$h\nu = 2w_0.$$

Possiamo però facilmente vedere che, spingendo convenientemente l'approssimazione si trova salvo eccezioni discontinuità in tutti i punti

$$h\nu = nw_0.$$

Infatti scriviamo le due equazioni integrali corrispondenti alla (8) che si ottengono trascurando rispettivamente la n -esima e la $n+1$ -esima potenza di $e^{-h\nu/RT}$, cioè:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{C}{R^2} \frac{e^{-w_0 x}}{x^2} = \int_{w_0/h}^{\infty} v^3 \varphi(v) (e^{-h\nu x} + e^{-2h\nu x} + \dots + e^{-(n-1)h\nu x}) dv \\ \frac{C}{R^2} \frac{e^{-w_0 x}}{x^2} = \int_{w_0/h}^{\infty} v^3 \varphi(v) (e^{-h\nu x} + e^{-2h\nu x} + \dots + e^{-nh\nu x}) dv. \end{cases}$$

Indichiamo con $\varphi^*(v)$ la soluzione della prima, e con

$$\varphi^*(v) + \psi(v)$$

quella della seconda. Sostituendo nella seconda

$$\varphi^*(\nu) + \psi(\nu),$$

al posto di $\varphi(\nu)$, e tenendo presente che $\varphi^*(\nu)$ è soluzione della prima si trova:

$$\int_{\frac{w_0}{h}}^{\infty} \nu^3 \psi(\nu) \{ e^{-h\nu x} + e^{-2h\nu x} + \dots + e^{-nh\nu x} \} d\nu + \int_{\frac{w_0}{h}}^{\infty} \nu^3 \varphi^*(\nu) e^{-nh\nu x} d\nu = 0.$$

Moltiplichiamo questa equazione per $e^{nw_0 x} dx$ ed integriamo tra

$$x = y \text{ ed } x = \infty$$

scambiando le quadrature. Si ha:

$$\int_{\frac{w_0}{h}}^{\infty} \nu^3 \psi(\nu) d\nu \left\{ \int_y^{\infty} e^{-(h\nu - nw_0)x} dx + \dots + \int_y^{\infty} e^{-(nh\nu - nw_0)x} dx \right\} \\ + \int_{\frac{w_0}{h}}^{\infty} \nu^3 \varphi^*(\nu) d\nu \int_y^{\infty} e^{-n(h\nu - w_0)x} dx = 0.$$

Ora l'integrale del secondo termine è certo proprio, perché

$$\nu > \frac{w_0}{h},$$

quelli del primo invece lo sono quando

$$h\nu > nw_0.$$

Dovrà dunque $\psi(\nu)$ esser zero fino che

$$h\nu < nw_0.$$

Da ciò ha origine la discontinuità nel punto

$$h\nu = nw_0.$$

Roma, novembre 1922.

15.

GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI POINCARÉ SOPRA LA NON ESISTENZA DI INTEGRALI UNIFORMI DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI CANONICHE NORMALI

«Nuovo Cimento», 26, 105-115 (1923).

§ 1.

Consideriamo un sistema meccanico, con n gradi di libertà, caratterizzato da $2n$ variabili coniugate canonicamente,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Ammettiamo poi le seguenti proprietà:

1^a L'energia F è indipendente dal tempo.

2^a Oltre alle variabili x, y , la F contiene anche un parametro μ , ed è una funzione analitica uniforme di queste variabili, che può, per valori sufficientemente piccoli di μ , svilupparsi in serie di potenze di questo parametro, così che:

$$(1) \quad F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

essendo le F_i funzioni soltanto delle x e delle y .

3^a La posizione del sistema, e per conseguenza anche F e le F_i , dipendono periodicamente con periodo 2π dalle x_1, x_2, \dots, x_n .

4^a F_0 è funzione soltanto delle y .

Le equazioni canoniche di questo sistema si chiamano, come si sa, equazioni canoniche normali, e ad esse si riconducono tra l'altro tutti i problemi delle perturbazioni, studiati nella meccanica celeste. Con espressione presa dalla meccanica celeste chiameremo sistema imperturbato, quello a cui si riduce il nostro sistema per $\mu = 0$.

Poincaré⁽¹⁾ ha dimostrato che un sistema di equazioni canoniche normali, oltre all'integrale della conservazione dell'energia, non può in generale ammettere alcun altro integrale primo analitico uniforme e *indipendente dal tempo*.

(1) POINCARÉ, «Méthodes nouvelles de la mécanique céleste», Vol. 1, Cap. 5. A questa opera rimandiamo anche per le notazioni e gli schiarimenti relativi al testo.

Geometricamente ciò significa, che nello spazio Γ a $2n$ dimensioni, nel quale con un punto sono rappresentati posizione e momenti del sistema, all'infuori delle ipersuperfici $F = \text{cost.}$ non ci può in generale essere alcuna altra famiglia di ipersuperfici tali che la traiettoria del punto rappresentativo uscente da un punto di una di esse resti sempre sopra la superficie stessa.

Ci proponiamo in questo lavoro di generalizzare tale teorema dimostrando che se $n > 2$ all'infuori delle $F = \text{cost.}$ non esiste in generale neanche una sola ipersuperficie S_μ analitica uniforme, tale da contenere tutte le traiettorie del punto rappresentativo uscenti dai suoi punti. L'enunciato non geometrico può così formularsi: È in generale impossibile trovare una funzione $\Phi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \mu)$ analitica uniforme (e quindi anche periodica nelle x) tale che, essendo inizialmente $\Phi = 0$, si mantenga durante tutto il movimento $\Phi = 0$, in virtù delle equazioni canoniche, a meno che da $\Phi = 0$ non segua identicamente $F = \text{cost.}$

§ 2.

Supponiamo dunque che la superficie S_μ , di equazione $\Phi(x, y, \mu) = 0$ goda delle proprietà indicate. Noi dimostreremo allora che in generale S_μ deve coincidere con una $F = \text{costante}$. Nella dimostrazione cercheremo il più possibile di attenerci all'analogia dimostrazione di Poincaré.

Sviluppiamo Φ in serie di potenze di μ , e sia:

$$(2) \quad \Phi = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \dots$$

dove le Φ_i , sono funzioni delle x e delle y . Osserviamo subito che, se anche è conosciuta la posizione di S_μ per tutti i valori di μ , le Φ_i non restano perciò completamente determinate. E precisamente Φ_0 è sottoposta alla sola condizione di doversi annullare sopra S_0 , e del resto arbitraria, sceltala comunque, Φ_1 resta determinata sopra S_0 (dalla condizione che per μ infinitamente piccolo le due superfici S_μ , e, $\Phi_0 + \mu\Phi_1 = 0$ debbono differire per termini dell'ordine di μ^2) e del resto arbitraria; sceltala, all'infuori di S_0 , a piacere, Φ_2 resta determinata sopra S_0 e del resto arbitraria, e così di seguito.

Io dico ora che Φ_0 può sempre scegliersi indipendente dalle x . Dopo quanto si è detto basta perciò dimostrare che tutti i punti che hanno le coordinate y a comune con un punto di S_0 , appartengono pure ad S_0 . Ora se P_0 è un punto di S_0 , S_0 deve contenere tutta la traiettoria del punto rappresentativo, relativa al sistema imperturbato, che parte da P_0 . Siccome F_0 non contiene le x , i punti di questa traiettoria avranno le y costanti, ed eguali a quelle di P_0 , mentre le x saranno funzioni lineari del tempo, $x_i = \omega_i t + \alpha_i$, dove si è posto per brevità $\omega_i = \frac{\partial F_0}{\partial y_i}$. Nello spazio a n dimensioni delle x_i questa traiettoria è dunque una retta. Ora, per le ammesse proprietà di periodicità, possiamo riportare tutti i punti di questa retta nel cubo di lato 2π con lati paralleli agli assi e vertice nell'origine. Come si sa questo cubo resterà riempito densamente, purché non esista alcuna relazione lineare intera tra le ω_i .

Ammettiamo dapprima che sopra S non esista identicamente alcuna di tali relazioni. Allora il cubo resterà in generale riempito densamente, e quindi

tutti i suoi punti apparterranno, come si era affermato, ad S_0 . Se invece, essendo m_1, m_2, \dots, m_n degli interi valesse identicamente sopra S_0 la relazione $\sum m_i \omega_i = 0$, potremmo sempre ammettere che questa relazione non valga identicamente in tutto lo spazio, ed allora $\sum m_i \omega_i = 0$ è l'equazione di S_0 , per l'arbitrarietà di Φ_0 possiamo dunque prendere $\Phi_0 = \sum m_i \omega_i$, e quindi, come si era detto, indipendente dalle x .

§ 3.

La proprietà di S_μ di contenere le traiettorie uscenti da tutti i suoi punti, può analiticamente tradursi dicendo che l'equazione ⁽²⁾

$$(3) \quad [F, \Phi] = 0$$

è una conseguenza dell'altra

$$(4) \quad \Phi = 0.$$

Se dunque dalla (4) ricaviamo per esempio y_1 come funzione di $y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$, sostituiamo il valore trovato in (3) e sviluppiamo poi in serie di potenze di μ , i coefficienti di tutte le potenze debbono separatamente annullarsi.

Ora in questo sviluppo il primo termine $[F_0, \Phi_0]$ è identicamente nullo in tutto lo spazio, poiché F_0 e Φ_0 contengono soltanto le y ; il coefficiente di μ si riduce dunque a $[F_0, \Phi_1] + [F_1, \Phi_0]$, calcolato sopra S_0 .

Dunque sopra S_0 deve essere:

$$(5) \quad [F_0, \Phi_1] + [F_1, \Phi_0] = 0.$$

Ora per la periodicità di F_1 e di Φ_1 possiamo scrivere: $\Phi_1 = \sum_m A_m e^{\theta m}$, $F_1 = \sum_m B_m e^{\theta m}$, dove A_m, B_m sono funzioni delle sole y , θ_m è un'abbreviazione dell'espressione $i(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n)$, ed m rappresenta simbolicamente gli n indici m_1, m_2, \dots, m_n i quali nelle somme debbono andare da $-\infty$ a $+\infty$. Con un semplice calcolo la (5) si trasforma in:

$$(6) \quad \sum_m e^{\theta m} \left(A_m \sum_i m_i \frac{\partial F_0}{\partial y_i} - B_m \sum_i m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i} \right) = 0.$$

Questa equazione deve diventare identica se al posto per esempio di y_1 si mette la sua espressione in funzione delle rimanenti y , ricavata dall'equazione $\Phi_0(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$. E quindi sopra S_0 debbono singolarmente annullarsi tutti i coefficienti degli $e^{\theta m}$, cioè:

$$(7) \quad A_m \sum_i m_i \omega_i = B_m \sum_i m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i}.$$

(2) Per il significato e le proprietà del simbolo $[F, \Phi]$ qui usato, vedi Poincaré, *loc. cit.* Cap. I.

Di qui segue che se in un punto di S_0 si ha $\sum_i m_i \omega_i = 0$, deve anche essere $\sum_i m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i} = 0$, poiché in generale (3) sarà $B_m \neq 0$.

Dobbiamo a questo punto distinguere se il numero n dei gradi di libertà è uguale o maggiore di due. Se $n = 2$ può darsi benissimo che S_0 abbia l'equazione $\frac{\omega_2}{\omega_1} - \alpha = 0$, dove α è un numero irrazionale. Allora è impossibile trovare due interi m_1, m_2 tali che in un punto di S_0 sia

$$m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 = 0.$$

Da (7) si ricava dunque sopra S_0

$$A_m = \frac{B_m}{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2} \sum_i m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i}$$

e si è sicuri che il denominatore non si annulla mai. Determinando poi a piacere le A_m all'infuori di S_0 , resta determinato Φ_1 , e potrebbe mostrarsi facilmente che con un procedimento analogo si possono determinare successivamente, almeno dal lato formale, anche Φ_2, Φ_3, \dots . Resta naturalmente ancora la questione della convergenza delle serie così ottenute. Ma non è naturalmente escluso che, se le B_m decrescono abbastanza rapidamente al crescere delle m , ed eventualmente per particolari valori di α , queste serie convergano effettivamente. Così che nel caso $n = 2$ non è escluso che, oltre le $F = \text{costante}$, possano esistere anche altre, ed eventualmente infinite ipersuperfici con la proprietà discussa alla fine del § 1.

§ 4.

Altrimenti vanno le cose se $n > 2$; supporremo per esempio $n = 3$, ma il nostro ragionamento sarà evidentemente valido per qualunque $n > 2$. Dei tre rapporti $\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_2}$ può ben darsi che uno resti sopra S_0 costante, ma allora in generale non lo saranno gli altri due; così che, senza in alcun modo limitare la scelta di S_0 , possiamo sempre supporre che su di essa né $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, né $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ siano costanti. Allora S_0 sarà coperta densamente di punti per i quali ω_2/ω_1 è razionale. In uno qualunque di questi punti ci saranno dunque due interi m_1, m_2 tali che $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 = 0$; nel medesimo punto sarà quindi anche, in virtù di (7), $m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_2} = 0$. Quindi in quel punto sarà $\omega_1 : \omega_2 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} : \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_2}$. E siccome questa equazione deve valere in infiniti punti distribuiti densamente sopra S_0 , essa deve essere certamente soddisfatta identicamente. Parimenti si dimostra che $\omega_3 : \omega_1 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_3} : \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1}$. E quindi sopra S_0 si ha $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} : \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_2} : \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_3}$, cioè le derivate parziali di Φ_0 e di F_0 rapporto alle y_i sono proporzionali. Ma ciò può accadere solo se $\Phi_0 = 0$

(3) Potrebbe invero darsi che S_0 fosse tale che su di essa una delle B_m si annullasse identicamente, ma allora le altre B_m sarebbero in generale differenti da zero, e ciò è sufficiente per il seguito.

e quindi al solito sopra S_0 deve essere $C_m \sum_i m_i \omega_i = 0$ e perciò tutte le C ad eccezione di $C_{\infty, \dots, 0}$ debbono esser nulle sopra S_0 ; poniamo $C_{\infty, \dots, 0} = f_{r+1}(y_1, \dots, y_n)$, allora, si ha sopra S_0

$$\Phi_{r+1} = F_{r+1} + f_{r+1}(y_1, \dots, y_n)$$

e siccome Φ_{r+1} è, all'infuori di S_0 , arbitrario, possiamo estendere questa equazione in tutto lo spazio. E così la nostra dimostrazione è completa.

§ 6.

Vogliamo infine raccogliere alcune condizioni sufficienti, ma non necessarie, per la validità della dimostrazione precedente:

1° Deve essere $n > 2$.

2° Nel sistema imperturbato non debbono esistere identicamente relazioni lineari intere tra le frequenze fondamentali ω_i .

3° Nessuna equazione del tipo $\omega_a/\omega_i = \text{cost.}$ deve essere conseguenza di un'altra dello stesso tipo, come per esempio $\omega_i/\omega_k = \text{cost.}$

4° Sopra nessuna delle $F_0 = \text{cost.}$ può $\sum m_i \omega_i$ annullarsi identicamente, se non sia $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$.

5° Sopra nessuna delle $F_0 = \text{cost.}$ deve in generale da $\sum m_i \omega_i = 0$ seguire anche $B_m = 0$.

Göttingen, aprile 1923.

N° 16.

This paper has historical interest showing for the first time the concern of Fermi for the entropy constant of the perfect monatomic gas. It is a first indication of the thoughts of Fermi on the subject. Indeed the division of phase space in cells of volume h^3 was a subject of deep meditations on his part and he arrived later at the conclusion that a further link was missing, without being able to perform the decisive step. (Cfr. N° 19).

E. SEGRÈ

16.

SOPRA LA TEORIA DI STERN DELLA COSTANTE ASSOLUTA DELL'ENTROPIA DI UN GAS PERFETTO MONOATOMICO

« Rend. Lincei », 32 (2), 395-398 (1923) (*).

1. La costante assoluta dell'entropia di un gas perfetto monoatomico fu determinata per la prima volta da Sackur⁽¹⁾ e da Tetrode⁽²⁾ con un metodo statistico, che consisteva essenzialmente nel porre, con Boltzmann, l'entropia proporzionale al logaritmo della probabilità, calcolando il valore assoluto della probabilità con l'ammettere che il volume delle cellette, in cui è perciò necessario dividere lo spazio delle fasi, e che ha le dimensioni del cubo di una azione, fosse precisamente eguale alla terza potenza della costante h di Planck. Essi trovarono in questo modo che l'entropia di un gas monoatomico è data dalla formula:

$$(1) \quad S = Nk \left\{ \frac{5}{2} \log T - \log p + \log \frac{(2\pi m)^{3/2} k^{5/2} e^{5/2}}{h^3} \right\}$$

dove N è il numero degli atomi, k la costante assoluta di Boltzmann, T la temperatura assoluta, p la pressione ed m la massa degli atomi.

Che, nonostante la verifica sperimentale della (1), questo modo di dedurla non sia a molti apparso soddisfacente, è dimostrato dal gran numero di lavori teorici, che furono fatti in seguito, con lo scopo di trovarne una dimostrazione migliore. Di tutti questi tentativi, quello che senza dubbio ha meglio raggiunto il suo scopo è quello di Stern⁽³⁾; esso è basato sul seguente principio: consideriamo il nostro gas come vapore di un corpo solido; possiamo calcolarne la tensione massima in due modi: 1° con la teoria cinetica dei gas, ed in tale modo otteniamo un risultato completamente

(*) Presentata alla seduta del 2 dicembre 1923 dal Socio O. M. Corbino.

(1) O. SACKUR, « Ann. d. Phys. », 40, 67 (1913).

(2) H. TETRODE, « Ann. d. Phys. » 38, 434 (1912).

(3) O. STERN, « Phys. ZS. », 14, 629 (1913); « ZS. f. Elektrochem. », 25, 66 (1919).

determinato, senza costanti arbitrarie; 2° con la termodinamica, ed in tale caso ci figura come costante arbitraria precisamente la costante assoluta dell'entropia del gas, poiché quella del corpo solido si può ottenere per mezzo del teorema di Nernst. Col confronto delle due espressioni, Stern giunge a determinare la costante assoluta; ed il suo metodo ha il vantaggio di non fare sopra il gas perfetto nessuna di quelle poco legittime ipotesi, che sono necessarie agli altri Autori, come per esempio quella di una quantizzazione del gas stesso, della quale non si vede chiaramente la ragione.

2. Un punto però, che anche nella teoria di Stern non resta molto chiaro, è il seguente: Stern trova come densità del vapore saturo per via cinetica la seguente espressione:

$$(2) \quad \rho = \frac{(2\pi m)^{3/2} \bar{\nu}^3}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{w}{kT}}$$

dove $\bar{\nu}$ è la media geometrica delle frequenze elastiche fondamentali del corpo solido, w l'energia necessaria a far evaporare un atomo dal corpo solido, allo zero assoluto. Col metodo termodinamico egli trova invece:

$$(3) \quad \rho = \frac{(2\pi m)^{3/2} \bar{\nu}^3}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{w + \frac{3h\bar{\nu}}{2}}{kT}}$$

essendo $\bar{\nu}$ la media aritmetica delle dette frequenze.

La differenza negli esponenti di e viene da Stern spiegata con l'ipotesi così detta dell'energia allo zero assoluto (Nullpunktsenergie), secondo la quale si ammette che, anche allo zero assoluto, l'energia media di un oscillatore non sia eguale a zero, ma a mezzo quanto, cioè ad $h\nu/2$. Ammettendo questo, il calore di vaporizzazione di un atomo non sarebbe più w , bensì, siccome ogni molecola ha tre gradi di libertà, $w - (3h\nu/2)$ e così verrebbe compensata la differenza dei due esponenti.

In questo lavoro mi propongo di dimostrare che questa ipotesi innaturale non è affatto necessaria per spiegare la differenza suddetta, ma che basta perciò modificare leggermente la deduzione cinetica della (2), tenendo conto che le molecole del corpo solido possono muoversi solamente sopra orbite quantiche.

3. Per giungere cinematicamente alla densità del vapore saturo occorre anzitutto calcolare la probabilità di uno stato in cui, fissato il volume V , N_g atomi appartengano al gas, ed N_s al corpo solido: essendo $N = N_g + N_s$, il numero totale degli atomi presenti. Osservando che gli atomi del solido, a differenza di quelli del gas, sono distinguibili tra di loro per la loro posizione, si riconosce facilmente, ricordando i principii della meccanica statistica, che tale probabilità è:

$$(4) \quad P = \binom{N}{N_g} N_s! \int e^{-\frac{w}{kT}} d\omega = \frac{N!}{N_g!} \int e^{-\frac{w}{kT}} d\omega$$

dove $d\omega$ è l'elemento di volume dello spazio delle fasi, che ha per coordinate le coordinate ed i momenti x_i, p_i ($i = 1, 2, \dots, 3N_g$) delle molecole del

gas, e le coordinate ed i momenti x_j, p_j ($j = 1, 2, \dots, 3N_g$), degli atomi della parte solida; W è l'energia corrispondente allo stato $d\omega$. Quanto alle molecole del gas non c'è nulla da dire; invece riguardo alle molecole del solido modifichiamo un pò le considerazioni di Stern, osservando che le molecole del corpo solido possono descrivere soltanto delle orbite statiche (4) le quali, in questo caso, sono caratterizzate dal fatto, che l'energia corrispondente ad ogni frequenza elastica deve essere $n_j h\nu_j$ essendo n_j , un intero, e ν_j la frequenza corrispondente. Conformemente alla solita statistica della teoria dei quanti, attribuiamo a ciascuno di questi moti elementari il peso h , ponendo cioè:

$$(5) \quad dx_j dp_j = h$$

di modo che

$$d\omega = h^{3N_g} \prod_i^{3N_g} dx_i dp_i.$$

L'energia W si calcola come somma dell'energia cinetica delle molecole del gas, eguale $\Sigma p_i^2/2m$, più l'energia del corpo solido $= \Sigma n_j h\nu_j$, più l'energia potenziale delle molecole del gas eguale a wN_g , essendo w appunto l'energia di vaporizzazione di una molecola allo zero assoluto. Si ha dunque:

$$(7) \quad W = \sum_i^{3N_g} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_i^{3N_g} n_j h\nu_j + wN_g.$$

Osservando ancora che nella (4) i $6N_g$ integrali relativi a dx_j, dp_j ; vanno naturalmente sostituiti con delle sommatorie, la (4) diventa:

$$(8) \quad P = \frac{N!}{N_g!} h^{3N_g} e^{-\frac{wN_g}{kT}} \prod_i^{3N_g} \left(\int dx_i \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2m kT}} dp \right)^{3N_g} \prod_{j=1}^{3N_g} \left(\sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-\frac{n_j h\nu_j}{kT}} \right).$$

Osservando ora che se x_1, x_2, x_3 sono coordinate cartesiane della prima molecola del gas si ha:

$$\int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 = V,$$

essendo V il volume del gas, si trova:

$$\prod \int dx_i = V^{N_g}.$$

Si ha inoltre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2m kT}} dp = \sqrt{2\pi m kT};$$

$$\sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-\frac{n_j h\nu_j}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu_j}{kT}}} = \frac{kT}{h\nu_j} \left(1 + \frac{h\nu_j}{2kT} + \dots \right).$$

(4) Naturalmente in queste considerazioni, si tratta dell'atomo considerato come punto materiale, e i moti di cui si parla sono l'agitazione termica.

Applicando la formola di Stirling, si trova dunque:

$$\log P = \log N! - N_g \log \frac{N_g}{e} - \frac{N_g w}{kT} + N_g \log V + \frac{3}{2} N_g \log (2\pi m kT) \\ + 3 N_s \log \frac{kT}{\bar{v}} + \sum_1^{3N_s} \log \left(1 + \frac{h\nu_j}{2kT} + \dots \right)$$

ossia al limite per T molto grande:

$$\log P = \log N! - N_g \log \frac{N_g}{e} - \frac{N_g w}{kT} + N_g \log [V (2\pi m kT)^{3/2}] \\ + 3 N_s \log \frac{kT}{\bar{v}} + \frac{3 N_s h\bar{v}}{2kT}.$$

Nello stato di equilibrio P deve essere un massimo: e perciò deve annullarsi la sua derivata rispetto ad N_g , dove si deve osservare però che $N_s = N - N_g$ ed N è una costante. Si trova dunque:

$$0 = -\log N_g - \frac{w + 3h\bar{v}/2}{kT} + \log [V (2\pi m kT)^{3/2}] - \log \left(\frac{kT}{\bar{v}} \right)^3.$$

Di qui si ricava subito che la densità del gas è:

$$\frac{N_g}{V} = \frac{(2\pi m)^{3/2} (\bar{v}^3)}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{w + 3h\bar{v}/2}{kT}}$$

in completa concordanza con la (3).

N° 17 a and 17 b.

Footnotes included in the otherwise identical German version, not reproduced here, indicate that Fermi was acquainted with an earlier attempt by Herzfeld⁽¹⁾ to solve the same problem by a somewhat cruder approach, and also that he was indebted to Max Born for a suggestion. Brillouin⁽²⁾ has discussed and compared the different treatments that various authors have used to avoid the divergence of the partition function for the quantum levels of an atom.

F. RASETTI

17 a

SULLA PROBABILITÀ DEGLI STATI QUANTICI

« Rend. Lincei » 32 (2), 493-495 (1923) (*).

1. Dato un atomo, suscettibile di assumere vari stati quantici, il problema della determinazione della probabilità che esso si trovi in un assegnato stato quantico si risolve di solito ammettendo che le probabilità *a priori* di tutti i suoi stati possibili, siano eguali⁽³⁾, e da questa ammissione segue, con gli ordinari metodi della statistica, che la probabilità cercata è proporzionale a

$$(1) \quad e^{-\frac{w_i}{kT}}$$

essendo w_i l'energia dello stato che si considera.

Vi sono però alcuni casi in cui queste considerazioni debbono evidentemente venire modificate. Se per esempio si considera un atomo, per fissare le idee un atomo di idrogeno, si ha che l'energia del suo i^{esimo} stato quantico è

$$(2) \quad w_i = -\frac{A}{i^2}$$

e quindi, secondo le considerazioni precedenti, la probabilità dell' i^{esimo} stato dovrebbe essere

$$(3) \quad p_i = -C e^{\frac{A}{kT i^2}}$$

essendo C una costante da determinare con la condizione che $\sum_i p_i = 1$. Siccome però

$$(4) \quad \sum_i e^{\frac{A}{kT i^2}}$$

è evidentemente divergente, risulterebbe $C = 0$.

(1) K. F. HERZFELD, « Ann. d. Phys. », 51, 261 (1916).

(2) L. BRILLOUIN, *Les statistiques quantiques et leurs applications*, Vol. 2. Les Presses Universitaires de France, Paris, 1930.

(*) Presentata nella seduta del 16 dicembre 1923 dal Socio O. M. Corbino.

(3) Vedi per esempio N. BOHR, « ZS. f. Phys. », 13, 117 (1923).

Questa difficoltà viene di solito eliminata ammettendo che in un gas, ad una certa pressione, non siano possibili quegli stati quantici per i quali il raggio dell'atomo è maggiore della distanza media tra atomo ed atomo, cosicché la somma (4), invece che da 1 ad ∞ , deve essere estesa solo ad un numero finito di termini.

In questo lavoro cercheremo di eliminare la difficoltà osservata in un modo un po' più preciso. Cercheremo perciò di fare il calcolo termodinamico dell'equilibrio tra i varî stati quantici, tenendo conto del volume delle molecole; e vedremo che questa considerazione ci condurrà ad un'espressione quantitativa del fatto, qualitativamente evidente, che gli atomi di maggiori dimensioni sono di formazione più difficile, perché maggiormente disturbati dagli urti contro gli altri atomi.

2. Consideriamo dunque l'equilibrio chimico tra varî stati quantici di uno stesso atomo, e supponiamo che le energie di essi siano

$$w_1, w_2, \dots, w_r$$

ed i rispettivi volumi atomici

$$v_1, v_2, \dots, v_r.$$

Siano poi n_1, n_2, \dots, n_r i numeri di atomi del 1, 2, \dots , n esimo stato; $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n$ rappresenterà il numero totale degli atomi, che supponiamo racchiusi in un recipiente di volume unitario. Per calcolare il nostro equilibrio chimico dobbiamo prima di tutto calcolare l'energia libera del nostro miscuglio di stati quantici; e lo stato di equilibrio si troverà poi facilmente cercando quei valori di n_1, n_2, \dots, n_r per i quali l'energia libera è minima. Se F è l'energia libera, U l'energia totale, T la temperatura assoluta, S l'entropia, si ha

$$(5) \quad F = U - TS.$$

Ora nel nostro caso l'energia è la somma dell'energia cinetica degli atomi, e della loro energia di formazione; si ha dunque.

$$(6) \quad U = \frac{3}{2} n k T + \sum w_i n_i.$$

Il calcolo dell'entropia è alquanto più complesso, e lo faremo solo ammettendo, in analogia a quel che si fa a proposito dell'equazione di van der Waals, che il contributo all'entropia totale, di ciascuna specie di atomi, sia eguale all'entropia che avrebbero gli stessi atomi, se da soli occupassero un recipiente di volume eguale a quello del recipiente dato, diminuito del volume occupato dalle molecole presenti, che, come nell'equazione di van der Waals, possiamo per esempio prendere eguale al quadruplo del volume totale delle molecole presenti. Tale volume risulta cioè $1 - 4 \sum n_i v_i$; e quindi l'entropia risulta data da

$$(7) \quad S = \sum_i n_i k \left\{ \frac{3}{2} \log T - \log \frac{n_i}{1 - 4 \sum n_i v_i} + A \right\}.$$

Se supponiamo che $\sum n_i v_i$ sia piccolo, possiamo un po' semplificare l'espressione (5) dell'energia libera, e scrivere

$$(8) \quad F = \frac{3}{2} n k T + \sum w_i n_i - k T \sum_i n_i \left\{ \frac{3}{2} \log T - \log n_i - 4 \sum n_i v_i + A \right\}.$$

La condizione di equilibrio si otterrà, come si è già detto, cercando i valori delle n_i per i quali l'energia libera è un minimo, dove osserviamo però che le n_i debbono sempre verificare la condizione

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r.$$

Si trova dunque che

$$(9) \quad n_i = C e^{-\frac{w_i}{kT}} e^{-4 n v_i}$$

essendo C una costante che deve essere determinata dalla condizione che $\sum n_i = n$.

Se si confronta quest'ultima formula con la (1) si vede subito che la differenza tra di esse consiste nel fattore $e^{-4 n v_i}$ che figura nella (9) e non, nella (1) e che può in un certo senso interpretarsi come una probabilità *a priori* dello stato quantico i^{esimo} , la quale naturalmente decresce col crescere della pressione, e del volume dell'atomo.

3. Consideriamo ora per esempio il caso dell'atomo di idrogeno; per esso abbiamo $w_i = A/i^2$; il volume atomico lo vogliamo prendere eguale a quello di una sfera di raggio eguale a quello dell'atomo; siccome dunque il raggio è proporzionale ad i^2 , il volume atomico risulterà proporzionale ad i^6 . Sia $v = B i^6$. Osserviamo anche che vi sono i atomi possibili (*) che corrispondono al numero quantico totale i (corrispondentemente ai vari valori che può prendere il quanto azimutale), e quindi si vede che la costante C delle (9) va determinata in modo che

$$(10) \quad n = C \sum_i^{\infty} i e^{\frac{A}{kT i^2}} e^{-4 n B i^6}.$$

È evidente, e del resto facile da verificare, che la serie converge, e che resta quindi eliminata la difficoltà a cui accennavamo in principio. Per renderci in qualche modo un'idea dell'influenza esercitata dal fattore dipendente dal volume possiamo fare il seguente calcolo numerico. Per l'atomo di idrogeno B è uguale pressapoco a $5 \cdot 10^{-25}$. Se supponiamo per esempio di operare alla pressione di un'atmosfera si ha $n = 2,7 \cdot 10^{19}$ e quindi, come ordine di grandezza, $4 n B = 5 \cdot 10^{-5}$. Ne segue che, mentre per $i = 1$ si ha $e^{-4 n v_i} = e^{-0,00005}$, quindi vicinissimo ad 1, già per $i = 6$ si ha invece, $e^{-4 n v_i} = e^{-2,3} = \sim 0,1$: per $i = 10$ si ha $e^{-4 n v_i} = e^{-50} = \sim 10^{-22}$ cioè già un numero piccolissimo; e ciò ci dimostra che la causa di cui ci siamo occupati è effettivamente sufficiente a giustificare l'impossibilità dell'esistenza di numeri quantici elevati, finché la pressione non è estremamente piccola.

(*) Quando il lavoro fu scritto, non era chiaro l'effetto della quantizzazione spaziale sul numero degli stati quantici, e non si conosceva lo spin dell'elettrone. Il valore corretto della molteplicità del livello i dell'idrogeno è $2 i^2$ (N. d. R.).

N° 18.

A detailed theory of the change in the angular distribution of the optical resonance radiation that takes place with increasing density of the gas. The author accounts quantitatively for the experimental results of Wood, who observed in mercury vapor a transition from almost isotropic scattering at low gas densities, to regular reflection at very high densities.

F. RASETTI

18.

SOPRA LA RIFLESSIONE E LA DIFFUSIONE DI RISONANZA

« Rend. Lincei », 33, (1), 90-93 (1924) (*).

1. Se si illumina un gas o vapore con luce di frequenza eguale a quella della sua riga di risonanza, si produce il fenomeno, scoperto da Wood⁽¹⁾, della così detta risonanza ottica, che consiste nel fatto che la luce primaria viene assai intensamente diffusa dal gas, per modo che bastano spesso degli strati estremamente sottili del gas per assorbire completamente la luce primaria. Ora si osserva questo fatto⁽²⁾: finché la pressione del gas è sufficientemente piccola, quasi tutta la luce di risonanza viene diffusa irregolarmente in tutte le direzioni; quando invece la pressione diventa abbastanza grande, la maggior parte viene invece riflessa regolarmente, e solo una piccola parte viene sparpagliata in tutte le direzioni. Siccome non mi consta che di questo fenomeno sia ancora stata data una interpretazione ben chiara, cercherò in questo lavoro di svilupparne la teoria matematica, la quale, oltre a dare codesta interpretazione, permetterà anche di assegnare le condizioni sperimentali per le quali è più facile l'osservazione della riflessione di risonanza.

2. Supponiamo che il nostro gas sia contenuto in un recipiente prismatico a base quadrata di lato B coi lati paralleli agli assi y, z , illimitato dalla parte delle x positive, e nel senso opposto limitato dal piano $x = 0$. Supponiamo poi che la luce primaria, di frequenza ν , abbia coseni di direzione l, m, n , ed investa la base del prisma, ed osserviamo la luce secondaria nella direzione di coseni α, β, γ , ($\alpha < 0$). Sia k il coefficiente d'assorbimento; se il punto P di osservazione è abbastanza lontano dal gas ed r è la sua di-

(*) Presentata nella seduta del 13 gennaio 1924 dal Socio O. M. Corbino.

(1) WOOD, « Phil. Mag. », dal 1905 al 1912.

(2) WOOD, « Phil. Mag. », 23, 689 (1912); DUNOYER, « C. R. », 156, 1067 (1913).

stanza dal centro delle coordinate, si riconosce subito che, prescindendo dall'influenza dei bordi, l'ampiezza della luce secondaria in P è data da

$$\sum_h \frac{A}{r} e^{-\frac{k}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x}{\alpha} \right) x_h} e^{2\pi i v \left(t - \frac{r}{c} \right)} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} \{ (l-\alpha) x_h + (m-\beta) y_h + (n-\gamma) z_h \}}.$$

Dove l'indice h distingue i vari atomi del gas, e la somma si deve estendere a tutti questi atomi, A è un coefficiente di proporzionalità. Per passare dall'ampiezza all'intensità basta, come è noto, moltiplicare l'ampiezza precedente per il numero suo complesso coniugato. L'intensità è dunque

$$I = \frac{A^2}{r^2} \sum_{h,j} e^{-\frac{k}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x}{\alpha} \right) (x_h + x_j)} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \{ (l-\alpha) (x_j - x_h) + (m-\beta) (y_j - y_h) + (n-\gamma) (z_j - z_h) \}}.$$

La somma deve naturalmente estendersi, per entrambi gli indici h, j , a tutti gli atomi presenti. Per effettuarla ci conviene spezzare I nella somma di due addendi I_1 ed I_2 , dei quali il primo si ottenga come contributo dei termini della sommatoria per i quali $h = j$, ed il secondo sia il contributo dei termini per cui $h \neq j$. Avremo allora

$$I_1 = \frac{A^2}{r^2} \sum_h e^{-k \left(\frac{x}{l} - \frac{x}{\alpha} \right) x_h}$$

che potrà calcolarsi sostituendo la somma con l'integrale triplo

$$I_1 = \frac{NA^2}{r^2} \int_{-B/2}^{\infty} \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-B/2}^{B/2} e^{-k \left(\frac{x}{l} - \frac{x}{\alpha} \right) x} dx dy dz,$$

essendo N il numero di atomi per unità di volume. Calcolando l'integrale si trova

$$(1) \quad I_1 = \frac{NA^2 B^2}{k r^2 \left(\frac{l}{\alpha} - 1 \right)}.$$

Si ha poi

$$I_2 = \frac{A^2}{r^2} \sum_{h \neq j} e^{-\frac{k}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x}{\alpha} \right) (x_h + x_j)} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \{ (l-\alpha) (x_j - x_h) + \dots \}}.$$

Anche qui possiamo ora sostituire la somma con un integrale sestuplo⁽³⁾; si trova quindi

$$I_2 = \frac{A^2 N^2}{r^2} \iiint \iiint \iiint e^{-\frac{k}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x}{\alpha} \right) (x+\xi)} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \{ (l-\alpha) (\xi-x) + \dots \}} dx dy dz d\xi d\eta d\zeta$$

ed effettuando le quadrature

$$(2) \quad I_2 = \frac{4A^2 N^2 \lambda^4}{\pi^4 r^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi B}{\lambda} (m-\beta)}{(m-\beta)^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi B}{\lambda} (n-\gamma)}{(n-\gamma)^2} \frac{I}{\frac{k^2}{4} \left(\frac{l}{\alpha} - 1 \right)^2 + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (l-\alpha)^2}.$$

Si vede ora che mentre I_1 ha, come funzione di α, β, γ , un andamento regolare (poché $l > 0 > \alpha$), I_2 presenta invece un massimo assai pronunciato quando $m = \beta, n = \gamma$ e quindi $l = -\alpha$, purché, come vogliamo ammettere, sia $B \gg \lambda$. Questo massimo corrisponde ad una riflessione regolare;

(3) Questo non sarebbe più lecito se non si fossero già trattati a parte i termini per i quali $h = j$ che darebbero luogo a delle singolarità.

I_1 ci rappresenterà dunque la luce diffusa in tutte le direzioni, I_2 quella riflessa regolarmente. Siccome poi I_1 è proporzionale ad N , e I_2 ad N^2 , si capisce anche come, al crescere della densità, I_2 vada poco a poco a prendere il sopravvento sopra I_1 , come appunto sperimentalmente si osserva.

3. Per discutere però in un caso più concreto le circostanze di questo fenomeno, ci converrà modificare leggermente le premesse. Mentre fin'ora abbiamo preso come sorgente della luce primaria un punto all'infinito, prenderemo ora un piccolo disco circolare, pure all'infinito. Sia ρ_0 l'angolo sotto cui si vede il suo raggio; prendiamo poi le coordinate in modo che i coseni direttori del centro siano $-\cos \theta$, $-\sin \theta$, o ($\theta =$ angolo di incidenza) ed osserviamo nella direzione $\alpha = -\cos \theta$, $\beta = \sin \theta$, $\gamma = 0$ in cui si riflette il raggio proveniente dal centro. Per il punto della sorgente, di coordinate polari sferiche ⁽⁴⁾ ρ , φ avremo allora approssimativamente

$l = \cos \theta + \rho \cos \varphi \sin \theta$; $m = \sin \theta - \rho \cos \varphi \cos \theta$; $n = -\rho \sin \varphi$
e quindi applicando la (1) e la (2) si trova in questo caso

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2N\lambda^4 k}{\pi^3 \rho_0^2 B^2 \left(k^2 + \frac{16\pi^2}{\lambda^2} \cos^4 \theta \right) \cos \theta}$$

$$\times \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi B}{\lambda} \rho \cos \varphi \cos \theta \right) \sin^2 \left(\frac{\pi B}{\lambda} \rho \sin \varphi \right)}{\rho^3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} d\rho d\varphi = \frac{2N\lambda^2 k}{\pi^3 \rho_0^2 \cos \theta \left(k^2 + \frac{16\pi^2}{\lambda^2} \cos^4 \theta \right)}$$

$$\times \int_0^{\pi B \rho_0 / \lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 (x \cos \varphi \cos \theta) \sin^2 (x \sin \varphi)}{x^3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} dx d\varphi.$$

Distinguiamo ora secondo che $B\rho_0/\lambda$ è molto grande o molto piccolo. Nel primo caso potremo sostituire il limite superiore del primo integrale con ∞ . Allora il valore dell'integrale doppio è $\pi^2 \cos \theta$ e quindi

$$(3) \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{2N\lambda^2 k}{\pi \rho_0^2 \left(k^2 + \frac{16\pi^2}{\lambda^2} \cos^4 \theta \right)}.$$

Se invece $B\rho_0/\lambda \ll 1$, si potrà nell'integrale doppio sostituire gli archi ai seni; si trova quindi facilmente

$$(4) \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{2N B^2 k \cos \theta}{k^2 + \frac{16\pi^2}{\lambda^2} \cos^4 \theta}.$$

4. Per esempio, supponiamo che sia $\rho_0 = 1/10$. Allora, escluso il caso che B sia straordinariamente piccolo, saremo in condizioni da applicare la (3), e troviamo che, perché I_2 sia dell'ordine di grandezza di I_1 , condizione evidentemente necessaria per l'osservazione della riflessione di risonanza, e ponendo $k = 100$ deve essere come ordine di grandezza $N = 10^{20}$ cioè che corrisponde a una pressione di qualche atmosfera. Si spiega con ciò l'insuccesso di Dunoyer nell'osservazione della riflessione di risonanza per il sodio, il cui vapore non si può comodamente osservare che a pressioni abbastanza basse.

(4) S'intende nel piano all'infinito, con polo nel centro della sorgente.

N° 19.

This paper, written in January 1924, is chiefly important in showing that Fermi had been concerned with the Gibbs paradox and the absolute entropy constant (cfr. also N° 16) at least two years before he wrote his celebrated paper on the statistics of the ideal gas. He points out that in systems with identical particles, such as the helium atom, the complete period to which the Sommerfeld integral must be extended should correspond to the repetition of a state indistinguishable from the initial state, even though the two states differ classically in that the two particles have exchanged places. His remarks bear some analogy to the considerations on the exchange of the coordinates of identical particles in the wave function of a system, as were later formulated in quantum mechanics. We note again in this paper a trend of ideas (for instance at the end of section I) which shows how he was groping for something missing (the exclusion principle). As soon as this was discovered by Pauli he was ready to develop the new statistics on a basis and from a point of view relatively independent of the contemporary development of quantum mechanics.

F. RASETTI

19.

CONSIDERAZIONI SULLA QUANTIZZAZIONE DEI SISTEMI CHE CONTENGONO DEGLI ELEMENTI IDENTICI

«Nuovo Cimento», 1, 145-152 (1924).

Le regole date da Sommerfeld per la determinazione delle orbite quantiche dei sistemi che ammettono la separazione delle variabili, e che, come si sa, si riducono ad imporre che per tali orbite gli integrali delle fasi $\oint p dq$, siano tutti multipli interi della costante h di Planck, si sono mostrate in perfetto accordo con l'esperienza nella loro applicazione all'atomo di idrogeno, e rendono conto, entro i limiti dell'errore sperimentale, di tutti i fatti osservati nella spettroscopia di questo elemento; è noto d'altra parte che tutti i tentativi finora fatti, di estendere quelle regole anche al calcolo di elementi più complessi, non hanno portato altro che a risultati qualitativi, e che, malgrado numerosi sforzi, l'accordo quantitativo tra esperienza e teoria non si è potuto raggiungere nemmeno per l'elio che, dopo l'idrogeno, è il più semplice atomo.

Un tale insuccesso viene di solito attribuito al fatto che tali sistemi più complessi non ammettono la separazione delle variabili, e che il metodo delle perturbazioni, che è stato escogitato per poter generalizzare anche a loro le condizioni di Sommerfeld sia per una ragione o per l'altra insufficiente a calcolarli.

In questo lavoro mi propongo di mostrare come ci siano delle ragioni che inducono a credere, che l'insuccesso sia dovuto piuttosto all'insufficienza delle condizioni di Sommerfeld a calcolare le orbite statiche di quei sistemi che, indipendentemente dall'ammettere o no la separazione delle variabili, contengono alcune parti identiche (nel caso dell'atomo di elio per esempio i due elettroni sono tra di loro non distinguibili). Che delle modificazioni delle leggi quantistiche si possono rendere necessarie in conseguenza dell'essere il sistema da quantizzare costituito da elementi identici appare in qualche caso molto plausibile; consideriamo per esempio un anello occupato da tre elettroni disposti ai vertici di un triangolo equilatero. Siccome gli elettroni sono tra di loro indistinguibili è chiaro che, per riportare con una rotazione l'anello nella sua situazione iniziale, non sarà necessario farlo rotare di un angolo di 2π , ma basterà un angolo di $2\pi/3$. Vediamo così che, mentre se gli elettroni fossero tra di loro distinguibili il moto di rotazione dell'anello sarebbe periodico a periodo 2π , data invece la loro indistinguibilità esso diventa periodico a periodo $2\pi/3$. Se p è la quantità di moto areale dell'anello nella prima ipotesi $2\pi p$ dovrebbe essere un multiplo di \hbar , nella seconda invece $2\pi p/3$ deve essere un multiplo intero di \hbar , ossia il valore minimo di p è nel secondo caso tre volte più grande che nel primo. Considerazioni di questo genere applicate alla quantizzazione dei reticoli cristallini, nei quali, data l'identità tra tutti gli atomi, una traslazione eguale e parallela ad uno dei lati del parallelepipedo elementare, può considerarsi come un periodo, furono recentemente svolte da Compton ⁽¹⁾ e altri che ne dedussero una teoria quantistica molto chiara della diffrazione dei raggi Röntgen.

1. Mi propongo ora di mostrare un esempio di sistema a variabili separate, per il quale appaia evidente l'insufficienza delle condizioni di Sommerfeld a calcolarne le orbite statiche.

Consideriamo perciò un gas perfetto, costituito da n molecole puntiformi, racchiuse in un volume v . Noi cercheremo di calcolare il valore assoluto dell'entropia di questo gas, facendo diverse ipotesi sopra il modo di quantizzarlo (per ottenere un valore finito dell'entropia di un gas perfetto è necessario quantizzarlo in un modo o nell'altro, poiché la trattazione classica ci condurrebbe sempre ad un valore infinito). In tutte queste ipotesi noi ridurremo sempre il nostro sistema a sistemi a variabili separate, che quantizzeremo con le regole di Sommerfeld, e riscontreremo tuttavia, che di tali ipotesi la sola che conduca ad un valore della costante dell'entropia d'accordo con il valore sperimentale è quella in cui il sistema fondamentale, a cui si ridurrà il nostro gas, contenga un solo atomo; mentre riducendolo a sistemi, pure a variabili separate, ma contenenti più di un atomo, si troveranno sempre delle maggiori o minori divergenze.

Il criterio che seguiremo nella trattazione del nostro problema sarà il seguente: divideremo anzitutto il volume v a disposizione del nostro gas in celle a forma di parallelepipedi rettangoli, e potremo a piacere per esempio

(1) A. H. COMPTON, «Proc. Nat. Acad. Sci.», 9, 359 (1923); G. BREIT, *ibid.*, 9, 244 (1923).

dividere v in n parallelepipedi, mettendo in ciascuno di essi una sola molecola; oppure dividere v in $n/2$ parallelepipedi, e mettere in ciascuno 2 molecole, oppure infine dare a v la forma di un solo parallelepipedo, e lasciare in esso tutte le n molecole⁽²⁾. Il sistema di alcune molecole di un gas perfetto racchiuse in un recipiente di forma di parallelepipedo è evidentemente a variabili separate, in coordinate cartesiane parallele agli spigoli, poiché, essendo il gas perfetto, sono da trascurare le azioni delle molecole tra di loro. Una volta quantizzato così il movimento del nostro gas, si può facilmente calcolarne l'entropia; si risconterà allora che il valore della costante dell'entropia d'accordo con l'esperienza si può ottenere soltanto dividendo il volume in n parallelepipedi, e mettendo in ciascuno di essi una sola molecola, e che invece quantizzando dei sistemi che contengano anche due sole molecole identiche, si troveranno sempre dei risultati discordanti.

2. Supponiamo che le celle parallelepipedo in cui abbiamo diviso il nostro volume, abbiano lati a, b, c ; lo stesso calcolo svolto nella citata memoria di Brody, ci conduce a scrivere che le energie quantisticamente possibili del moto di una molecola parallelo al lato a sono

$$(1) \quad w_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8 a^2 m}$$

essendo n un intero, m la massa delle molecole e \hbar la costante di Planck. Il contributo all'entropia di questo grado di libertà si calcola con la nota formola

$$\sigma^* = \frac{\bar{w}}{T} + k \log \left(\sum e^{-\frac{w_i}{kT}} \right)$$

che si può facilmente dedurre con un calcolo diretto, e nella quale \bar{w} rappresenta l'energia media del grado di libertà, eguale in questo caso a $kT/2$; sostituendo la sommatoria tra parentesi con un integrale, si trova subito nel nostro caso

$$\sum e^{-\frac{w_i}{kT}} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\hbar^2 i^2}{8 a^2 m k T}} di = \frac{a}{\hbar} \sqrt{2 \pi m} \sqrt{kT}$$

e quindi

$$\sigma^* = \frac{k}{2} \log T + k \log \left(\frac{a}{\hbar} \sqrt{2 \pi m k} \right)$$

Computando i tre gradi di libertà della molecola (il gas è supposto monoatomico) si trova dunque che il contributo della molecola all'entropia totale è

$$\frac{3k}{2} \log T + k \log \frac{(2 \pi m k e)^{3/2} v_c}{\hbar^3}$$

avendo indicato con v_c il volume della cella.

(2) Un metodo simile a questo per il calcolo dell'entropia di un gas perfetto, fu svolto da BRODY [« ZS. f. Phys. », 6, 79 (1921)]. Per giungere alla formola esatta egli è però costretto a porre (pag. 82) $dE = 1$, essendo E una energia, con che la probabilità viene in sostanza a essere da lui definita come il numero degli stati quantici del gas (che viene quantizzato come contenuto in un recipiente parallelepipedo a pareti elastiche) che conducono ad una energia compresa tra E ed $E + 1$, di modo che la sua probabilità (form. 6) viene ad avere le dimensioni, anziché di un numero, dell'inverso di un'energia.

Come entropia complessiva di tutte le n molecole racchiuse in celle di volume v_c ci risulta alla fine, osservando che $p v = n k T$,

$$(2) \quad S^* = k n \left\{ \frac{5}{2} \log T - \log p + \log \left[\frac{(2 \pi m)^{3/2} k^{5/2} e^{3/2}}{h^3} \frac{n v_c}{v} \right] \right\}.$$

Per passare da questo valore all'entropia effettiva del gas, bisogna ancora notare che noi abbiamo supposto che in tutte le celle, che sono di eguale volume, fosse contenuto anche lo stesso numero di molecole.

Se indichiamo con P la probabilità che ciò avvenga, riconosciamo subito che per passare da (2) alla vera entropia del gas, bisogna, in conformità del principio di Boltzmann sottrarre ancora da (2) il logaritmo di P moltiplicato per k . Abbiamo dunque che l'entropia del gas è

$$(3) \quad S = S^* - k \log P.$$

Supponiamo dapprima di aver diviso il volume v in n celle tutte eguali.

La probabilità P che in cella sia contenuta una sola molecola si calcola come rapporto del numero di modi in cui è possibile disporre le molecole in modo che ogni cella ne contenga una, che è evidentemente $n!$, al numero totale dei modi nei quali si possono distribuire le molecole in tutte le celle, che è n^n . Applicando la formula di Stirling si trova, con approssimazione sufficiente per il nostro caso

$$P = \frac{n!}{n^n} = \frac{(n/e)^n}{n^n} = e^{-n}$$

sostituendo dunque in (3) si deduce

$$(4) \quad S = k n \left\{ \frac{5}{2} \log T - \log p + \log \frac{(2 \pi m)^{3/2} k^{5/2} e^{5/2}}{h^3} \right\}$$

che è identica alla formula di Tetrode e Sackur, e quindi d'accordo con la esperienza. Concludiamo dunque che nel caso che si divida lo spazio in celle, per modo che ognuna di esse contenga un solo atomo si ottiene un risultato esatto per il valore della costante assoluta dell'entropia. Diversamente vanno le cose se in ogni cella è contenuto più di un atomo; supponiamo per esempio di dividere il volume v in $n/2$ celle di egual volume, e di porre conseguentemente in ciascuna delle celle 2 atomi. Per calcolare in questo caso la probabilità P , osserviamo che, il numero di modi di disporre n oggetti in $n/2$ celle, in modo che in ognuna vi siano solo 2 oggetti è evidentemente $n! / 2^{n/2}$; il numero di tutte le disposizioni possibili è invece $(n/2)^n$. La probabilità P si può al solito valutare con la formula di Stirling, e si trova

$$P = \frac{n!}{2^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)^n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{e}\right)^n.$$

Sostituendo dunque in (3) si troverebbe per l'entropia del gas l'espressione

$$(5) \quad S = k n \left\{ \frac{5}{2} \log T - \log p + \log \frac{(2 \pi m)^{3/2} k^{5/2} e^{5/2}}{h^3} + \log \sqrt{2} \right\}$$

che differisce dalla (4), e quindi dall'esperienza, di $\log \sqrt{2}$. Divergenze analoghe si trovano dividendo il volume in $n/3, n/4, \dots$ celle e mettendo in ognuna di esse rispettivamente 3, 4, ... molecole. A titolo di esempio si può svolgere il calcolo per il caso che non si divida affatto il volume in celle, ma che si quantizzi il moto delle molecole considerandole tutte racchiuse in un recipiente a forma di parallelepipedo. In questo caso si ha evidentemente $P = 1$, e quindi $S = S^*$, e come si riconosce questa formula non ha nemmeno le dimensioni di quella di Tetrode e Sackur.

3. Per meglio mettere in evidenza ora, che la ragione delle divergenze osservate nei casi che in ogni cella sia contenuta più di una molecola, consiste proprio nel fatto, che si è quantizzato con le regole di Sommerfeld un sistema contenente degli elementi identici, facciamo la seguente considerazione:

Supponiamo di avere un miscuglio di due gas, di ciascuno dei quali, siano contenute $n/2$ molecole nel volume v ; supporremo poi, per semplicità, che le due specie di molecole, pur essendo tra di loro distinte, abbiano però la stessa massa. Calcoliamo ora l'entropia di questa miscela dividendo il volume in $n/2$ celle eguali, e ponendo in ciascuna cella una molecola di una specie e una dell'altra. Se la nostra supposizione che la causa delle divergenze sia la presenza nella stessa cella di due molecole identiche, è giusta, dobbiamo in questo caso aspettarci un risultato esatto, poiché le due molecole presenti nella cella sono tra di loro diverse. Ed infatti per calcolare la nostra entropia potremo anche in questo caso applicare la (3), dove ora P rappresenta la probabilità che in ognuna delle $n/2$ celle sia contenuta una e una sola molecola di ciascuna delle due specie. Ora i casi possibili sono evidentemente $(n/2)^n$, e quelli favorevoli $[(n/2)!]^2$ e quindi con la formula di Stirling si trova

$$P = \frac{[(n/2)!]^2}{(n/2)^n} = e^{-n}.$$

Allora si trova come espressione dell'entropia della miscela

$$(6) \quad S = kn \left\{ \frac{5}{2} \log T - \log p + \log \frac{(2\pi m)^{3/2} e^{5/2} h^{5/2}}{h^3} + \log 2 \right\}$$

e ricordando che l'entropia della miscela di due gas perfetti è eguale alla somma delle entropie, che ciascuno di essi avrebbe se da solo occupasse tutto il volume disponibile, si riconosce immediatamente che il valore (6) coincide esattamente con quello voluto dalla termodinamica.

RIASSUNTO.

Viene discussa l'ipotesi, che l'insuccesso delle regole di Sommerfeld nel calcolo quantitativo degli atomi di numero atomico più grande di uno, più che una deficienza del metodo delle perturbazioni, oppure della meccanica, sia dovuto al fatto che questi atomi contengono almeno 2 elettroni non distin-

guibili tra di loro, e che le regole di Sommerfeld, anche nel caso della possibilità della separazione delle variabili, non siano applicabili nel caso che alcune parti del sistema siano tra di loro completamente identiche.

A sostegno di tale ipotesi si dimostra che la quantizzazione del moto di molecole eguali contenute in una cella a forma di parallelepipedo, conduce al risultato esatto per il valore assoluto dell'entropia del gas, solo nel caso che in ogni cella sia contenuta una sola molecola, mentre se il gas è una miscela di due specie di molecole e lo si quantizza racchiudendo le molecole in celle, per modo che in ciascuna cella siano contenute due molecole, però di specie diversa, si ottiene ancora il risultato esatto.

Roma, gennaio 1924.

N° 20.

A calculation of the effect of excited states of the atom on the ionization equilibrium, made possible by the use of Fermi's method (17 *a*, 17 *b*) for rendering the partition function of atomic states finite. Such refinements of the theory have become important in astrophysical applications.

F. RASETTI

20.

SULL'EQUILIBRIO TERMICO DI IONIZZAZIONE

«Nuovo Cimento», 1, 153-158 (1924).

1. Nel 1921 Megh Nad Saha ⁽¹⁾ ha proposto una teoria della ionizzazione dei gas per effetto della temperatura, nella quale il processo della trasformazione di un atomo neutro in un ione positivo e in un elettrone viene considerato in tutto e per tutto come una ordinaria reazione chimica di dissociazione. I consueti metodi termodinamici permettono allora di calcolare il grado di ionizzazione, come funzione della temperatura e della pressione, quando si conoscano le costanti chimiche dei componenti della reazione (atomi neutri, ioni positivi, elettroni), le quali si possono senz'altro ricavare dalla formula di Sackur e Tetrode. Indicando con c_a la concentrazione degli atomi neutri, e con c_e quella degli elettroni si trova così

$$(1) \quad \frac{c_a}{c_e^2} = \frac{h^3}{(2\pi\mu)^{3/2}} \frac{1}{(hT)^{3/2}} e^{\frac{w}{hT}}$$

essendo h la costante di Planck, μ la massa dell'elettrone, k la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta e w l'energia necessaria a ionizzare un atomo neutro. (Questa forma si deduce subito da quelle a pag. 41 della Memoria di Saha, esprimendo grado di ionizzazione x e la pressione P per mezzo delle concentrazioni; l'abbiamo scritta sotto questa forma perché più comoda per il seguito).

Il Saha ha fatto delle importanti applicazioni astrofisiche della (1). Egli ha cominciato dal dedurre dalla presenza delle righe d'arco o di scintilla nello spettro di una stella, se in essa l'elemento corrispondente è allo stato neutro o ionizzato, ottenendo da ciò, per mezzo della (1), una valutazione, sia pure approssimativa della temperatura della stella, che si è mostrata in buon accordo con le temperature valutate per altra via.

Nella teoria del Saha si considera che per l'atomo allo stato neutro sia possibile soltanto uno stato. Ora è evidente, che se una tale ammissione può essere plausibile per temperature basse, per le quali gli stati

(1) M. N. SAHA, «Zeits. f. Phys.», 6, 40 (1921).

quantici superiori non sono eccitati in modo sensibile, per temperature abbastanza elevate da produrre la dissociazione termica, oltre agli atomi ionizzati ve ne sarà anche un considerevole numero che avrà livelli di energia superiori al minimo; e di tali livelli di energia bisognerà naturalmente tener conto nel calcolo dell'equilibrio di ionizzazione. Questa difficoltà è del resto sentita anche dal Saha, che la discute a pagina 42 della sua Nota, concludendo che la termodinamica d'allora era insufficiente al calcolo dell'equilibrio chimico tra tutti questi livelli di energia, e che quindi il trascurarli era una necessaria ipotesi provvisoria. Se infatti in questo calcolo, conformemente alla ordinaria statistica della teoria dei quanti si prendessero i pesi statistici di tutti gli stati quantici eguali tra di loro, si troverebbe che la somma di tutti questi pesi è divergente, ciò che avrebbe di conseguenza il risultato assurdo che non vi è ionizzazione per quanto elevata sia la temperatura ⁽²⁾.

Recentemente ho avuto occasione di mostrare ⁽³⁾, che se l'ipotesi che tutti gli stati quantici abbiano lo stesso peso statistico è valida al limite per pressioni infinitamente piccole, essa non lo è più per pressioni finite, ed il peso statistico dei vari stati quantici è tanto più piccolo, quanto più grande è il volume dell'atomo quando esso si trova nello stato quantico in considerazione. Precisamente si trova che il peso statistico di uno stato quantico di volume v_i è

$$(2) \quad p_i = e^{-4\pi v_i}$$

essendo n il numero totale delle molecole (di qualsiasi specie) presenti nell'unità di volume.

Eliminata in questo modo la difficoltà della non convergenza della somma dei pesi statistici, è abbastanza facile fare il calcolo dell'equilibrio di ionizzazione tenendo conto di tutti i livelli di energia, e questo costituisce appunto lo scopo di questo lavoro.

2. La formula (1) dà la relazione tra la concentrazione degli atomi neutri e quella degli ioni, supponendo che la specie di atomi considerata abbia il peso statistico 1. Se invece essa avesse peso p varrebbe la formula ottenuta dalla (1) moltiplicando per p il secondo membro. Se si considera dunque uno stato quantico di energia w_i , e se con c_i si indica la concentrazione degli atomi in questo stato, si trova, tenendo presente la (2)

$$(3) \quad c_i = c_0^2 \frac{h^3}{(2\pi\mu)^{3/2}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{\frac{w_i}{kT} - 4\pi v_i}.$$

Se ora indichiamo con c_a la concentrazione complessiva di tutti gli atomi neutri in qualunque stato quantico essi si trovino, avremo

$$(4) \quad c_a = \sum c_i = \frac{h^3}{(2\pi\mu)^{3/2}} \frac{c_0^2}{(kT)^{3/2}} \sum e^{\frac{w_i}{kT} - 4\pi v_i}.$$

Questa formula deve esser sostituita alla (1).

(2) Vedi per esempio la discussione sopra la comunicazione di BECKER, « Phys. ZS. », 24, 485 (1923).

(3) E. FERMI, « Rend. Lincei », 32, 493 (1923).

Vogliamo ora passare a discutere quali siano le differenze tra la (1) e la (4), ma prima ancora osserviamo che se in questo calcolo si fosse preso come peso statistico 1 invece dell'espressione (2), la serie del secondo membro di (4) sarebbe $\sum e^{w_i/kT}$, e siccome le energie di ionizzazione sono tutte positive, tutti i termini di questa serie sono maggiori di 1, e quindi la serie divergente; il termine e^{-4mw_i} nell'esponente di e , ha per effetto di farla convergere, e di permettere quindi di tener conto, nel calcolo dell'equilibrio, di tutti gli stati quantici, senza, come viene sostanzialmente a fare il Saha, porre il peso statistico dello stato quantico di minima energia eguale ad uno, e tutti gli altri eguali a zero.

3. La differenza tra la (1) e la (4) consiste nel fatto che nella (4), al posto di

$$(5) \quad e^{\frac{w}{kT}}$$

figura l'espressione

$$(6) \quad \sum e^{\frac{w_i}{kT} - 4mw_i}.$$

Le differenze dipendono dunque dalle differenze tra queste due espressioni. Ora riconosciamo subito che esse saranno piccole per corpi con elevato potenziale di risonanza (gruppo zero), e maggiori per corpi a basso potenziale di risonanza (metalli alcalini). Se infatti formiamo il rapporto di (6) a (5) vediamo che esso è assai vicino ad 1 finché la temperatura non è tale che kT sia dell'ordine di grandezza del potenziale di risonanza. Quindi la differenza può essere di qualche entità solo per i metalli alcalini, e per temperature dell'ordine di grandezza di quelle che si hanno alla superficie delle stelle.

Per averne un'idea quantitativa ho eseguito il calcolo numerico della espressione (6) per il potassio e per la temperatura di 30.000 gradi. Vi è da notare che per i metalli alcalini i termini s sono semplici, mentre quelli p, d, b, \dots sono tutti doppi, così che al quanto totale z corrispondono $2z - 1$ livelli di energia (*). Quanto al volume v_i , che a rigor di termini sarebbe diverso per ciascuno di tali livelli, l'abbiamo posto eguale a quello del corrispondente stato quantico per l'atomo di idrogeno, approssimazione che si può giustificare con la considerazione che essa è certamente legittima per grandi numeri quantici, per i quali la orbita dell'elettrone di valenza del metallo è quasi eguale a quella dell'elettrone dell'idrogeno, mentre per piccoli numeri quantici, per i quali tale identificazione delle orbite del metallo e dell'idrogeno è certo assai inesatta, viene ad essere trascurabilissima l'influenza del volume, e quindi del tutto indifferente fare sopra il volume stesso una od un'altra ipotesi. Conformemente a quanto già feci nella Nota citata ho dunque preso il volume $v_i = 6,3 \cdot 10^{-25} \cdot z^6$; ciò premesso si può, con un po' di pazienza calcolare numericamente il valore della (6).

(*) In questo calcolo non è tenuto conto della molteplicità dei livelli dovuta alla quantizzazione spaziale (N.d.R.).

Si trova che per una densità eguale ad 1 : 1000 di quella dell'aria a 0° e un'atmosfera di pressione, e alla temperatura di 30 000 gradi si ha per il potassio.

$$\Sigma e^{\frac{w_i}{kT}} - 4^{nv_i} = 231 .$$

Nelle stesse condizioni il valore della (5) è invece.

$$e^{\frac{w}{kT}} = 5,34 .$$

La differenza è dunque in questo caso considerevole, perché, a parità di concentrazione degli ioni, la teoria di Saha prevede per gli atomi neutri una concentrazione circa 40 volte più piccola.

In modo forse più chiaro questo risultato si può esprimere, cercando quella temperatura che, secondo la formula di Saha, porta allo stesso grado di ionizzazione a cui porta la (4) a 30 000 gradi. Tale temperatura si ricava evidentemente dall'equazione

$$\frac{e^{\frac{w}{kT}}}{T^{3/2}} = \frac{231}{(30\,000)^{3/2}}$$

dove $w/k = 50\,200$. Da questa equazione si ricava presso a poco $T = 12\,100$.

Si vede dunque che per temperature elevatissime le differenze, per i metalli alcalini sono abbastanza rilevanti. Bisogna però tener conto che a queste temperature tali atomi sono quasi completamente ionizzati, così che il loro spettro d'arco non è più visibile, ciò che rende impossibile ogni confronto con i dati spettroscopici delle stelle più calde; ed infatti anche il Saha, nella determinazione delle temperature delle stelle più calde si è dovuto servire dei gas nobili, ad alto potenziale di ionizzazione.

Invece, a temperature più basse, dell'ordine di grandezza di quella del sole, le differenze tra la formula di Saha e la (4) sono già piuttosto piccole. Per esempio sempre per il potassio, alla concentrazione equivalente a un millesimo di atmosfera a temperatura normale, la (4) conduce per la temperatura di 6000 gradi a prevedere un numero di atomi superiore di circa il 25 % a quello previsto dalla formula di Saha, differenza questa, che se pur potrebbe considerarsi abbastanza grande per esperienze di laboratorio, è invece piccolissima data la necessaria incertezza di questi dati astrofisici.

Se si calcola la temperatura che, con la formula di Saha, conduce allo stesso grado di ionizzazione come la (4) per la temperatura di 6000 gradi, si trova circa 5870°. Basterebbe dunque un errore di 130° sulla misura della temperatura, per eguagliare i due risultati.

Possiamo dunque concludere questa discussione, dicendo che la correzione da apportarsi alla formula di Saha, per tener conto dell'equilibrio di tutti i livelli di energia dell'atomo, risulta generalmente assai piccola. Le differenze maggiori si hanno per i metalli alcalini, e per temperature il più possibile elevate.

N° 21 a and 21 b

This paper is connected with Fermi's visit to Dutch universities. The problem of the intensities of spectral lines was investigated experimentally at that time in Utrecht, and there was also considerable interest from the theoretical point of view. A footnote in Fermi's paper indicates that he had discussed this topic with Professor P. Ehrenfest.

The Dutch version, not reproduced here, is a communication presented at a meeting of the "Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging" on November 1, 1924. The more detailed Italian paper was published later.

F. RASETTI

21 b.

SOPRA L'INTENSITÀ DELLE RIGHE MULTIPLE

« Rend. Lincei », I, 120-124 (1925) (*).

1. I nuovi metodi elaborati nell'Istituto Fisico dell'Università di Utrecht per la misura dei rapporti di intensità delle componenti di una riga multipla ⁽¹⁾, hanno permesso in questi ultimi tempi di raccogliere sopra questo argomento un materiale molto ricco e preciso, il quale ha condotto alla scoperta di regole empiriche di semplicità inaspettata ⁽²⁾. Tali regole si possono così riassumere: Dividiamo le righe di un multipletto in gruppi, ponendo in ciascun gruppo tutte quelle righe che hanno lo stesso livello di partenza (o di arrivo). Si trova che vale la seguente regola: la somma delle intensità di tutte le righe di un gruppo è proporzionale al quanto interno J , nella normalizzazione di Landé ⁽³⁾, del termine di partenza (σ di arrivo). Per esempio per i doppietti sp degli alcalini si trova il rapporto 2/1, per i tripletti sp degli alcalino-terrosi i rapporti 5 : 3 : 1, ecc. Nel caso di multipletti complessi queste regole non sono sufficienti per la determinazione dei rapporti di intensità di tutte le componenti ⁽⁴⁾, ma anche per parecchi casi di questo genere si hanno delle buone misure di intensità.

Si presenta ora la questione dell'interpretazione teorica di questo materiale empirico. Allo stato attuale della teoria dell'atomo l'unica via per una tale interpretazione ci è data dal principio di corrispondenza. Ora è noto che Sommerfeld e Heisenberg ⁽⁵⁾ hanno stabilito per mezzo del principio

(*) Presentata nella seduta del 4 gennaio 1925 dal Socio O. M. Corbino.

(1) H. B. DORGELO, « ZS. f. Phys. », 13, 206 (1923); 22, 170 (1924).

(2) H. C. BURGER e H. B. DORGELO, « ZS. f. Phys. », 23, 258 (1924).

(3) A. LANDÉ, « ZS. f. Phys. », 15, 206 (1923).

(4) Dorgelo e Burger hanno anche tentato di generalizzare le loro regole a questi casi, ma come vedremo in seguito, § 3, noi dobbiamo ritenere inesatta la loro generalizzazione.

(5) A. SOMMERFELD e W. HEISENBERG, « ZS. f. Phys. », 11, 130 (1922).

di corrispondenza una formula che dà il rapporto delle intensità delle componenti di una riga multipla. Questi Autori sono giunti al risultato che il rapporto delle intensità di tre componenti che corrispondono ai salti quantici $\Delta k = 1, \Delta j = +1, 0, -1$ è dato da

$$(1) \quad (1 + \cos \theta)^2 : 2 \sin^2 \theta : (1 - \cos \theta)^2$$

dove θ rappresenta un valore medio tra gli angoli che il momento totale dell'atomo forma col momento dell'elettrone di valenza, nell'orbita iniziale e in quella finale. La formula (1) si presta soltanto a conclusioni di carattere qualitativo (Intensitätsregel di Sommerfeld).

Ci proponiamo in questo lavoro di dimostrare come una lieve modificazione delle considerazioni di Sommerfeld e Heisenberg possa invece condurre a stabilire delle formule, che salvo alcune eccezioni spiegabili, rendono conto quantitativamente dei risultati empirici. Ecco i punti sostanziali in cui le nostre considerazioni differiscono da quelle di Sommerfeld e Heisenberg.

I. Nella deduzione della (1) il salto quantico $\Delta k, \Delta j$ che dà origine ad una componente del multipletto viene considerato come semplice, senza tener conto che realmente esso è il risultato di molti salti del quanto magnetico m , che in assenza del campo magnetico danno tutti origine alla medesima componente; supponendo per esempio l'atomo introdotto di un campo magnetico H di intensità piccolissima, si riconosce che l'intensità della riga indecomposta si deve calcolare come somma delle intensità di tutte le sue componenti Zeeman ⁽⁶⁾.

II. Abbiamo determinato l'angolo θ e l'angolo φ (formato tra il momento d'impulso totale e H) al seguente modo. Ammettiamo con Landé che i quanti R, K, J, m rappresentino rispettivamente il momento del nocciolo, il momento dell'elettrone luminoso, il momento totale e la proiezione di quest'ultimo sopra H .

Si trova allora (J risultante di R e K)

$$\cos \widehat{KJ} = \frac{J^2 + K^2 - R^2}{2KJ}, \quad \cos \widehat{HJ} = \frac{m}{J}.$$

Ora θ e φ rappresentano dei valori intermedi tra i valori che \widehat{KJ} e \widehat{HJ} assumono per l'orbita di partenza e per quella d'arrivo. Noi li abbiamo fissati al modo seguente:

$$\cos \theta = \frac{\bar{J}^2 + \bar{K}^2 - \bar{R}^2}{2\bar{J}\bar{K}}; \quad \cos \varphi = \frac{\bar{m}}{\bar{J}}$$

dove $\bar{R}, \bar{K}, \bar{J}, \bar{m}$ rappresentano le medie aritmetiche tra i due valori dei quanti corrispondenti, relativi al termine di partenza e a quello d'arrivo.

(6) Quantitativamente si ottiene a questo modo un risultato assai poco diverso da quello che si troverebbe considerando il salto come semplice, attribuendo però ad ogni salto il peso \bar{J} , eguale alla media dei due valori di J relativi al termine di partenza e a quello di arrivo; preferiamo però presentare il calcolo dell'intensità a questo modo, perché è teoricamente più chiaro, e rende inoltre conto della proibizione del salto quantico $J = 1/2 \rightarrow J = 1/2$. L'idea di procedere in questo modo mi venne da una conversazione col prof. P. Ehrenfest, al quale rinnovo qui i miei più vivi ringraziamenti.

Questo modo di calcolare θ e φ è certamente inesatto, ma esso rappresenta, come si vedrà, una approssimazione assai buona. Probabilmente il procedimento più corretto sarebbe quello di prendere come intensità la « media rettilinea » delle intensità tra le orbite estreme, poiché pare che tali medie rettilinee abbiano una particolare importanza nelle relazioni tra teoria classica e teoria dei quanti ⁽⁷⁾. Questo procedimento condurrebbe però a difficoltà che appaiono per ora insormontabili.

2. Sommerfeld e Heisenberg trovano per le intensità delle singole componenti Zeeman di un multipletto, a meno di un fattore che è lo stesso per tutte le righe dello stesso multipletto, i valori dati dalla seguente

TABELLA I.

| ΔK | ΔJ | Δm | |
|------------|------------|------------|--|
| 1 | ± 1 | 1 | $(1 \pm \cos \theta)^2 (1 \pm \cos \varphi)^2$ |
| 1 | ± 1 | 0 | $2 (1 \pm \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi$ |
| 1 | ± 1 | -1 | $(1 \pm \cos \theta)^2 (1 \mp \cos \varphi)^2$ |
| 1 | 0 | ± 1 | $4 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$ |
| 1 | 0 | 0 | $8 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$. |

Bisogna introdurre ora per θ e per φ i valori (2) e sommare poi le intensità di tutte le componenti Zeeman che, per $H = 0$, danno origine alla stessa riga indecomposta. Questo calcolo è un po' lungo, perché bisogna considerare separatamente i singoli casi, ma è del tutto privo di difficoltà.

Si trovano per le intensità le formule che sono date dalla seguente:

TABELLA II.

| ΔK | ΔJ | <i>Intensità</i> |
|------------|------------|--|
| ± 1 | ± 1 | $\left[\frac{2(K+J+1)^2 - 2\bar{R}^2}{(2K+1)(2J+1)} \right]^2 \frac{4J(8J^2 + 12J + 5)}{(2J+1)^2}$ |
| ± 1 | 0 | $\frac{4J^2(2K+1)^2 - \{4J^2 + (2K+1)^2 - 4\bar{R}^2\} 4J^2 - 1}{J^2(2K+1)^2} \frac{4J^2 - 1}{J}$ |
| ± 1 | ± 1 | $\left[\frac{2\bar{R}^2 - 2(K-J+1)^2}{(2K+1)(2J-1)} \right]^2 \frac{4(J-1)(8J^2 - 4J + 1)}{(2J-1)^2}$ |

NB. - Per K e per J bisogna porre sempre i valori che corrispondono al termine con K più piccolo.

3. Vogliamo ora confrontare queste formule con l'esperienza. Possiamo prevedere che per le combinazioni *sp*, per le quali la forma dell'orbita si altera molto durante il salto quantico, si avrà soltanto un accordo qualitativo, tra teoria ed esperienza, mentre l'accordo sarà assai migliore per le combinazioni *pd*, *db*.

Nel seguente confronto tra i valori teorici e i dati sperimentali, le intensità delle varie componenti del multipletto sono per comodità espresse in percentuali della riga più intensa.

(7) Vedi per esempio M. BORN, « *ZS. f. Phys.* », 26, 379 (1924).

| | | | | |
|--------|-------------------------|--------|-------------------------------|-----------------------------|
| (sp) { | Doppietti | teoria | 100 : 26,5 | (Metalli alcalini 1 p — ms) |
| | | esp. | 100 : 50 | |
| | Tripletto | teoria | 100 : 43 : 19 | (Alcalino-terrosi 1 p — ms) |
| | | esp. | 100 : 60 : 20 | |
| (pd) { | Doppietti comp. | teoria | 100 : 10 : 54 | (Ca, 1 p — 2 d) |
| | | esp. | 100 : 11 : 55 | |
| | Tripletto comp. | teoria | 100 : 17 : 1,5 : 55 : 15 : 23 | (Ca, 1 p — 2 d) |
| | | esp. | 100 : 18 : 1 : 54 : 19 : 25 | |
| (db) { | Tripletto comp. | teoria | 100 : 6 : 0,15 : 68 : 8 : 46 | (Sr, 1 d — 3 b) |
| | | esp. | 100 : 9 : < 1 : 69 : 9 : 48 | |
| | Tripletto con termine b | teoria | 100 : 72 : 43 | (Ca, 1 d — 3 b) |
| | non risolto | esp. | 100 : 72 : 45 | |

Come si vede, ove si escluda l'eccezione spiegabile delle combinazioni *sp* l'accordo si può dire ottimo.

Osserviamo ancora che la regola di Dorgelo e Burger citata al principio si può dedurre come legge limite delle nostre formule, ed è in pratica già eseguita con esattezza notevole per le combinazioni *pd*. Riteniamo dunque assai probabile che essa sia in realtà esatta. Riteniamo invece inesatta la generalizzazione che ne hanno tentato Dorgelo e Burger, e in particolare la tabella 5 del loro citato lavoro (pag. 265). Secondo tale tabella risulta infatti per esempio che il rapporto tra la componente più intensa e quella più debole di un tripletto composto *pd* è, per K grande, $12 K^2 : 1$. Secondo il principio di corrispondenza si trova invece $\frac{256}{81} K^4 : 1$. Appare dunque che l'intensità della componente più debole decresca in realtà assai più rapidamente che secondo la tabella 5 di Dorgelo e Burger.

4. Aggiungiamo una osservazione relativa alle componenti Zeeman. Sommerfeld e Heisenberg, scegliendo l'angolo φ in modo diverso da noi, trovano per tali intensità dei risultati rappresentati graficamente alla fine del loro citato lavoro. Essi trovano che le intensità delle righe polarizzate parallelamente, anche osservando perpendicolarmente al campo, risulta minore in media del 20% di quella delle componenti trasversali; e ciò li induce ad esprimere la supposizione, che tale differenza esista realmente, ciò che porterebbe alla strana conseguenza, che la luce emessa in un campo magnetico, se anche tanto debole da non produrre una separazione, dovrebbe essere polarizzata perpendicolarmente al campo. Calcolando col nostro metodo si trovano delle figure assai simili a quelle di Sommerfeld e Heisenberg, con la sola differenza che le componenti parallele risultano alquanto più intense, per modo che già per le combinazioni *pd* la differenza delle intensità complessive delle componenti parallele e perpendicolari non supera pochi per cento, e passando alle combinazioni superiori, per le quali il principio di corrispondenza merita maggiore fiducia, va sempre diminuendo. Noi riteniamo assai probabile che tale piccola differenza sia dovuta all'inesattezza della nostra applicazione del principio di corrispondenza, e che in realtà essa non esista. Ad ogni modo sarebbero desiderabili delle esperienze per chiarire questo importante punto.

N° 22, 29, 34.

The "Periodico di Matematiche" was a review directed by F. Enriques and devoted to the needs of the teachers of secondary schools. Enriques, although not a physicist, insisted strongly that the review should deal not only with mathematics but also, at an elementary level, with the most modern subjects of physics. It can be presumed, therefore, that these two articles were solicited from Fermi by Enriques, who had a very high opinion of the young physicist.

At that time Fermi gave several lectures before the Mathematics Seminar at the University of Rome and some of the articles correspond to the lectures. At that time there was no Physics Seminar at the University of Rome.

E. SEGRÈ

22.

SUI PRINCIPI DELLA TEORIA DEI QUANTI

« Rend. Seminario matematico Università di Roma », 8, 7-12 (1925).

La teoria dei quanti si basa, come si sa, su due principii fondamentali, che si possono enunciare come segue:

a) il moto di un sistema atomico è un moto meccanicamente possibile (cioè calcolabile mediante le solite leggi della meccanica e la legge di Coulomb); non però tutti i moti meccanicamente possibili possono essere effettivamente effettuati dal sistema, ma soltanto una successione discreta di essi, detti quantici o statici; cosicché in particolare anche l'energia w del sistema non potrà corrispondentemente assumere altro che una successione discreta di valori, detti livelli di energia, w_1, w_2, \dots, w_n ;

b) finché il sistema descrive un moto statico non si ha irradiazione di energia (contrariamente ai risultati della elettrodinamica classica). L'irradiazione dell'energia è invece sempre legata al processo, non meccanico, del salto dell'elettrone da un moto quantico ad un altro; se w e w' rappresentano le energie corrispondenti ai due moti tra i quali avviene il salto, l'energia irradiata sarà $w - w'$; si ammette che questa energia sia irradiata in un solo quanto. La frequenza con cui l'energia viene irradiata sarà dunque

$$(1) \quad \nu = \frac{w - w'}{h} .$$

Questi due principii possono considerarsi come ormai sperimentalmente accertati, specialmente dalle esperienze di Franck e della sua scuola sopra i potenziali di ionizzazione, con le quali esperienze si sono potuti misurare direttamente i livelli di energia, e verificare quindi la (1).

I principii a) e b) non sono però naturalmente sufficienti a risolvere tutti i problemi della fisica atomica; essi debbono perciò essere integrati con la

soluzione di altri problemi, la cui soluzione è per ora soltanto incompleta od incerta.

Noi cercheremo in questa conferenza di esporre come si possa almeno tentare una soluzione sistematica di alcuni di questi problemi; e precisamente ci occuperemo dei seguenti:

1° quali sono le regole colle quali debbano scegliersi i moti quantici tra la successione continua dei moti meccanicamente possibili. La risoluzione completa di questo problema sarebbe evidentemente importantissima, perché permetterebbe poi, mediante la (1), di calcolare tutte le frequenze che l'atomo in considerazione può emettere, di risolvere cioè completamente il problema della determinazione teorica delle linee spettrali;

2° quale è la probabilità che, ad una data temperatura, un atomo si trovi in uno o nell'altro dei suoi moti meccanicamente possibili;

3° quale è la probabilità perché un atomo che si trova in un certo stato quantico, nell'intervallo di tempo dt passi ad un altro.

Questi tre problemi si possono, almeno parzialmente risolvere, ricorrendo a principii generali, e specialmente al cosiddetto principio delle adiabatiche di Ehrenfest, e al principio di corrispondenza di Bohr.

Chiamiamo *meccanismo* di un sistema meccanico il complesso delle forze e dei vincoli di esso; allora il moto delle parti del sistema dipenderà dal meccanismo e dalle condizioni iniziali del sistema. Possiamo ora pensare di alterare il meccanismo di un sistema in modo infinitamente lento: una tale trasformazione si dice una trasformazione adiabatica (per analogia alle trasformazioni omonime che si studiano nella teoria del calore). Le costanti che caratterizzano il movimento, per esempio l'energia, verranno in una trasformazione adiabatica a variare in funzione del meccanismo.

Consideriamo per esempio un oscillatore. Una variazione adiabatica del suo meccanismo si potrà ottenere facendo variare in modo infinitamente lento la forza che richiama la particella verso la sua posizione di equilibrio. Se ora chiamiamo x l'elongazione della particella, m la sua massa e ν la sua frequenza avremo

$$(2) \quad m\ddot{x} + 4\pi^2\nu^2 mx = 0$$

l'energia sarà poi

$$(3) \quad w = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + 2\pi^2\nu^2 mx^2 = 4\pi^2\nu^2 m\bar{x}^2$$

indicandosi con \bar{x}^2 il valor medio di x^2 . Se supponiamo dunque di dare a ν un incremento $d\nu$, l'energia varierà corrispondentemente di $4\pi^2\nu m\bar{x}^2 d\nu$. Ma se tale variazione di ν avviene in un tempo molto lungo bisognerà sostituire x^2 con la sua media. Avremo perciò $dw = 4\pi^2\nu d\nu m\bar{x}^2$; e quindi

$$\frac{dw}{w} = \frac{d\nu}{\nu}$$

da cui risulta

$$\frac{w}{\nu} = \text{costante.}$$

Ne segue che se all'inizio della trasformazione si aveva $\frac{w}{\nu} = nh$, tale relazione si manterrà valida ancora durante tutta la trasformazione.

Ora si sa già dalla teoria della radiazione del corpo nero di Planck che i moti privilegiati di un oscillatore soddisfano appunto alla relazione $w = nh\nu$. Possiamo perciò concludere che se ad un certo istante un oscillatore si trova in un moto quantico, esso resterà in un moto quantico anche dopo una trasformazione adiabatica. Ora Ehrenfest ha generalizzato questa osservazione fatta per l'oscillatore, enunciando in generale il principio, che se un sistema si trova ad un istante iniziale in uno stato quantico, esso seguita a restare in un tale stato dopo una qualsiasi trasformazione adiabatica.

Per bene comprendere tutta la portata del principio di Ehrenfest, conviene ricordare un teorema dovuto a Burgers. Questo teorema si riferisce ai cosiddetti sistemi a variabili separate, cioè a quei sistemi per i quali l'equazione alle derivate parziali di Jacobi, prendendo un opportuno sistema di coordinate generali q_1, q_2, \dots, q_f e di momenti p_1, p_2, \dots, p_f ad esse coniugati, ammette una soluzione che si spezza nella somma di addendi dipendenti ciascuno da una sola delle coordinate, per modo che p_i è funzione della sola coordinata q_i . Ora Burgers dimostra che per tali sistemi gli integrali

$$(4) \quad J_1 = \int p_1 dq_1; \quad J_2 = \int p_2 dq_2; \quad \dots; \quad J_f = \int p_f dq_f$$

estesi ad una oscillazione completa della coordinata q_i , sono degli invarianti adiabatici, e cioè che il loro valore si mantiene costante se il sistema si assoggetta ad una trasformazione adiabatica. Tenendo presente il principio di Ehrenfest resta allora chiaro che le J saranno le quantità che debbono essere quantizzate. Ora per l'oscillatore si troverebbe facilmente $J = \frac{w}{\nu}$ e dunque per esso la condizione perché il moto sia quantico si può scrivere semplicemente $J = nh$. La naturale generalizzazione di questa condizione al caso generale dei sistemi a variabili separate ci conduce a scrivere le condizioni di Bohr-Sommerfeld per la determinazione delle orbite statiche di tali sistemi. Esse sono

$$(5) \quad J_1 = n_1 h; \quad J_2 = n_2 h; \quad \dots; \quad J_f = n_f h$$

dove le n rappresentano dei numeri interi. Sono note le brillanti applicazioni delle (5) alla determinazione teorica dello spettro dell'idrogeno, fin nelle sue più delicate particolarità, e si sa anche che da esse si è potuta ricavare l'interpretazione degli spettri di alta frequenza, e per lo meno qualitativamente, si sono potute spiegare gran parte delle particolarità degli spettri più complicati.

Siccome però tutti gli atomi, ad eccezione dell'idrogeno, possono rappresentarsi con sistemi a variabili separate solo in una prima, e piuttosto grossolana approssimazione, la determinazione quantitativa dei loro spettri non è ancora riuscita, e il metodo delle perturbazioni, così fecondo nell'astronomia, non è in questo caso riuscito a dare una soluzione soddisfacente nemmeno per l'atomo di elio, che è il più semplice dopo quello di idrogeno.

La soluzione del secondo dei problemi accennati in principio, quello cioè di determinare la probabilità che un atomo si trovi in uno dei suoi stati quantici, ci è anche essa indicata dal principio delle adiabatiche, Ehrenfest ha infatti dimostrato che se un sistema si trasforma in un altro con una trasformazione adiabatica, le probabilità a priori dei suoi stati quan-

tici prima della trasformazione sono eguali a quelle degli stati quantici corrispondenti dopo la trasformazione. Ora, per esempio, per l'oscillatore si sa dalla teoria del corpo nero, che la probabilità a priori di tutti i suoi stati è eguale (dall'ammettere questo si deduce infatti la nota formula $\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$

per l'energia media dell'oscillatore). Possiamo perciò concludere intanto che per tutti i sistemi che si possono dedurre dall'oscillatore con una trasformazione adiabatica, le probabilità a priori di tutti gli stati quantici sono eguali tra di loro. È allora abbastanza naturale ammettere che una tale proprietà valga per tutti i sistemi atomici. Risolta così la questione preliminare della probabilità a priori, i soliti metodi della statistica ci conducono a porre la probabilità di uno stato quantico proporzionale a $e^{-w/kT}$ essendo w la sua energia, e ci permettono perciò di risolvere completamente il problema secondo.

Per poter risolvere però il problema dell'intensità delle linee spettrali, non basta evidentemente sapere quale è il numero degli atomi che si trovano in un certo stato quantico, ma bisogna anche sapere quale è la probabilità che un atomo, che si trova in un certo stato quantico, salti in un altro stato determinato. Per la risoluzione di quest'ultimo problema è d'importanza fondamentale il principio di corrispondenza di Bohr. È questo un principio di natura assai diversa da tutti gli altri principii della fisica e della matematica; mentre infatti di solito tali principii contengono una affermazione di significato preciso, come per esempio $A = B$, oppure $A > B$, il principio di corrispondenza dice semplicemente A somiglia a B ; e precisamente: l'intensità e lo stato di polarizzazione delle righe emesse da un atomo col meccanismo della teoria dei quanti, somigliano all'intensità e allo stato di polarizzazione delle righe che lo stesso atomo emetterebbe secondo il meccanismo classico. A base di questo principio sta l'osservazione fondamentale, fatta da Bohr, che al limite per numeri quantici infinitamente grandi si ha identità tra lo spettro emesso secondo la teoria dei quanti, e quello emesso secondo la teoria classica. È naturale dunque ammettere che a questa identità delle lunghezze d'onda faccia riscontro anche la identità dell'intensità e dello stato di polarizzazione. Si capisce poi come all'identità che si ha rigorosamente al limite, corrisponda, per numeri quantici finiti, la semplice somiglianza; queste sono le basi formali del principio di corrispondenza, il quale si è in un gran numero di casi dimostrato in ottimo accordo con l'esperienza, almeno fino a quel punto che l'imprecisione stessa della sua natura può permettere di attendersi. In qualche caso, del resto, il principio di corrispondenza permette di ottenere delle informazioni del tutto precise; e ciò si verifica, per esempio, nei casi nei quali qualche riga spettrale o qualche sua componente deve, classicamente, avere intensità nulla; in questo caso si può concludere che quella riga o quella sua componente mancano completamente anche dallo spettro quantistico. Tutte le conseguenze di questo genere sono state completamente verificate dall'esperienza.

Possiamo dunque concludere questa discussione dicendo, che se pur manca nella teoria dei quanti la risoluzione di alcuni problemi di importanza fondamentale, non manca tuttavia il tentativo di dedurre tutte le regole, logicamente, da alcuni principii generali.

N° 23 a and 23 b.

In this paper we find clearly the characteristics of the more mature style of Fermi: a fundamental idea, at the same time simple and clever, is applied to several interesting concrete problems of practical importance with the help of mathematical methods of sufficient approximation, but not better than warranted by the underlying physical hypotheses. The results agree with experiment, but only to an order of magnitude, and Fermi typically remarks that in one of the applications the agreement with experiments is better than should be expected.

Soon after the publication of this paper Bohr observed that Fermi's method when applied to the energy distribution of the electrons ejected disagrees with experiment and concluded: "Unter diesen Umständen kann es kaum als eine Stütze für die von Fermi benutzten Annahmen betrachtet werden, dass eine auf der Forderung der Energiebilanz gegründete Schätzung der Bremswirkung Resultate gibt, die angenähert mit den Versuchen übereinstimmen" («ZS. f. Phys.», 34, 149 (1925)).

Later on, when quantum mechanics was developed, Fermi's method for the study of collisions with electrically charged particles found adequate theoretical justification through a theorem by Dirac (P. A. M. Dirac *Principles of Quantum Mechanics*, 1930, page 167) as remarked by E. J. Williams («Proc. Roy. Soc.», 139, 163 (1933)). This author discussed carefully the validity limits of Fermi's method and, using the quantum mechanical values of the matrix elements, calculated the excitation and ionization probability in distant collisions. A little later C. F. v. Weizsaecker used the same method for the calculation of Bremsstrahlung («ZS. f. Physik», 88, 612 (1937)). Williams and Weizsaecker were working at the time at Copenhagen. The method under the name of Weizsaecker-Williams has found ever wider applications to atomic and nuclear problems, and Fermi himself used it on many occasions. Indeed its fundamental idea was a favorite one with him for his whole life.

Paper N° 23 b is a translation of paper N° 23 a, with a few minor additions.

E. PERSICO

23 b.

ÜBER DIE THEORIE DES STOSSES ZWISCHEN ATOMEN UND ELEKTRISCH GELADENEN TEILCHEN

«Z. Physik», 29, 315–327 (1924).

Das elektrische Feld eines geladenen Teilchens, welches an einem Atom vorbeifliegt, wird harmonisch zerlegt, und mit dem elektrischen Feld von Licht mit einer passenden Frequenzverteilung verglichen. Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Atom vom vorbeifliegenden Teilchen angeregt oder ionisiert wird, gleich ist der Wahrscheinlichkeit für die Anregung oder Ionisation durch die äquivalente Strahlung. Diese Annahme wird angewendet auf die Anregung durch Elektronenstoss und auf die Ionisierung und Reichweite der α -Strahlen.

1. Wenn ein Atom, das sich im Normalzustand befindet, mit Licht von geeigneter Frequenz belichtet wird, kann es angeregt werden, d. h. kann es ein Quantum absorbieren, und dadurch zu einem höheren Energieniveau gehoben werden. Ist das Quantum des anregenden Lichtes grösser als die

Ionisierungsarbeit des Atoms, so kann es ionisiert werden, indem es ein Elektron der äusseren oder der inneren Atomschalen verliert.

Ähnliche Erscheinungen finden bei dem Stosse zwischen Atomen und Elektronen statt. Wenn man die Atome eines Gases mit Elektronen bombardiert, tritt für kleine Geschwindigkeiten der Elektronen die Anregung der Atome, und für grössere die Ionisation zuerst der äusseren, und dann der inneren Atomschalen ein.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist, die Analogie zwischen diesen beiden Klassen von Erscheinungen zu präzisieren und die Erscheinungen bei dem Stosse quantitativ aus der Lichtabsorption abzuleiten.

Wenn ein elektrisch geladenes Teilchen in der Nähe eines Punktes vorüberfliegt, entsteht in diesem Punkte ein veränderliches elektrisches Feld. Wenn wir nun dieses Feld durch ein Fouriersches Integral in harmonische Komponenten zerlegen, so sehen wir, dass es gleich dem Felde ist, das in dem Punkte sein würde, wenn es mit Licht von einer passenden kontinuierlichen Frequenzenverteilung belichtet würde. Denken wir jetzt, dass ein Atom sich in diesem Punkte befinde: dann liegt es ziemlich nahe, anzunehmen, dass das elektrische Feld des geladenen Teilchens an dem Atom dieselben Anregungs- und Ionisierungserscheinungen verursacht wie das elektrische Feld des äquivalenten Lichtes. Wenn wir den Absorptionskoeffizienten des Atoms für das Licht als Funktion der Frequenz kennen, können wir die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass ein elektrisch geladenes Teilchen, das mit gegebener Geschwindigkeit in einer gegebenen Entfernung von einem Atom vorbeifliegt, es ionisiere. Schon jetzt muss man aber eine Einschränkung zu dieser Korrespondenz zwischen dem elektrischen Felde des Lichtes und dem des Teilchens einführen. Man weiss ja, dass ein Körper mit der Geschwindigkeit v durch Stoss nur Erscheinungen verursachen kann, für die eine Energie kleiner als seine kinetische Energie nötig ist. Dagegen findet man, dass in der harmonischen Zerlegung seines elektrischen Feldes alle Frequenzen, einschliesslich der höchsten, vorkommen. Man ist daher anzunehmen genötigt, dass alle Frequenzen, deren Quantum grösser als die kinetische Energie des Teilchens ist, keine Wirkung haben können, da die nötige Energie fehlt, um ein ganzes Quantum zu liefern.

Wir haben unsere Hypothese auf drei Erscheinungen angewendet, die eine experimentelle Bestätigung derselben ermöglichen, nämlich:

a) Die Anregung der Quecksilberlinie 2537 \AA . Die optische Absorption dieser Linie ist quantitativ genügend bekannt; es gibt ausserdem Versuche, aus denen man die Grössenordnung der Wahrscheinlichkeit entnehmen kann, dass Quecksilberatome durch Stoss von langsamen Elektronen angeregt werden. Unsere Theorie gibt für diese Wahrscheinlichkeit einen etwas grossen Wert, doch von der richtigen Grössenordnung; natürlich schliesst aber die Unbestimmtheit der experimentellen Ergebnisse eine strenge Prüfung der Theorie aus.

b) Die Zahl der pro Zentimeterweg von den α -Teilchen des RaC erzeugten Ionenpaare. Wir haben diese Anwendung für das Helium durchgeführt, da man für dieses Gas mit genügender Annäherung den Absorptionskoeffizient als Funktion der Frequenz kennt, weil das Helium mono-

atomisch ist, und sein Atom nur aus dem K-Elektronenringe besteht. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung ist befriedigend. Die früheren Theorien der Stossionisierung⁽¹⁾ können folgendermassen zusammengefasst werden: Wenn ein elektrisch geladenes Teilchen in der Nähe eines Atoms vorbeifliegt, werden seine Elektronen von ihm angezogen, so dass ihnen eine gewisse kinetische Energie übertragen wird, die mit der Annahme berechnet wird, dass die Elektronen im Innern des Atoms frei sind. Man nimmt weiter an, dass ein Elektron vom Atom abgerissen wird, sobald diese Energie seine Ionisierungsarbeit übertrifft.

c) Die Reichweite der α -Teilchen des RaC im Helium. Als Mechanismus der Bremsung der α -Teilchen haben wir den folgenden angenommen: Wenn das α -Teilchen durch das Helium fliegt, entsteht um es herum ein veränderliches elektrisches Feld, dessen Energie von den benachbarten Atomen absorbiert wird, als ob es das elektrische Feld einer Lichtwelle wäre. Die auf diese Weise absorbierte Energie wird natürlich auf Kosten der Energie des Teilchens geliefert, das dadurch gebremst wird. Auch für diesen Fall ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung ganz befriedigend. Die Bremsung der α -Strahlen durch die Materie ist früher theoretisch von Thomson und Bohr⁽²⁾ studiert worden. Nach Bohr sind die Elektronen im Atom von quasi-elastischen Kräften gebunden und werden von dem Teilchen angezogen und in Bewegung gesetzt; die Energie des Teilchens wird dabei natürlich um den Betrag der auf die Elektronen übertragenen Energie vermindert. Bohr findet eine gute Übereinstimmung mit der Erfahrung, indem er für die Frequenz der Bindung je nach dem Fall Werte der Grossenordnung der optischen oder der Röntgenfrequenzen annimmt.

Im zweiten Paragraphen dieser Arbeit werden einige Formeln für die Berechnung des dem elektrischen Felde des geladenen Teilchens äquivalenten Lichtfeldes entwickelt, im dritten, vierten und fünften werden dann die Anwendungen a), b) und c) dargestellt.

2. Wir wollen zuerst die spektrale Energieverteilung berechnen, die dem von einem Teilchen mit der Ladung ϵ in einem Punkte P erzeugten Felde äquivalent ist. Sei v die Geschwindigkeit des Teilchens und b die kleinste Entfernung zwischen dem Teilchen und dem Punkte P. Die Komponenten der elektrischen Kraft, parallel und senkrecht zu der Geschwindigkeit des Teilchens, sind

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{\epsilon v \Theta}{(b^2 + v^2 \Theta^2)^{3/2}}, \\ E_a = \frac{\epsilon b}{(b^2 + v^2 \Theta^2)^{3/2}}, \end{array} \right.$$

wo Θ die seit dem Augenblick der kleinsten Entfernung verfllossene Zeit bedeutet. Ist nun T eine Zeit, die wir nachher ins Unendliche wachsen lassen

(1) J. J. THOMSON, « Phil. Mag. », 23, 449, 1912; N. BOHR, ebenda 30, 581 (1915); S. ROSSELAND, ebenda 45, 65, (1923).

(2) N. BOHR, « Phil. Mag. », 25, 10 (1913); 30, 581 (1915).

werden, so können wir E_x und E_z in Fourierscher Reihe, für $-\frac{T}{2} < \Theta < \frac{T}{2}$, entwickeln. Wir finden

$$(2) \quad \begin{cases} E_x = \sum a_n \sin \frac{2 \pi n}{T} \Theta, \\ E_z = \sum b_n \cos \frac{2 \pi n}{T} \Theta, \end{cases}$$

wo

$$(3) \quad \begin{cases} a_n = \frac{2 \epsilon v}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\Theta \sin \frac{2 \pi n \Theta}{T} d\Theta}{(b^2 + v^2 \Theta^2)^{3/2}}, \\ b_n = \frac{2 \epsilon b}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\cos \frac{2 \pi n \Theta}{T} d\Theta}{(b^2 + v^2 \Theta^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Das elektrische Feld $a_n \sin (2 \pi n \Theta/T)$ ist nun gleich dem elektrischen Felde einer Lichtwelle der Intensität $\frac{c}{4 \pi} \frac{a_n^2}{2}$ und der Frequenz $\nu = n/T$. Sei nun $J(\nu) d\nu$ die mit der Wirkungsdauer T multiplizierte gesamte Lichtintensität des Frequenzintervalls $d\nu$; wir finden

$$J(\nu) d\nu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{cT}{4 \pi} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} T d\nu = \frac{c \epsilon^2}{2 \pi} \left\{ b^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2 \pi \nu \Theta d\Theta}{(b^2 + v^2 \Theta^2)^{3/2}} \right)^2 + v^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2 \pi \nu \Theta d\Theta}{(b^2 + v^2 \Theta^2)^{3/2}} \right)^2 \right\} d\nu.$$

Die in diesem Ausdruck vorkommenden Integrale können mit den modifizierten Besselschen⁽³⁾ Funktionen zweiter Art, nullter und erster Ordnung ausgedrückt werden. Man hat in der Tat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = 2 \omega K_1(\omega),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \omega x dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = -2 \omega K_0(\omega).$$

Durch diese Formeln finden wir sofort:

$$(4) \quad J(\nu) = \frac{8 \pi c \epsilon^2 v^2}{v^4} \left\{ K_0^2 \left(\frac{2 \pi \nu b}{v} \right) + K_1^2 \left(\frac{2 \pi \nu b}{v} \right) \right\},$$

setzen wir zur Abkürzung

$$B(\omega) = K_0^2(\omega) + K_1^2(\omega),$$

so finden wir

$$(5) \quad J(\nu) = \frac{8 \pi c \epsilon^2 v^2}{v^4} B \left(\frac{2 \pi \nu b}{v} \right).$$

(3) Siehe z. B. GRAY, MATHEWS and MACROBERT, *Bessel Functions*, London 1922 wo man auch numerische Tabellen dieser Funktionen finden kann. Über die Fouriersche Entwicklung dieser Kräfte siehe auch BOHR, l. c.

Da aber alle Frequenzen, deren Quantum grösser ist als die kinetische Energie des Teilchens, nach unserer Annahme keine Wirkung haben können, finden wir, dass das Vorüberfliegen des Teilchens folgender spektralen Verteilung äquivalent ist:

$$(6) \quad J(\nu) = \begin{cases} \frac{8\pi c \epsilon^2 \nu^2}{v^4} B\left(\frac{2\pi\nu b}{v}\right) & \text{für } h\nu \leq \frac{1}{2}mv^2, \\ 0 & \text{für } h\nu > \frac{1}{2}mv^2. \end{cases}$$

3. Wir wollen jetzt an einem einfachen Beispiel die Anwendung der allgemeinen Methode erläutern. Wir werden nämlich die Anregung des Resonanzlichtes durch Stoss studieren. Betrachten wir z. B. ein Quecksilberatom, und sei $\alpha(\nu)$ sein Absorptionskoeffizient für die Frequenz ν . Das bedeutet, dass das Atom, wenn es von der Lichtintensität $J(\nu) d\nu$ getroffen wird, im Mittel die Energie $J(\nu) \alpha(\nu) d\nu$ absorbiert, d. h. dass die Wahrscheinlichkeit der Absorption eines Quantums $h\nu$ ist:

$$(7) \quad \frac{J(\nu) \alpha(\nu) d\nu}{h\nu}.$$

Da nun der Absorption eines Quantums der Absorptionslinie die Anregung des Atoms zum Energieniveau $2p$ entspricht, finden wir, dass (7) die Anregungswahrscheinlichkeit darstellen würde, falls nur die Frequenzen des Intervalls $d\nu$ wirken könnten. Sei nun $\Pi(b)$ die Anregungswahrscheinlichkeit des Zustandes $2p$, wenn das Teilchen in der Entfernung b vorüberfliegt; man erkennt sofort⁽⁴⁾, dass

$$(8) \quad \Pi(b) = 1 - e^{-\int \frac{J(\nu) \alpha(\nu) d\nu}{h\nu}}.$$

Da nun für den Fall der Resonanz $\alpha(\nu)$ nur in einem ganz schmalen Bereiche um die Resonanzfrequenz ν_0 von Null verschieden ist, können wir schreiben:

$$\int \frac{J(\nu) \alpha(\nu) d\nu}{h\nu} = \frac{J(\nu_0) \alpha}{h\nu_0}.$$

wo gesetzt worden ist

$$\alpha = \int \alpha(\nu) d\nu.$$

(4) In der Tat ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Atom kein Quantum absorbiert.

$$1 - \Pi(b) = \Pi\left(1 - \frac{J(\nu) \alpha(\nu) d\nu}{h\nu}\right),$$

wo das Produkt über sämtliche unendlich kleine Frequenzintervalle $d\nu$ erstreckt werden muss. Wenn wir dann die Logarithmen der beiden Glieder nehmen, finden wir, im Limes:

$$\log[1 - \Pi(b)] = \Sigma \log\left(1 - \frac{J(\nu) \alpha(\nu) d\nu}{h\nu}\right) = -\int \frac{J(\nu) \alpha(\nu) d\nu}{h\nu},$$

woraus die Formel (8) folgt.

Formel (8) wird also in unserem Falle

$$(8^*) \quad \Pi(b) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\hbar v_0} J(v_0)}.$$

Hieraus kann man den äquivalenten Radius ρ des Atoms für die Anregung des Resonanzlichtes berechnen, d. h. den Radius, den das Atom unter der Annahme haben würde, dass jeder Stoss die Ionisation hervorriefe. Dieser Radius ist offenbar gegeben durch

$$\pi \rho^2 = 2 \pi \int b db \Pi(b).$$

Daher finden⁽⁵⁾ wir, unter Berücksichtigung von (6), dass für $\frac{1}{2} m v^2 > \hbar v_0$

$$(9) \quad \rho^2 = 2 \int_0^\infty \left\{ 1 - e^{-\frac{8 \pi e^2 c \alpha v_0}{\hbar v^4} B\left(\frac{2 \pi v_0 b}{v}\right)} \right\} b db = \frac{v^2}{2 \pi^2 v_0^2} \int_0^\infty \left(1 - e^{-\frac{8 \pi e^2 c \alpha v_0}{\hbar v^4} B(x)} \right) x dx.$$

Das Integral kann angenähert berechnet werden⁽⁶⁾, und wir finden:

$$(9^*) \quad \rho^2 = \frac{2 e^2 c \alpha}{\pi \hbar v_0 v^2} \left(0,54 - \log \frac{8 \pi e^2 c \alpha v_0}{\hbar v^4} \right).$$

Experimentell wurde die Anregung der Resonanzlinie 2537 des Hg durch Elektronenstoss von Fr. Sponer⁽⁷⁾ untersucht. Leider gibt aber diese Arbeit

(5) Tatsächlich wird ein Elektron, das mit kleiner Geschwindigkeit in der Nähe eines Atoms vorbeifliegt, vom elektrischen Felde des Atoms beträchtlich von seiner Bahn abgelenkt. Da wir aber nur die Grössenordnung der Erscheinung brauchen, wenden wir trotzdem Formel (6) an.

(6) Um einen angenäherten Ausdruck von

$$J(\alpha) = \int_0^\infty [1 - e^{-\alpha B(x)}] x dx$$

für $\alpha \ll 1$ zu bekommen, beachten wir, dass man für $x < 0,4$ mit genügender Annäherung hat: $B(x) = \frac{1}{x^2}$; für $\alpha \ll 1$ und $x > 0,4$ kann man weiter setzen:

$$1 - e^{-\alpha B(x)} = \alpha B(x).$$

Daher können wir schreiben

$$J(\alpha) = \int_0^{0,4} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{x^2}} \right) x dx + \alpha \int_{0,4}^\infty B(x) x dx.$$

Für das zweite Integral finden wir durch numerische Berechnung den Wert $0,973 \alpha$. Das erste kann mit Benutzung der asymptotischen Ausdrücke des Integrallogarithmus leicht berechnet werden, und man findet dafür den Wert $-\frac{\alpha}{2} \log \alpha - 0,705 \alpha$. Daher erhält man endlich:

$$J(\alpha) = \left(0,268 - \frac{1}{2} \log \alpha \right) \alpha.$$

(7) HERTHA SPONER, «Zs. f. Phys.», 7, 185 (1921).

nur die Grössenordnung der Anregungswahrscheinlichkeit. Frl. Sponer findet nämlich, dass, wenn Elektronen mit einer Geschwindigkeit nicht viel grösser als 4,9 Volt gegen Hg-Atome stossen, nur einige Prozente Wahrscheinlichkeit vorhanden sind, dass die Atome angeregt werden. Um den Wert von ρ durch (9*) zu berechnen, nehmen wir für v den dem Potential von 8 Volt entsprechenden Wert. Den Wert von α können wir einer Arbeit von Füchtbauer⁽⁸⁾ entnehmen. Füchtbauer findet, dass, wenn ein Quecksilberatom von Licht mit der Energieverteilung $J(\nu)$ getroffen wird, die Wahrscheinlichkeit der Absorption eines Quants der Resonanzfrequenz $PJ(\nu_0)$ beträgt, wo $P = 8 \cdot 10^7$. Nun hat man offenbar $\alpha = P h\nu$ und daher $\alpha = 6 \cdot 10^{-4}$, (9*) gibt uns jetzt

$$\rho = 0,8 \cdot 10^{-8}.$$

Dieser Wert ist gewiss etwas grösser als der von Frl. Sponer gefundene. Nähme man auch an, dass die Ausbeute an unelastischen Stössen 9 Proz. wäre, würde man doch immer für ρ den Wert $0,4 \cdot 10^{-8}$ bekommen, d. h. ungefähr die Hälfte des von uns erhaltenen Wertes. Man kann sich aber leicht diese Abweichung erklären. Wenn Elektronen mit der Geschwindigkeit von einigen Volt in der Entfernung der Grössenordnung von 10^8 -cm an einem Elektron vorbeifliegen, werden sie bereits sehr stark von ihm abgestossen. Da wir in der Berechnung von ρ diese Ablenkung vernachlässigt haben, konnte man vorhersehen, dass ρ zu gross herauskommen würde. Da aber die Unsicherheit der Messungen immerhin eine strenge Bestätigung der Theorie für diesen Fall ausschliesst, scheint uns eine angenähertere, und gewiss sehr komplizierte, Berechnung von ρ überflüssig zu sein, da wir bereits mit unseren vereinfachenden Annahmen die richtige Grössenordnung von ρ bekommen haben.

Die Erscheinungen der Stossionisation können in ganz ähnlicher Weise erklärt werden. Man weiss, dass bei allen Atomen, jenseits der Grenze der Hauptserie, ein kontinuierliches Spektrum sowohl in der Absorption wie in der Emission vorkommt, das dem Übergange des Leuchtelektrons vom Normalzustand zu einem Zustande entspricht, wo es vom Atom getrennt ist und dazu noch eine gewisse kinetische Energie besitzt. Dieses Spektrum besteht aus einer breiten Bande mit einer scharfen Kante nach Rot hin, an der Grenze der Hauptserie, und langsam nach den kurzen Wellenlängen abklingend. Ist nun die Geschwindigkeit des stossenden Elektrons so, dass die Frequenz $m\nu^2/2h$ jenseits dieser Absorptionsbande fällt, so können wir (9*) auch zur Berechnung des äquivalenten Radius des Atoms für die Ionisierung anwenden; fällt dagegen die Grenzfrequenz $m\nu^2/2h$ ins Innere der Absorptionsbande, so wird der Radius kleiner sein als nach (9*) und verschwinden, sobald $m\nu^2/2h$ gleich der Grenze der Hauptserie wird. Qualitativ ist ein solches Verhalten von ρ als Funktion von v durch die Erfahrung bestätigt⁽⁹⁾. Leider scheint es unmöglich, die Erscheinung quantitativ zu verfolgen, da man praktisch nichts über die Intensität des Absorptionsspektrums weiss.

(8) FÜCHTBAUER, « Phys. ZS. », 21, 322 (1920); FÜCHTBAUER und JOOS, ebenda S. 694.

(9) NETTLETON, « Proc. Nat. Acad. Amer. », 10, 140 (1924).

4. Günstiger liegen die Verhältnisse bei der Berechnung der von den α -Strahlen hervorgerufenen Ionisierung. In diesem Falle werden die sehr trägen α -Teilchen nur unbedeutend vom atomaren Felde abgelenkt. Die Ergebnisse über die Absorption in dem Gebiete der Röntgenstrahlen können weiter durch folgende Formel zusammengefasst werden ⁽¹⁰⁾:

$$(10) \quad \alpha(\nu) = \frac{KZ^4}{\nu^3} + D,$$

wo $\alpha(\nu)$ den atomaren Absorptionskoeffizienten darstellt; Z bedeutet die Atomnummer, D den von der Zerstreuung herrührenden Betrag der Absorption und K einen Koeffizienten, der an den Grenzen der Röntgenserien Unstetigkeiten aufweist: für Werte von ν grösser als die Grenze ν_0 , der K-Serie hat man $K = 0,6 \cdot 10^{30}$, und für $\nu < \nu_0$ $K = 0,1 \cdot 10^{30}$. Hieraus können wir entnehmen, dass der von der Ionisierung des K-Ringes herrührende Betrag der Absorption ist:

$$(11) \quad \alpha(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu < \nu_0, \\ \frac{HZ^4}{\nu^3} & \text{für } \nu > \nu_0. \end{cases}$$

Der Koeffizient H stellt natürlich die Unstetigkeit des Koeffizienten K beim Überschreiten der K-Grenze dar, man hat also

$$H = 0,5 \cdot 10^{30}.$$

Die Wahrscheinlichkeit $\Pi(b)$, dass das Vorüberfliegen eines α -Teilchens in der Entfernung b den K-Ring eines Atoms ionisiere, kann wieder durch (8) berechnet werden. Da nun die Masse des α -Teilchens sehr gross ist, können wir sie Grenzfrequenz $m\nu^2/2h$ durch ∞ ersetzen. Wir finden damit

$$(12) \quad \Pi(b) = 1 - e^{-\frac{8\pi c e^2 H Z^4}{h\nu^4} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} B\left(\frac{2\pi\nu b}{v}\right)}.$$

Den Radius können wir wieder nach der Formel berechnen:

$$\rho^2 = 2 \int_0^{\infty} b db \Pi(b).$$

Wir finden also

$$(13) \quad \rho^2 = 2 \int_0^{\infty} b db \left\{ 1 - e^{-\frac{8\pi c e^2 H Z^4}{h\nu^4} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} B\left(\frac{2\pi\nu b}{v}\right)} \right\} = \frac{v^2}{2\pi^2 \nu_0^2} \int_0^{\infty} \xi d\xi \left\{ 1 - e^{-\alpha \xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{x^2} B(x)} \right\}$$

wo zur Abkürzung gesetzt worden ist:

$$(14) \quad \alpha = \frac{8\pi c e^2 H Z^4}{h \nu_0 v^4}.$$

(10) Siehe z. B. H. A. KRAMERS, « Phil. Mag. », 46, 836 (1923).

Die Integrale in (13) können für $\alpha \ll 1$ näherungsweise berechnet ⁽¹¹⁾ werden und man findet

$$(13^*) \quad \rho^2 = \frac{v^2}{2\pi^2 v_0^2} \alpha \left(0,45 - \frac{1}{6} \log \alpha \right).$$

Wir wollen diese Formel zur Berechnung der Ionisierung des Heliums durch die α -Strahlen des RaC anwenden. Da das Helium nur den K-Elektronenring besitzt und dieser abgeschlossen ist, versuchen wir, ob wir noch (13*) anwenden und $H = 0,5 \cdot 10^{30}$ annehmen können. Entsprechend der Ionisierungsspannung von 24,5 Volt nehmen wir weiter $v_0 = 6,0 \cdot 10^{15}$; für die α -Strahlen des RaC haben wir $v = 1,98 \cdot 10^9$. Wir finden also $\alpha = 0,0091$. Damit erhalten wir:

$$\rho^2 = 0,56 \cdot 10^{-16} \quad , \quad \rho = 0,75 \cdot 10^{-8}.$$

Die Zahl der pro Zentimeterweg von dem Teilchen erzeugten Ionenpaare ist natürlich $\pi \rho^2 n$, wo $n = 2,6 \cdot 10^{19}$ die Zahl der Atome pro Kubikzentimeter bei 15° darstellt.

Diese Zahl ist daher = 4800.

Experimentell findet man 4600.

Die Übereinstimmung zwischen diesen beiden Zahlen wäre ausserordentlich befriedigend. Man kann ja sagen, dass sie etwas genauer ist als man erwarten würde. Tatsächlich würde die grosse Unsicherheit, hauptsächlich im Koeffizienten H, eine Divergenz um 30 Proz. und vielleicht noch etwas mehr leicht erklären. ⁽¹²⁾

(11) Man muss berechnen:

$$J = \int_0^\infty \xi d\xi \left\{ 1 - e^{-\alpha \xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{x^2} B(x)} \right\}.$$

Wenn $\alpha < 0,1$, kann man J in ein Integral von 0 bis 0,4 und ein anderes von 0,4 bis ∞ zerlegen. Das erste kann berechnet werden, indem man für $\xi < 0,4$ mit genügender Annäherung

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{x^2} B(x) = \frac{1}{3\xi^3} - 0,64$$

ansetzt und dann die asymptotischen Ausdrücke für den Integrallogarithmus anwendet. Das zweite Integral kann näherungsweise geschrieben werden:

$$\alpha \int_{0,4}^{\infty} \xi^2 d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{x^2} B(x).$$

Der Koeffizient von α , numerisch berechnet, ist 0,28. Wir finden dadurch:

$$J = \alpha \left(0,45 - \frac{1}{6} \log \alpha \right).$$

(12) Anm. b. d. Korr. Man muss auch bedenken, dass das theoretische und das experimentelle Ergebnis eigentlich nicht direkt miteinander vergleichbar sind, da bei dem ersten die sekundäre Ionisation nicht berücksichtigt wurde. Die letztere könnte auch viele Prozente der totalen Ionisation betragen. Jedenfalls konnte man aber bei der starken Extrapolation von H keine bessere Übereinstimmung erwarten.

5. Eine weitere experimentelle Bestätigung unserer Theorie kann man in der Theorie der Bremsung der α -Teilchen durch die Materie finden. Auch diese Anwendung machen wir für das Helium, da man für seine Absorption, wie gezeigt wurde, einen vernünftigen Ansatz machen kann.

Zuerst wollen wir den Energieverlust berechnen, den ein α -Teilchen beim Vorbeifliegen in der Entfernung b von einem Atom erfährt. Sei wieder $\Pi(b)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Vorbeigang des Teilchens in der Entfernung b die Ionisation verursacht, und $P(b, \nu) d\nu$ die Wahrscheinlichkeit der Ionisation, wenn nur die Frequenzen des Intervalls $d\nu$ anwesend wären. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ionisierung durch Absorption eines Quantums des Frequenzintervalls $d\nu$ geschehe, ist dann

$$\Pi(b) \frac{P(b, \nu) d\nu}{\int_0^{\infty} P(b, \nu) d\nu}.$$

Dieser Ionisierung entspricht der Energieverbrauch $h\nu$. Der mittlere Energieverlust des Teilchens ist daher

$$\Pi(b) \frac{\int_0^{\infty} P(b, \nu) h\nu d\nu}{\int_0^{\infty} P(b, \nu) d\nu}.$$

Wenn n die Zahl der Atome pro Volumeneinheit bedeutet fliegt das α -Teilchen während des Weges $d\nu$ in der Entfernung zwischen b und $b + db$ von $2\pi b db n$ Atomen vorbei. Wenn T seine kinetische Energie bedeutet, finden wir also:

$$(15) \quad \frac{dT}{dx} = -2\pi n \int_0^{\infty} b db \Pi(b) \frac{\int_0^{\infty} P(b, \nu) h\nu d\nu}{\int_0^{\infty} P(b, \nu) d\nu}.$$

Nun hat man

$$P(b, \nu) = \frac{\alpha(\nu) J(\nu)}{h\nu} = \begin{cases} \frac{8\pi c \varepsilon^2 H Z^4}{h\nu^4} \frac{1}{v^2} B\left(\frac{2\pi\nu b}{v}\right) & \text{für } \nu > \nu_0, \\ 0 & \text{für } \nu < \nu_0, \end{cases}$$

$$\Pi(b) = 1 - e^{-\int_0^{\infty} P(b, \nu) d\nu}.$$

Formel (15) wird jetzt leicht, mit Hinzunahme von (14),

$$(16) \quad \frac{dT}{dx} = - \frac{4 c \epsilon^2 HZ^4 n}{v_0^2 v^2} \int_0^\infty \xi d\xi \left\{ 1 - e^{-\alpha \xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{x^2} B(x)} \right\} \frac{\int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{x} B(x)}{\alpha \xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{x^2} B(x)}.$$

Ist α sehr klein, so kann man diesen Ausdruck näherungsweise berechnen⁽¹³⁾, und man findet

$$(17) \quad \frac{dT}{dx} = - \frac{c \epsilon^2 HZ^4 n}{v^2 v^2} \left(0,96 + \log \frac{\hbar v_0 v^4}{8 \pi c \epsilon^2 HZ^4} \right);$$

da nun $T = \frac{1}{2} m v^2$, finden wir endlich

$$(17^*) \quad \frac{dv}{dx} = - \frac{c \epsilon^2 HZ^4 n}{m v_0^2 v^3} \left(0,96 + \log \frac{\hbar v_0 v^4}{8 \pi c \epsilon^2 HZ^4} \right).$$

Hieraus können wir leicht eine Formel ableiten, die uns den von den α -Teilchen zurückgelegten Weg angibt, während ihre Geschwindigkeit vom Anfangswerte v_0 zum Endwerte v herabsinkt. Man findet nämlich:

$$(18) \quad x = \frac{m v_0^2}{c \epsilon^2 HZ^4 n} \int_v^{v_0} \frac{v^3 dv}{0,96 + \log \frac{\hbar v_0 v^4}{8 \pi c \epsilon^2 HZ^4}} = 2,4 \frac{m v_0}{n \hbar} \int_{\frac{0,104 \hbar v_0 v^4}{c \epsilon^2 HZ^4}}^{\frac{0,104 \hbar v_0 v_0^4}{c \epsilon^2 HZ^4}} \frac{du}{\log u}.$$

(13) Um dieses Integral zu berechnen, muss man für $\xi < 0,4$ die angenäherten Ausdrücke benutzen:

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{x^2} B(x) = \frac{1}{3 \xi^3} - 0,64, \quad \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{x} B(x) = \frac{1}{2 \xi^2} - 0,64.$$

Weiter muss man das Integral zerlegen in einen Teil von 0 bis 0,4, der leicht mit den asymptotischen Ausdrücken des Integrallogarithmus ausgedrückt werden kann. Um den zweiten Teil von 0,4 bis ∞ zu berechnen, braucht man nur zu bemerken, dass man für $\xi > 0,4$ und sehr kleines α setzen kann

$$1 - e^{-\alpha \xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{du}{u^2} B(u)} = \alpha \xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{du}{u^2} B(u).$$

Es genügt jetzt, numerisch zu berechnen:

$$\int_{0,4}^{\infty} \xi d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{x} B(x) = 0,35;$$

endlich finden wir, dass der Wert des gesuchten Integrals ist: $0,24 - \frac{1}{4} \log \alpha$ woraus man durch Anwendung von (15) sofort (17) bekommt.

Natürlich ist diese Formel nur gültig, wenn beide Grenzen des Integrals gross gegen eins sind, da sonst auch Formel (17*), aus der (18) abgeleitet worden ist, nicht mehr anwendbar ist, und man würde (16) auch für grosse Werte von α berechnen müssen. Trotzdem können wir mit (18) den von den α -Strahlen des RaC durch Helium zurückgelegten Weg berechnen, während ihre Geschwindigkeit auf die Hälfte des Anfangswertes herabsinkt. Setzen wir in (18)

$$m = 6,6 \cdot 10^{-24} \quad , \quad v_0 = 6,0 \cdot 10^{15} \quad , \quad n = 2,6 \cdot 10^{19} \quad ,$$

$\epsilon = 2 \cdot 4,77 \cdot 10^{-10} = 9,54 \cdot 10^{-10} \quad , \quad v_0 = 1,98 \cdot 10^9 \quad , \quad v = 0,99 \cdot 10^9$,
so finden wir

$$x = 0,56 \int_{18}^{288} \frac{du}{\log u} = 32 \quad .$$

Nun ist bekanntlich die Reichweite der α -Strahlen von der Geschwindigkeit $v_0/2$ gleich 1/8 der Reichweite⁽¹⁴⁾ der α -Strahlen von der Geschwindigkeit v_0 . Daher ist die Reichweite im Helium

$$32 + 5 = 37 \text{ cm.}$$

Experimentell findet man, in guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Werte, eine Reichweite von 33 cm.

(14) Anm. b. d. Korr. Auch die Berechnung der Bremsung nach Formel (16) für kleine Werte von v (α gross) ergibt, dass die Reichweite der α -Strahlen mit der Geschwindigkeit $\frac{v_0}{2} = 0,99 \cdot 10^9$ ungefähr 5 cm beträgt.

24.

SOPRA L'URTO TRA ATOMI
E NUCLEI DI IDROGENO

« Rend. Lincei », 1, 77-80 (1925) (*).

Recentemente J. Franck⁽¹⁾ ha discusso il processo della ionizzazione per urto tra atomi e ioni che abbiano velocità corrispondenti all'energia di pochi volt. Energeticamente un tale urto può condurre come risultato finale alla ionizzazione dell'atomo, quando l'energia del moto relativo dell'atomo e dello ione sia maggiore dell'energia che è necessaria per ionizzare l'atomo; conviene però tenere presente che le condizioni in cui si verifica questa ionizzazione sono profondamente diverse da quelle in cui avviene la ordinaria ionizzazione per urto elettronico. Siccome infatti la massa degli ioni e degli atomi è qualche migliaio di volte più grande di quella degli elettroni, si ha che, a parità di energia cinetica, la velocità dei primi sarà assai più piccola di quella dei secondi, così che mentre gli elettroni che hanno energia sufficiente per ionizzare un atomo debbono avere delle velocità dell'ordine di grandezza di quella degli elettroni di valenza dell'atomo, gli ioni, pur avendo energia sufficiente, avranno una velocità assai più piccola. Ora appare che nella letteratura il processo della ionizzazione per urto, anche nel caso degli ioni lenti, si sia sempre considerato come legato a qualche cosa di discontinuo; lo scopo di questo lavoro è invece di dimostrare, sopra l'esempio facilmente seguibile dell'urto tra atomi e nuclei di idrogeno, che si può avere un processo di ionizzazione per urto completamente continuo.

Noi considereremo precisamente questo caso: supponiamo che un atomo e un nucleo di idrogeno si vengano incontro con una velocità assai piccola in confronto a quella dell'elettrone dell'atomo, per modo che il moto dell'elettrone si possa considerare come alterato adiabaticamente dall'avvicinarsi del nucleo. Cominciamo con l'osservare che essendo il moto dell'elettrone regolato dal principio delle adiabatiche, esso dovrà ad ogni istante essere un moto quantistico per il sistema intermedio, che è costituito dall'elettrone attirato dai due nuclei che, con la nostra approssimazione si debbono, istante per istante, considerare come fermi. Tenendo poi presente che finché il nucleo è abbastanza lontano dall'atomo, quest'ultimo che si trova nel suo stato normale e quindi in un'orbita 1, si disporrà, come è noto dalla teoria dell'effetto Stark, con la sua orbita perpendicolare alla congiun-

(*) Presentata nella seduta del 4 gennaio 1925 dal Socio O. M. CORBINO.

(1) J. FRANCK, « Zs. f. Phys. », 25, 312, (1924).

gente i due nuclei, si riconosce che per qualunque posizione dei due nuclei, l'elettrone descriverà un cerchio posto in un piano perpendicolare alla retta congiungente i due nuclei, e col centro sopra questa retta; inoltre il momento della quantità di moto dell'elettrone attorno a questa retta sarà costantemente $\frac{h}{2\pi}$. Supponiamo che ad un certo istante i due nuclei si trovino alla distanza $2a$. Sia poi x la distanza dal punto medio della congiungente i due nuclei, del piano del cerchio descritto dall'elettrone, ed r il raggio del cerchio medesimo. Se v è la velocità dell'elettrone ed m la sua massa, avremo

$$\frac{h}{2\pi} = mvr.$$

La forza centrifuga sarà dunque:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{h^2}{4\pi^2 m r^3}.$$

Questa forza deve essere equilibrata dall'attrazione dei due nuclei; le componenti di questa attrazione parallele alla congiungente e ad r saranno dunque risp. 0 ed $\frac{h^2}{4\pi^2 m r^3}$. Esprimendo questo si trovano fra x ed r le due equazioni:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^2(a-x)}{\{(a-x)^2 + r^2\}^{3/2}} - \frac{e^2(a+x)}{\{(a+x)^2 + r^2\}^{3/2}} = 0 \\ \frac{e^2 r}{\{(a-x)^2 + r^2\}^{3/2}} + \frac{e^2 r}{\{(a+x)^2 + r^2\}^{3/2}} = \frac{h^2}{4\pi^2 m r^3} \end{array} \right.$$

dove e rappresenta la carica elettronica. Le radici di questo sistema di equazioni ci danno le posizioni che può avere il cerchio descritto dall'elettrone per ogni posizione dei due nuclei. Riconosciamo subito che le (I) ammettono una soluzione per la quale è $x = 0$, mentre r è una funzione di a che per $a = 0$ ha valore $\rho/2$, essendo $\rho = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 m} = 0,53 \cdot 10^{-8}$ cm il raggio dell'atomo normale di idrogeno, e al crescere di a va crescendo fino all'infinito. Per tale soluzione i due nuclei occupano posizioni simmetriche rispetto al piano del cerchio descritto dall'elettrone. Quando $a < 0,65\rho$ si trova che questa è l'unica soluzione reale delle (I) (poiché r è essenzialmente positivo). Quando invece sia $a > 0,65\rho$, cioè i nuclei siano distanti più di 1,30 volte il raggio dell'atomo di idrogeno, si trova che oltre alla soluzione precedente ce ne sono due altre, per le quali x assume valori eguali ed opposti, e r valori eguali. Le chiameremo soluzioni asimmetriche. Per a molto grande esse sono date da $x = \pm a$, $r = \rho$, e corrispondono dunque al caso che l'atomo sia nel suo stato normale e molto lontano dall'altro nucleo. Al decrescere di a , le due soluzioni asimmetriche si vanno avvicinando, e per $a = 0,65\rho$ vengono a coincidere tra di loro e anche con la soluzione simmetrica, dando luogo ad una radice tripla $x = 0$, $r = 0,92\rho$. Se a decresce ancora si ha, come si è detto, soltanto la soluzione simmetrica.

Possiamo dunque concludere, che finché i due nuclei sono ancora molto lontani e si vanno avvicinando, il cerchio descritto dall'elettrone corrisponde alla soluzione asimmetrica. Si trova che in queste condizioni il nucleo viene respinto dall'atomo. Proseguendo i due nuclei ad avvicinarsi, sempre respin-

gendosi, arriva un momento in cui a diventa $= 0,65 \rho$, ed allora il cerchio è quello che corrisponde alla soluzione tripla; diminuendo ancora a il cerchio diviene quello che corrisponde alla soluzione simmetrica che è l'unica esistente per $a < 0,65 \rho$. I due nuclei si respingono sempre e viene un momento in cui essi cominciano ad allontanarsi; a comincia a crescere ed il cerchio è sempre quello che corrisponde alla soluzione simmetrica fino ad $a = 0,65 \rho$, dove si ha la soluzione tripla. Al crescere ulteriore di a possono avvenire due casi: o il cerchio corrisponde ad una delle soluzioni asimmetriche, ed allora il risultato finale dell'urto è evidentemente un nucleo e un atomo di idrogeno; in questo caso non si ha dunque ionizzazione. Ma può avvenire anche che al crescere di a oltre $0,65 \rho$ l'elettrone continui a muoversi sopra l'orbita simmetrica. In questo caso i due nuclei continuano per un po' ad essere respinti (fino ad $a = 0,86 \rho$) e per distanze maggiori vengono attratti.

Se l'energia totale del sistema, nel moto relativo al centro di gravità è negativa, e cioè se l'atomo e lo ione hanno prima dell'urto una energia cinetica relativa più piccola del lavoro di ionizzazione $R\hbar$ dell'idrogeno (R numero di Rydberg) il prodotto finale dell'urto è un ione H^+ simmetrico metastabile, che poi si scinde ancora in un atomo e in un nucleo. Se invece l'energia dell'urto è maggiore di $R\hbar$ i due nuclei si allontanano fino all'infinito, e l'elettrone resta nel piano mediano descrivendo un cerchio di raggio sempre crescente con velocità tendente a zero.

Il risultato finale dell'urto è dunque due nuclei e un elettrone tutti separati. Si vede dunque che quando l'energia relativa dell'urto è maggiore dell'energia di ionizzazione si può avere la ionizzazione per mezzo di un processo continuo.

N° 25.

The author remarks that for a plane molecule, one of the principal moments of inertia equals the sum of the other two. This relation must apply to all triatomic molecules, and should appear as a relation between the rotational constants of different band systems. A good verification is afforded by the infra-red absorption bands of water vapor. This paper was written in Florence.

F. RASETTI.

25.

UNA RELAZIONE TRA LE COSTANTI DELLE BANDE INFRAROSSE DELLE MOLECOLE TRIATOMICHE

« Rend. Lincei », 1, 386-387 (1925) (*).

Le bande infrarosse, che come è noto sono dovute a salti delle molecole tra stati quantici che corrispondono alla stessa configurazione degli elettroni, e che differiscono tra di loro solamente per il diverso stato di rotazione e di oscillazione dei nuclei, ci permettono in modo assai semplice di misurare il momento d'inerzia della molecola nel suo stato normale. La teoria di queste bande ⁽¹⁾ conduce infatti alla formula

$$(1) \quad \Delta\nu = \frac{h}{4\pi^2 I}$$

dove h è la costante di Planck, I il momento di inerzia della molecola e $\Delta\nu$ la differenza costante di frequenza tra le righe della banda infrarossa.

Se la molecola è biatomica, essa ha un solo momento di inerzia, e corrispondentemente un solo sistema di bande infrarosse; se invece essa è pluriatomica essa ha tre momenti di inerzia principali, e quindi anche tre sistemi di bande infrarosse, che corrispondono a tre diversi $\Delta\nu$. I tre valori di $\Delta\nu$ ci permettono di determinare i tre momenti di inerzia principali della molecola.

Se ora si ha un sistema di punti situati in un piano, si riconosce immediatamente che gli assi principali di inerzia sono uno perpendicolare al piano, e gli altri due contenuti in esso, e che il momento di inerzia relativo all'asse principale perpendicolare al piano è uguale alla somma degli altri due mo-

(*) Presentata dal Socio A. Garbasso nella seduta del 15 marzo 1925.

(1) SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien*, ed. 3; Cap. 7.

menti principali di inerzia ⁽²⁾. Nel caso di una molecola triatomica i tre atomi giacciono certamente tutti nello stesso piano, e quindi tra i tre momenti di inerzia principali deve passare la relazione $I_1 = I_2 + I_3$. Siccome poi per la (1) si ha che i tre momenti principali di inerzia sono inversamente proporzionali ai $\Delta\nu$ dei tre sistemi di bande infrarosse, troviamo che tra questi deve passare la relazione

$$(2) \quad \frac{I}{\Delta\nu_1} = \frac{I}{\Delta\nu_2} + \frac{I}{\Delta\nu_3}.$$

Questa relazione, sulla quale non mi risulta che sia mai stata richiamata l'attenzione, può servire sia come conferma della teoria delle bande infrarosse, sia ancora come prova dell'ordinamento attribuito a un sistema di bande infrarosse di una sostanza triatomica.

Disgraziatamente il materiale empirico per la verifica della (2) è assai scarso, essendo completamente noto un solo sistema di bande infrarosse di una sostanza triatomica, e precisamente quello del vapore di acqua.

Holjer Witt ⁽³⁾ è infatti recentemente riuscito a riconoscere nello spettro d'assorbimento infrarosso del vapore acqueo tre sistemi di bande, con le differenze di frequenza (in numeri d'onda) 16,8 ; 24,5 ; 56.

Ora si ha

$$\frac{I}{17,0} = \frac{I}{24,5} + \frac{I}{56}.$$

Si vede dunque che la (2) è bene verificata entro i limiti dell'errore sperimentale.

(2) Basta perciò prendere come assi delle x e delle y i due assi principali che sono situati nel piano, e come asse delle z il terzo asse principale. Allora i tre momenti di inerzia sono risp. $\Sigma m(x^2 + y^2)$, Σmx^2 , Σmy^2 . Da qui risulta subito la proprietà accennata.

(3) H. WITT, « Zs. f. Phys. », 28, 249 (1924).

N^o 26, 27, 28 (1) and 28 (2).

These papers are important for several reasons: they describe Fermi's second venture in the experimental field after several years of theoretical work; they show his ingenuity in dealing with unfamiliar techniques; and constitute the first instance of an investigation of atomic spectra by means of radiofrequency fields, a technique that was to receive numerous applications many years later.

Wood and Ellett, and Hanle, had announced their remarkable discovery of the effects of weak magnetic fields on the polarization of the resonance radiation of mercury. Rasetti had observed these effects in Florence. When Fermi came to that university a few months later, he was greatly interested in the phenomenon, whose only theory at the time was a classical one based on the concept of Larmor precession. Fermi pointed out that since the mercury resonance line showed an anomalous Zeeman effect with a Landé factor of $3/2$, the mercury atom should more likely precess with a frequency $3/2$ times higher than the Larmor frequency. The choice between the two alternatives might be decided by investigating the behavior of the polarization under magnetic fields of the intensity of about one gauss and frequency of a few megacycles per second, in approximate resonance with the precession frequency of the atom.

Rasetti had experience with the spectroscopic technique, but neither of the experimenters had any with radiofrequency circuits. However, Fermi calculated the characteristics of a simple oscillator circuit which should produce fields of the proper strengths and frequencies. Fortunately some triodes were discovered in an instrument cabinet and pronounced by Fermi apt to operate the projected circuit. The laboratory also possessed several hot wire ammeters to measure the current in the coils, in order that the magnetic field strength could be determined. Had these instruments not been available, the experiment could not have been performed, since the research budget of the laboratory was exceedingly meager and did not allow the purchase of costly equipment. Another consequence of this financial situation was the fact that the building was never heated, since it was easy to calculate that one month's heating would have absorbed the entire annual budget of the Physics Department. The temperature in the building from December to March ranged from 3° to 6° C. Unfortunately in the spring when the experiments were performed the room temperature had risen to 12° C, more comfortable for the inhabitants, but somewhat too high to ensure a sufficiently low density of the saturated mercury vapor.

Inductance coils and other simple parts were built by the experimenters, and when the circuit was assembled, it instantly worked as Fermi had predicted. The experiments were readily performed; unfortunately the accuracy was poor, due to the high temperature and the photographic method employed for measuring the polarization. Still the results clearly showed that the precession frequency of the atom agreed with the prediction based on the Landé factor.

A full account of the theory and experimental results is given in (28), while (27) is a condensed German version where the calculations have been omitted, and (26) is a brief preliminary announcement.

The interest of this experiment from the quantum-mechanical standpoint was emphasized by Jordan ⁽¹⁾.

F. RASETTI

(1) P. JORDAN, *Anschauliche Quantentheorie*, Springer, Berlin 1936, pp. 45-46.

26.

EFFECT OF AN ALTERNATING MAGNETIC
FIELD ON THE POLARISATION OF THE
RESONANCE RADIATION OF MERCURY VAPOUR

E. FERMI and F. RASETTI

« Nature » (London), 115, 764 (1925).

Recently, A. Ellett (« Nature », December 27, 1924, p. 931) and W. Hanle (« Zs. f. Phys. », 30, 93, 1924) observed the depolarising effect of a weak magnetic field on resonance radiation. When the intensity of the field was sufficiently small they found, not only partial depolarisation, but also a rotation of the plane of polarisation. This is accounted for, on the classical point of view, by the superposed effect of the Larmor rotation and of the damped vibrations of the oscillator.

The same classical views suggest that the depolarising action of a high frequency alternating magnetic field of constant amplitude will vanish with increasing frequency. The effect should be well observable with fields of 2 or 3 gauss, and frequencies between 10^6 and 10^7 .

We have performed the experiment, and have detected the presence of the expected phenomenon. A strong increase of the polarisation was actually observed in passing from a frequency of 1.5×10^6 to one of 5×10^6 , though the amplitude of the field remained constant.

We are carrying out further experiments in order to determine the quantitative features of the effect.

Istituto Fisico dell'Università, Firenze, Italy, April 3.

N° 28 (1) and 28 (2).

For the introduction to these papers see N° 26.

28 (1).

EFFETTO DI UN CAMPO MAGNETICO ALTERNATO SOPRA LA POLARIZZAZIONE DELLA LUCE DI RISONANZA(*)

E. FERMI e F. RASETTI

« Rend. Lincei », 1, 716-722 (1925 (**)).

Ci siamo proposti in questo lavoro di studiare l'effetto di un campo magnetico alternato ad alta frequenza sopra la polarizzazione della luce di risonanza; nella presente Nota tratteremo della teoria del fenomeno, in una successiva renderemo invece conto di alcune esperienze che ci hanno permesso di confermare i risultati previsti.

È noto che se si illumina un vapore, p. e. quello di mercurio, con la luce di una sua riga di assorbimento, si ha una intensissima diffusione selettiva; ed in questo consiste il fenomeno della risonanza ottica. Per renderci conto di questo fatto, possiamo pensare ad un modello classico, che in questo caso rende abbastanza bene conto delle circostanze del fenomeno. Supponiamo dunque che il nostro vapore contenga degli elettroni legati elasticamente, capaci di vibrare con frequenza eguale a quella della luce illuminante. Sotto l'azione del campo elettrico alternato della luce, gli elettroni si metteranno in risonanza e diffonderanno perciò molto fortemente la luce primaria. Se ora supponiamo che questa sia polarizzata, gli elettroni oscilleranno in direzione parallela a quella del suo vettore elettrico. Se osserviamo la luce diffusa in una direzione perpendicolare a quest'ultima, la troveremo dunque polarizzata, col suo vettore elettrico parallelo a quello della luce primaria. E ciò si osserva effettivamente nel caso del mercurio, illuminandolo con la riga 2536.7, almeno quando la densità del vapore sia sufficientemente piccola, poiché altrimenti si hanno delle perturbazioni di carattere secondario. È bene osservare a questo proposito che non per tutti gli elementi le cose tornano così bene come per il mercurio; precisamente le cose vanno secondo le previsioni della teoria classica solo nel caso che la riga di risonanza abbia un effetto Zeeman normale, o per lo meno si

(*) Vedi la nota preliminare in « Nature », 16 maggio 1925.

(**) Presentata dal Socio A. Garbasso nella seduta del 5 giugno 1925.

scinda in un tripletto, se anche di separazione differente da quella di Lorentz. Nel caso invece di effetti Zeeman anomali, come per esempio per le righe D del sodio, la polarizzazione presenta delle particolarità alquanto più complicate.

Esaminiamo ora quale effetto debba produrre sopra la polarizzazione della luce di risonanza, l'essere il vapore risonante immerso in un campo magnetico, abbastanza debole però perché la separazione Zeeman da esso prodotta non sia più grande della larghezza della riga con cui si illumina. Consideriamo per esempio il caso, che è quello che ci interesserà in seguito, che il campo magnetico sia perpendicolare al raggio incidente e al suo vettore elettrico, e che la radiazione di risonanza si osservi nella direzione del campo. Per fissare le idee, supporremo che il raggio primario e il campo magnetico siano orizzontali e ad angolo retto tra di loro, e che il vettore elettrico sia verticale. Il campo magnetico produrrà una scissione della riga di assorbimento in un tripletto Zeeman; ora osserviamo che se il vapore invece di assorbire, emettesse, nella direzione da cui viene la luce primaria si osserverebbero le componenti circolari come luce polarizzata rettilineamente col vettore elettrico verticale, mentre la componente rettilinea darebbe luogo a luce polarizzata col vettore elettrico orizzontale. Se dunque, come nel nostro caso, si illumina il vapore con luce con il vettore elettrico verticale, saranno assorbite solo le componenti circolari; le quali daranno luogo per diffusione, osservate nella direzione del campo, a due componenti circolari in senso opposto, le cui frequenze saranno praticamente indistinguibili, per modo che si osserverà una radiazione di risonanza non polarizzata. L'effetto del campo magnetico è dunque in questo caso di distruggere la polarizzazione della luce di risonanza; questo fenomeno fu in realtà scoperto da Wood e Ellett⁽¹⁾.

Recentemente W. Hanle⁽²⁾ e A. Ellett⁽³⁾ hanno fatto, l'uno sopra il mercurio e l'altro sopra il sodio, delle interessantissime osservazioni sopra l'effetto di un campo magnetico estremamente debole. Essi hanno osservato che in questo caso non soltanto la depolarizzazione prodotta dal campo non è completa, ma si ha anche una rotazione del piano di polarizzazione della luce diffusa, nel senso della rotazione di Larmor. Per il mercurio questi fenomeni si hanno per campi dell'ordine di grandezza di un Gauss.

Col modello precedentemente usato ci possiamo facilmente rendere conto della ragione di questo fatto. Consideriamo un oscillatore che abbia ricevuto un impulso in direzione verticale, e oscilli liberamente nel campo magnetico orizzontale. Se l'oscillatore non fosse smorzato, sotto l'azione del campo magnetico la sua linea d'oscillazione si metterebbe a rotare, restando costante l'ampiezza dell'oscillatore; per modo che un osservatore longitudinale al campo vedrebbe luce non polarizzata. Le cose vanno invece in modo diverso se l'oscillatore è smorzato, e la rotazione di Larmor è tanto lenta, che in una piccola frazione di giro l'ampiezza si smorzi già

(1) R. W. WOOD e A. ELLETT, « Proc. Roy. Soc. », 103, 396 (1923).

(2) W. HANLE, « Zs. f. Phys. », 30, 93 (1924).

(3) A. ELLETT, « Journ. Opt. Soc. Amer. », 10, 427 (1925).

notevolmente; si capisce che in questo caso la depolarizzazione deve essere soltanto parziale e la linea d'oscillazione risultare in media rotata rispetto alla direzione del campo elettrico eccitante, ciò che dà luogo appunto alla rotazione del piano di polarizzazione della luce diffusa.

Passiamo ora a esaminare il caso, oggetto del nostro studio, che l'atomo risonante si trovi in un campo magnetico, non più costante ma alternato. Se l'oscillatore riceve un impulso dalla forza elettrica eccitante, la sua linea d'oscillazione si metterà dapprima a rotare, per la precessione di Larmor, nel senso corrispondente a quello del campo magnetico al dato istante; quando poi il campo si inverte, essa comincia a rotare in senso opposto, e così di seguito. Se la frequenza del campo alternato è molto grande in confronto alla frequenza di Larmor, accadrà che la direzione dell'oscillatore andrà avanti e indietro scostandosi sempre di poco da quella iniziale. Dobbiamo dunque attenderci che per frequenze grandissime, l'effetto depolarizzante del campo, pur restando costante l'intensità media di quest'ultimo, debba diventare piccolissimo.

Da quanto precede risulta evidente che le variazioni del grado di polarizzazione in funzione della frequenza saranno particolarmente notevoli per frequenze del campo alternato dell'ordine di grandezza di quella di Larmor. Occorre naturalmente anche, per osservare le variazioni della polarizzazione, che il campo sia abbastanza intenso per produrre, a bassa frequenza, una depolarizzazione considerevole. Per questo è necessario che il periodo della rotazione di Larmor sia al massimo dell'ordine di grandezza del tempo medio di smorzamento, il quale, per la riga 2536.7 del mercurio risulta da varie considerazioni⁽⁴⁾ eguale a circa 10^{-7} secondi (il tempo di smorzamento dell'ampiezza sarà dunque doppio, cioè $2 \cdot 10^{-7}$ secondi).

Dovremo dunque operare con campi di intensità di qualche Gauss (poiché la frequenza di Larmor che corrisponde al campo di un Gauss è $1,4 \cdot 10^6$), e di frequenza dell'ordine di cinque milioni.

Proponiamoci dunque di studiare il comportamento di un oscillatore risonante situato in un campo magnetico alternato. Supponiamo che il vettore elettrico E della luce eccitante abbia la direzione dell'asse delle x , e il campo magnetico quella dell'asse delle z . Il movimento dell'oscillatore avverrà allora nel piano xy .

Ora osserviamo che nel caso pratico della realizzazione delle esperienze di risonanza, la luce eccitante è sempre relativamente espansa, per modo che la sua larghezza $\Delta\nu$, misurata in frequenza, è di un ordine di grandezza alquanto superiore alla larghezza che avrebbe la riga se fosse espansa per l'unica ragione dello smorzamento dei treni d'onda. Avremo quindi $\Delta\nu$ molto maggiore di σ , indicandosi con σ il coefficiente di smorzamento dell'ampiezza del nostro oscillatore. Siccome nel caso nostro σ , la frequenza di Larmor n_L , e la frequenza n del campo magnetico sono dello stesso ordine di grandezza, avremo che $\Delta\nu$ sarà di ordine di grandezza maggiore di tutte queste quantità. Ora è noto che una riga spettrale di larghezza $\Delta\nu$

(4) L. A. TURNER, « Phys. Rev. », 23, 464 (1924); R. C. TOLMAN, « Phys. Rev. », 23, 693 (1924); W. HANLE, loc. cit.

è equivalente a un insieme di treni d'onda rigorosamente monocromatici, limitati, e contenenti ciascuno un numero di onde dell'ordine di grandezza di $v/\Delta v$. Avremo dunque che la nostra luce eccitante sarà equivalente a un insieme di treni d'onda incoerenti, ciascuno di durata $1/\Delta v$, assai breve in confronto al periodo di smorzamento dell'oscillatore $1/\sigma$, e, per le nostre ipotesi, anche a $1/n_L$ e a $1/n$. Siccome le equazioni del movimento dell'oscillatore sono lineari, avremo che ciascuno di questi treni d'onda produrrà il suo effetto indipendentemente dall'azione degli altri. Ora l'azione di un solo treno d'onda consiste in un impulso di durata assai breve, per modo che durante essa sarà trascurabile l'effetto dello smorzamento e della rotazione di Larmor. Ricevuto questo impulso nella direzione del campo elettrico eccitante, l'oscillatore continuerà a muoversi sotto l'azione soltanto della sua forza elastica e della forza esercitata dal campo magnetico esterno. La radiazione da esso diffusa sarà dunque quella emessa da un oscillatore al quale è stato dato un impulso parallelamente all'asse x , e che poi ha continuato a muoversi sotto l'azione delle forze indicate. Se non vi fosse né campo magnetico né smorzamento, l'oscillatore, ricevuto l'impulso iniziale, seguirebbe a muoversi lungo l'asse delle x con ampiezza eguale a quella iniziale A_0 ; l'effetto dello smorzamento è di ridurre l'ampiezza dell'oscillazione, così che al tempo t essa sarà $A = A_0 e^{-\sigma t}$; l'effetto del campo magnetico $H = H_0 \cos(2\pi nt - \alpha)$ sarà di fare rotare la linea d'oscillazione con velocità angolare

$$\omega = \frac{eH}{2mc} = \frac{eH_0}{2mc} \cos(2\pi nt - \alpha)$$

e quindi al tempo t l'angolo di cui avrà rotato l'asse di oscillazione sarà

$$\Omega = \int_0^t \omega dt = \frac{eH_0}{4\pi mcn} \{ \sin(2\pi nt - \alpha) + \sin \alpha \} = \frac{2n_0}{n} \sin \pi nt \cos(\pi nt - \alpha)$$

dove con $n_0 = \frac{eH_0}{4\pi mc}$, si è indicata la frequenza di Larmor corrispondente al valor massimo H_0 del campo magnetico. Avremo dunque che al tempo t le componenti dell'ampiezze parallele all'asse x e all'asse y saranno

$$(1) \quad A_x = A_0 e^{-\sigma t} \cos \Omega \quad ; \quad A_y = A_0 e^{-\sigma t} \sin \Omega.$$

Le componenti X e Y dell'intensità diffusa al tempo t in direzione z , polarizzate col vettore elettrico parallelo risp. all'asse delle x e a quello delle y , saranno proporzionali ai quadrati delle ampiezze corrispondenti, si avrà cioè, a meno di un fattore costante

$$(2) \quad X = e^{-2\sigma t} \cos^2 \Omega \quad ; \quad Y = e^{-2\sigma t} \sin^2 \Omega.$$

Siccome per quanto si è osservato, i vari impulsi che equivalgono all'azione della luce eccitante sono tra di loro incoerenti, l'intensità si otterrà sommando le intensità dovute all'azione dei singoli impulsi. Le intensità diffuse I_x e I_y sono dunque proporzionali alle espressioni che si ottengono integrando le (2) rispetto al tempo e a tutti i valori della fase α . Si avrà dunque a meno

di un fattore

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} X dt d\alpha = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} \cos^2 \left[\frac{2n_0}{n} \sin \pi nt \cos (\pi nt - \alpha) \right] dt d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} \cos^2 \left[\frac{2n_0}{n} \sin \pi nt \cos \varphi \right] dt d\varphi \\ I_y &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} Y dt d\alpha = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} \sin^2 \left[\frac{2n_0}{n} \sin \pi nt \cos \varphi \right] dt d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Per valutare queste espressioni osserviamo che si ha

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} I_x + I_y &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} dt d\varphi = \frac{\pi}{\sigma} \\ I_x - I_y &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} \cos \left[\frac{4n_0}{n} \sin \pi nt \cos \varphi \right] dt d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Indicando con $J_0(x)$ la funzione di Bessel di ordine zero, e tenendo presente la nota formula

$$2\pi J_0(a) = \int_0^{2\pi} \cos(a \cos \varphi) d\varphi$$

troviamo

$$I_x - I_y = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} J_0\left(\frac{4n_0}{n} \sin \pi nt\right) dt.$$

Prendendo per nuova variabile $x = \pi nt$ abbiamo dunque

$$(5) \quad I_x - I_y = \frac{2}{n} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\sigma}{\pi n} x} J_0\left(\frac{4n_0}{n} \sin x\right) dx.$$

Prima di tutto cerchiamo una espressione di questa differenza per n molto piccolo. Tenendo presente la nota formula

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx$$

si trova che per n molto piccolo si può scrivere

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow 0} (I_x - I_y) = \frac{\pi}{\sigma \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 n_0^2}{\sigma^2}}}.$$

Questa formula ci permette di trovare il grado di polarizzazione per frequenze molto piccole. Esso risulta dato da

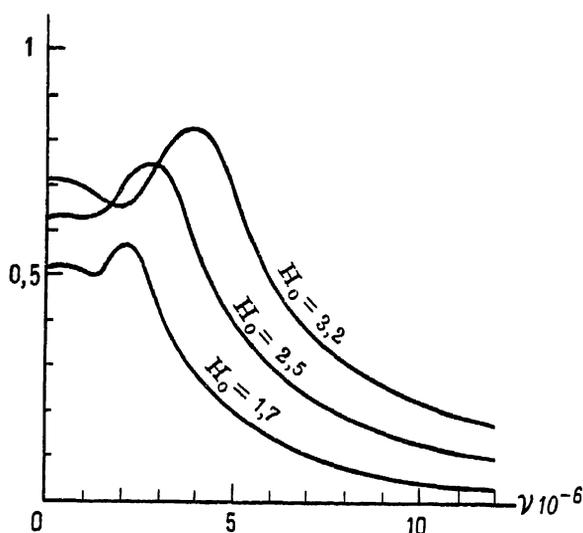
$$\lim \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 n_0^2}{\sigma^2}}}.$$

Come si vede da questa espressione, si trova che nel caso di frequenze molto piccole il grado di polarizzazione risulta eguale a zero quando n_0 e quindi anche H_0 , è molto grande; in questo caso si ha dunque una depolarizzazione completa, mentre per n_0 eguale a zero, e quindi $H_0 = 0$, si trova il grado di polarizzazione eguale ad uno, cioè polarizzazione completa.

Tornando alla espressione generale (5) ci conviene trasformarla leggermente per renderla adatta al calcolo numerico. Osservando perciò che la funzione $J_0\left(\frac{4n_0}{n}\sin x\right)$ è periodica a periodo π , si vede facilmente che la (5) si può trasformare in

$$(7) \quad I_x - I_y = \frac{2}{n} \frac{e^{2\sigma/n}}{e^{2\sigma/n} - 1} \int_0^{\pi} e^{-\frac{2\sigma}{\pi n} x} J_0\left(\frac{4n_0}{n}\sin x\right) dx.$$

In base a quest'ultima espressione abbiamo calcolato numericamente il grado di polarizzazione, ponendo $\sigma = 5 \cdot 10^6$, per campi di 1,7; 2,5; 3,2 Gauss. Il risultato di questo calcolo è rappresentato dalle curve della figura, dove in ascisse sono riportati i valori della frequenza, in milioni al secondo, e in ordinate, il rapporto I_y/I_x .



Come si rileva dalle curve, in tutti i casi si hanno per basse frequenze valori oscillanti della polarizzazione, per frequenze maggiori si ha poi un aumento della polarizzazione, che diventa completa per frequenze grandissime.

L'aumento della polarizzazione incomincia tanto più presto, quanto più è piccolo il campo.

28 (2).

ANCORA DELL'EFFETTO DI UN CAMPO MAGNETICO ALTERNATO SOPRA LA POLARIZZAZIONE DELLA LUCE DI RISONANZA (*)

E. FERMI e F. RASETTI

« Rend. Lincei », 2, 117-120 (1925) (**).

In una Nota precedente ⁽¹⁾ abbiamo calcolato come varia l'effetto di un campo magnetico alternato sulla polarizzazione della luce di risonanza, in funzione della frequenza. Abbiamo eseguite delle esperienze allo scopo di verificare le previsioni teoriche, sopra la risonanza del mercurio per la riga 2536.7.

Il dispositivo da noi usato per questo scopo constava di una parte ottica, per la produzione della risonanza, e di una parte elettrica destinata a generare il campo magnetico alternato.

La luce eccitante era ottenuta per mezzo di una lampada a mercurio, raffreddata mediante immersione in acqua. La riga 2536.7 veniva isolata mediante un monocromatore a quarzo; sul cammino dei raggi si trovava un grosso cristallo birifrangente di spato d'Islanda, che separava la luce in due fasci polarizzati ad angolo retto. Di questi, quello col vettore elettrico verticale veniva introdotto nella lampada di risonanza, che era costituita da un recipiente di vetro munito di due finestre, chiuse con lastre piane di quarzo, e situate ad angolo retto tra di loro. Di esse una serviva per l'entrata dei raggi eccitanti, e l'altra per l'osservazione della luce di risonanza; le lastre di quarzo erano tagliate parallelamente all'asse ottico e disposte in modo da non alterare la polarizzazione della luce. La lampada di risonanza conteneva una goccia di mercurio, ed era unita ad una pompa di Gaede, che funzionava continuamente durante le esperienze. La luce di risonanza veniva osservata in direzione perpendicolare a quella della luce eccitatrice; mediante un altro spato, interposto sul cammino di osservazione, si formavano due immagini del vapore risonante, polarizzate una orizzontalmente e l'altra verticalmente, che venivano fotografate con una camera a quarzo.

L'apparecchio per la produzione del campo oscillante constava essenzialmente di un circuito a triodi generatore di oscillazioni persistenti, e di

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Firenze.

(**) Presentata dal Socio A. Garbasso nell'adunanza del 5 giugno 1925.

(1) Questi « Rendiconti », vol. I (1925), p. 716, n. 12.

un altro circuito ad esso accoppiato del quale facevano parte due bobine, situate ai lati della lampada di risonanza, per la produzione del campo magnetico alternato.

Abbiamo usato dei triodi della « Western Electric Company », col filamento ricoperto di ossidi; la tensione di placca era di circa 300 volt ed era fornita da una dinamo, la corrente di placca per ogni triodo era di 40 o 50 milliamperè. Abitualmente usavamo due di questi triodi in parallelo.

Il circuito generatore era costituito unendo il negativo del filamento col punto di mezzo di una bobina L, i cui estremi erano uniti attraverso ad un condensatore variabile C_1 . Una delle armature del condensatore era congiunta direttamente alla griglia, e l'altra era unita alla placca attraverso alla dinamo. Il circuito destinato alla produzione del campo magnetico alternato conteneva in serie: una spira avvicinata alla bobina L, che funzionava da secondario di trasformatore, un condensatore variabile C_2 , un amperometro a filo caldo, privo di shunt, due bobine di dieci spire ciascuna per la produzione del campo magnetico, e una bobina che si poteva inserire o chiudere in corto circuito, per mezzo della quale era possibile accordarsi in un campo di frequenze sufficientemente esteso.

Le capacità C_1 e C_2 potevano variare all'incirca da 50 a 500 millesimi di microfarad. La bobina L poteva secondo i casi avere una induttanza di 12 o 40 microhenry. Data la considerevole capacità tra la placca e la griglia degli audion, non era possibile spingersi comodamente a una frequenza superiore a $5 \cdot 10^6$. Nelle esperienze abbiamo usato delle frequenze variabili tra uno e cinque milioni.

L'ondometro che ci ha servito per la misura delle frequenze, ci è stato gentilmente tarato dal dott. Mazza dell'Istituto di Chimica inorganica dell'Università di Firenze.

Le considerazioni teoriche svolte nella Nota precedente, ci facevano ritenere opportuno di studiare l'effetto con campi magnetici di qualche Gauss. Per produrli, con le nostre bobine, erano necessarie correnti dell'ordine di grandezza di mezzo ampère, che si potevano produrre assai bene col nostro apparecchio.

Il campo magnetico terrestre era neutralizzato mediante una grossa bobina opportunamente disposta.

Alla temperatura dell'ambiente, circa 12°, la polarizzazione della luce di risonanza si dimostrò scarsa, anche in assenza di qualunque campo magnetico. Per questo ritenemmo utile di raffreddare la lampada di risonanza. Un sistema di raffreddamento a evaporazione di etere diede dei risultati discreti, in quanto riuscì a fare aumentare fortemente la polarizzazione in assenza di campo magnetico, senza però riuscire a mantenerla costante da una esperienza all'altra; fatto che ci rese impossibile di spingere la precisione delle misure, fino a poter studiare alcuni dei dettagli previsti dalla teoria.

Osserviamo ancora che siccome la riga 2536.7 del mercurio presenta un effetto Zeeman anomalo, in quanto essa si spezza in un tripletto con una separazione eguale a tre mezzi di quella normale, la precessione prodotta da un campo magnetico si deve calcolare eguale a $3/2$ di quella di Larmor. Quindi le curve disegnate nella Nota precedente e indicate come corrispon-

denti a campi di 1,7; 2,5; 3,2 Gauss, si avranno in realtà, per il mercurio, per campi di intensità $2/3$ di queste. Queste tre intensità, che corrispondevano a intensità efficaci di corrente nelle bobine di 0.32, 0.46, 0.6 amp., sono quelle con le quali abbiamo eseguite le esperienze. Su ciascuna lastra vennero fatte sei fotografie, con pose, eguali per ciascuna lastra, di due o tre minuti; ciascuna era costituita da due immagini della luce di risonanza polarizzate ad angolo retto. La prima fotografia era fatta senza campo magnetico, le altre cinque con campi di intensità massima costante e con frequenze di 1, 2, 3, 4, 5 milioni. Abbiamo fatto tre lastre con campi prodotti da correnti di 0.32 e di 0.46 amp., e due con campi corrispondenti a 0.6 amp.

Già l'osservazione ad occhio delle lastre mostrava nettamente, per correnti 0.32 e 0.46 amp., l'aumento della polarizzazione per grandi frequenze; ma per ottenere dati più precisi abbiamo fotometrato le nostre lastre, con un fotometro a pila termoelettrica. Riportiamo qui i risultati delle fotometrie.

I numeri rappresentano i rapporti degli annerimenti della componente polarizzata con il vettore elettrico orizzontale, e di quella col vettore elettrico verticale; le frequenze sono date in milioni.

Osserviamo a questo proposito che nelle nostre fotografie non si aveva proporzionalità tra annerimento e intensità, come sarebbe voluto dalla legge di Schwarzschild, e quindi i rapporti danno solamente una indicazione qualitativa del grado di polarizzazione. Per la stessa ragione non sono confrontabili tra di loro altro che i dati della stessa lastra, perché tra lastra e lastra si hanno delle differenze di intensità di illuminazione e di posa.

| Numero della lastra | Amp. | Frequenze | | | | |
|---------------------|------|-----------|------|------|------|------|
| | | 1,2' | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 0,32 | 0,71 | 0,69 | 0,64 | 0,59 | 0,53 |
| 7 | — | — | 0,75 | 0,72 | 0,67 | 0,51 |
| 8 | — | 0,58 | 0,59 | 0,52 | 0,39 | 0,36 |
| 5 | 0,46 | 0,76 | 0,74 | 0,77 | 0,68 | 0,57 |
| 9 | — | 0,72 | 0,71 | 0,78 | 0,65 | 0,53 |
| 10 | — | 0,74 | 0,75 | 0,74 | 0,67 | — |
| 11 | 0,60 | 0,84 | 0,85 | 0,92 | 0,85 | 0,79 |
| 12 | — | 0,76 | 0,73 | 0,80 | 0,79 | 0,76 |

Come si può rilevare da questa tabella, la precisione non è sufficiente per la verifica dettagliata delle particolarità delle curve disegnate nella Nota precedente. Quello che invece si può concludere con sicurezza, è che nelle lastre corrispondenti a 0.32 amp. la polarizzazione cresce con la fre-

quenza, in modo più rapido per frequenze elevate; in quelle fatte con correnti di 0.46 amp., la polarizzazione si mantiene press'a poco costante fino a frequenze di circa tre milioni, e per frequenze superiori comincia a crescere, benché meno che nel caso precedente; infine, per le fotografie fatte con correnti di 0.6 amp., le oscillazioni della polarizzazione restano entro i limiti dell'errore di osservazione.

Confrontando questi risultati con le curve ottenute teoricamente nella Nota precedente, si vede che le previsioni sono confermate, almeno entro i limiti della nostra approssimazione.

N° 29.

For the introduction to this paper see N° 22.

29.

SOPRA LA TEORIA DEI CORPI SOLIDI

« Periodico di Matematiche », 5, 264-274 (1925).

Il carattere che distingue, dal punto di vista cinetico, un corpo solido da un fluido, consiste essenzialmente nel fatto, che mentre gli atomi di quest'ultimo nel loro moto termico possono allontanarsi assai considerevolmente dalla posizione da essi inizialmente occupata, quelli del primo oscillano invece continuamente attorno a una posizione di equilibrio. La ragione di questo diverso comportamento si deve naturalmente ricercare nel differente rapporto che esiste nei due casi tra l'energia cinetica del moto termico degli atomi, e l'energia delle forze che tendono a mantenerli nelle loro posizioni di equilibrio.

I problemi fondamentali della teoria cinetica dei corpi solidi si possono ridurre sostanzialmente a due. Il primo si propone la determinazione del moto termico degli atomi, ammettendo provvisoriamente che le forze che agiscono tra di essi siano quasi elastiche, mentre il secondo ha invece per oggetto la determinazione della natura effettiva di queste forze.

Noi ci occuperemo anzitutto del primo problema, e la questione che tratteremo più particolarmente sarà quella della determinazione dell'energia dei moti termici, e quindi anche dei calori specifici, in funzione della temperatura. Questo problema, che anche storicamente fu il primo ad essere trattato, è particolarmente adatto a mostrare i successivi stadi dello sviluppo della teoria di cui ci stiamo occupando, e a far vedere come essa dovette successivamente perfezionarsi per rendere conto dei nuovi fatti sperimentali che venivano man mano scoperti.

I calori specifici dei corpi solidi variano con la temperatura. Vi è però un intervallo di temperature, che comprende, per la maggior parte degli elementi solidi, anche la temperatura ordinaria, nel quale il calore specifico si mantiene abbastanza approssimativamente costante. Ora le prime misure furono naturalmente eseguite in questo intervallo e portarono alla scoperta della legge di Dulong e Petit, che afferma, come è noto, che il calore specifico degli elementi solidi è inversamente proporzionale al loro peso atomico, o, che è lo stesso, che se invece che all'unità di massa ci si riferisce al grammo atomo, il calore specifico risulta eguale per tutti gli elementi.

Questa legge che, quando si effettuino le misure a temperatura ordinaria, presenta solo pochissime eccezioni, trovò una facile interpretazione teorica.

Consideriamo infatti N atomi di un corpo che, in prima approssimazione, rigarderemo come punti materiali; essi avranno complessivamente $3N$ gradi di libertà. Conformemente ai principî della meccanica statistica classica ad ogni grado di libertà corrisponde l'energia cinetica media $kT/2$, essendo T la temperatura assoluta e k la costante di Boltzmann; l'energia cinetica dei nostri N atomi sarà dunque $3NkT/2$. Siccome poi le forze che agiscono tra di essi sono in prima approssimazione delle forze elastiche, si ha che in media l'energia cinetica è uguale a quella potenziale.

L'energia termica totale del nostro corpo sarà dunque

$$(1) \quad W = 3NkT.$$

Dall'espressione dell'energia risulta immediatamente quella del calore specifico, che è dato da

$$c = \frac{dW}{dT} = 3Nk.$$

Secondo questa teoria esso risulta dunque eguale per tutti gli elementi e indipendente dalla temperatura; anche numericamente il suo valore coincide bene con la costante della legge di Dulong e Petit.

Esperienze successive dimostrarono però che la legge di Dulong e Petit perde completamente la sua validità per temperature molto basse, poiché a tali temperature il calore specifico cessa di essere costante, e diminuisce tendendo a zero quando la temperatura si avvicina allo zero assoluto.

Il primo a dare una interpretazione teorica di questo risultato fu Einstein. Egli osservò che essendo gli atomi di un corpo legati tra di loro da forze quasi elastiche, essi sono equiparabili a oscillatori, e, come prima approssimazione, li considerò equivalenti complessivamente a $3N$ oscillatori, tutti della stessa frequenza ν . Secondo la teoria dei quanti la legge della equipartizione dell'energia perde la sua validità per oscillatori di frequenza abbastanza elevata, e l'espressione dell'energia media di un oscillatore invece di essere, come secondo la meccanica statistica classica, kT , ha invece il valore

$$\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

L'energia media dei $3N$ oscillatori equivalenti al nostro corpo solido sarà dunque

$$(2) \quad W = \frac{3N h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Questa formula, e quella che da essa può dedursi per il calore specifico, si mostrarono in abbastanza buon accordo con l'esperienza, specialmente per temperature non estremamente basse; i valori di ν calcolati dall'andamento dei calori specifici corrispondono anche abbastanza bene con le frequenze dei così detti Reststrahlen, che sono radiazioni luminose, situate nell'infrarosso estremo, le quali derivano appunto dalle vibrazioni degli atomi del corpo.

Per temperature molto vicine allo zero assoluto tuttavia anche la teoria di Einstein si dimostrò insufficiente; mentre infatti in realtà per temperature molto basse il calore specifico dei corpi solidi tende a zero come T^3 , secondo la teoria di Einstein invece esso dovrebbe annullarsi assai più rapidamente.

Per correggere questa ultima divergenza occorre modificare una ipotesi troppo semplicista della teoria di Einstein. In questa teoria si parte infatti dall'ipotesi che tutte le frequenze caratteristiche del corpo solido siano tra di loro eguali; il sistema elastico costituito da tutti gli atomi del corpo sarà invece in realtà capace di vibrare secondo frequenze assai numerose; nel calcolo dell'energia termica del corpo solido bisogna quindi tener conto separatamente di tutte queste frequenze caratteristiche.

Un primo metodo per il calcolo di tali frequenze fu escogitato da Debye, e benché esso debba far uso di una ipotesi a prima vista alquanto insoddisfacente, diede tuttavia risultati assai buoni; successivamente il metodo di Debye fu perfezionato e completato per opera di Born e Karman i quali ebbero anche modo di giustificare le ipotesi fatte da Debye. Il principio del metodo usato da Debye è il seguente: Si fa in esso anzitutto astrazione, in una prima approssimazione, dalla struttura discontinua del corpo solido, che viene considerato come un mezzo elastico omogeneo e continuo. Se ora si considera un pezzo di questo corpo, esso sarà capace di vibrare con certe frequenze caratteristiche dipendenti dalla sua forma, dalle sue dimensioni e dalle sue proprietà elastiche, allo stesso modo che una corda tesa può vibrare con frequenze che dipendono dalla sua lunghezza e dalla sua tensione. Naturalmente, per il problema che ci interessa, non è necessaria la determinazione dettagliata di tutte queste frequenze, ma basta conoscere la distribuzione, avere cioè una espressione asintotica per il numero delle frequenze caratteristiche che cadono in un assegnato intervallo di frequenze.

Ora si trova che il numero delle frequenze proprie comprese tra ν e $\nu + d\nu$ è dato, per un sistema di vibrazioni che si propagano con velocità ν in un corpo di volume V , da $\frac{4\pi V}{v^3} \nu^2 d\nu$. Siccome poi nel caso dell'elasticità si hanno tre sistemi di propagazioni, due trasversali con velocità ν_1 e uno longitudinale con velocità ν_2 , possiamo concludere che il numero delle frequenze proprie comprese tra ν e $\nu + d\nu$ è dato da $4\pi V \left(\frac{2}{\nu_1^3} + \frac{1}{\nu_2^3} \right) \nu^2 d\nu$. Attribuendo a ciascuna di queste frequenze l'energia media $\hbar\nu : (e^{\hbar\nu/kT} - 1)$, troviamo come espressione dell'energia termica di tutto il nostro corpo solido

$$(3) \quad W = 4\pi V \left(\frac{2}{\nu_1^3} + \frac{1}{\nu_2^3} \right) \int \frac{\hbar\nu^3 d\nu}{e^{\hbar\nu/kT} - 1}.$$

Se la schematizzazione da noi fatta nel considerare il nostro corpo come un corpo elastico continuo, fosse in realtà esatta, l'integrale precedente dovrebbe evidentemente venir esteso tra zero e infinito, poiché sarebbe possibile la propagazione di vibrazioni elastiche di frequenza comunque grande.

È evidente invece che nel nostro caso ciò non può avvenire, poiché mentre il corpo continuo è capace di vibrare con infinite frequenze caratteristiche, il corpo reale discontinuo ha invece soltanto $3N$ gradi di libertà. Di fronte a questa difficoltà Debye usò un artificio, che benché in linea di principio assai insoddisfacente, portò tuttavia a brillanti risultati, e fu del resto, almeno in parte, giustificato in seguito dalla teoria più perfezionata di Born e Karman. Debye ammise che in un corpo elastico reale non potessero propagarsi vibra-

zioni di frequenza superiore a un certo limite ν_{\max} , e calcolò questo limite in modo che il numero totale delle frequenze caratteristiche inferiori ad esso, e cioè

$$4\pi V \left(\frac{2}{\nu_1^3} + \frac{1}{\nu_2^3} \right) \int_0^{\nu_{\max}} \nu^2 d\nu$$

risultasse eguale a $3N$, ossia al numero dei gradi di libertà del corpo.

Con questa ipotesi il limite superiore dell'integrale (3) diventa ν_{\max} e otteniamo una espressione per l'energia termica, e quindi anche per il calore specifico, in ottimo accordo con l'esperienza. Osserviamo anche che l'accordo tra questa teoria e l'esperienza è tanto più significativo, in quanto la formula di Debye contiene quali unici parametri le costanti elastiche del corpo, le quali possono venir determinate con misure elastiche dirette, indipendenti completamente dalle misure del calore specifico.

Un perfezionamento ulteriore alla teoria dei calori specifici fu, come già abbiamo accennato, apportato da Born e Karman. Partendo dallo stesso concetto di Debye, e cioè di calcolare l'energia termica del corpo solido come somma delle energie di tanti oscillatori, di frequenze eguali alle frequenze caratteristiche del corpo, essi applicarono un metodo assai più corretto per il calcolo di queste frequenze, poiché considerarono il corpo quale esso è in realtà, e cioè costituito da un reticolato di atomi. Senza entrare nei dettagli del calcolo di un sistema elastico costituito da un reticolato di masse esercitanti tra di loro delle forze proporzionali agli spostamenti relativi, vogliamo far vedere sopra un esempio schematico, l'influenza che ha la struttura discontinua del corpo sopra la propagazione delle onde elastiche.

Studieremo per questo la propagazione di una perturbazione elastica in una fila di punti di massa eguale, spazati tra di loro di un intervallo costante a . Supporremo che sopra ciascun atomo agiscano soltanto i due che gli sono più vicini, e che la forza che si esercita tra due atomi attigui sia proporzionale al loro spostamento relativo. Supponiamo dunque che lungo la nostra fila si propaghi una onda elastica sinusoidale, di frequenza ν e di velocità v . Lo spostamento di una particella si potrà scrivere

$$\delta = A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

dove con x si rappresenta la ascissa della particella, che è data da na , essendo n un numero intero. Ci proponiamo di trovare la relazione che passa tra ν e v ; faremo vedere precisamente che, a differenza di quello che accadrebbe in una sbarra elastica a struttura continua, la velocità di propagazione non è costante, ma dipende dalla frequenza.

Lo spostamento della particella per cui $n = 1$, è dato da $A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{a}{v} \right)$ e quello della particella $n = 0$, è dato invece da $A \sin 2\pi\nu t$. La forza agente tra queste due particelle, che per ipotesi è proporzionale al loro spostamento relativo, potrà dunque scriversi

$$kA \left\{ \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{a}{v} \right) - \sin 2\pi\nu t \right\}$$

essendo k il coefficiente di proporzionalità. Sulla particella $n = 0$, agirà anche un'altra forza, dovuta all'azione della particella per cui $n = -1$. Tale forza sarà espressa analogamente da $kA \left\{ \sin 2\pi n \left(t + \frac{a}{v} \right) - \sin 2\pi n t \right\}$.

Scrivendo che il prodotto della massa m della particella per cui $n = 0$, per la sua accelerazione $-4\pi^2 v^2 \sin 2\pi n t$ è uguale alla somma delle forze che agiscono su di essa, troviamo

$$\begin{aligned} -4\pi^2 v^2 mA \sin 2\pi n t &= kA \left\{ \sin 2\pi n \left(t - \frac{a}{v} \right) + \sin 2\pi n \left(t + \frac{a}{v} \right) - 2 \sin 2\pi n t \right\} \\ &= -2kA \sin 2\pi n t \left\{ 1 - \cos \frac{2\pi n a}{v} \right\} = -4kA \sin 2\pi n t \sin^2 \frac{\pi n a}{v}. \end{aligned}$$

Da questa equazione si ricava, con immediate riduzioni

$$(4) \quad v = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\pi n a}{v}.$$

Questa è appunto la relazione cercata tra la velocità di propagazione e la frequenza. Il caso della propagazione in un mezzo continuo, si può ottenere da quello studiato come caso limite per $a = 0$. In questo caso, sostituendo l'arco al seno si vede che v viene a sparire dalla formola precedente, e quindi la velocità di propagazione v risulta indipendente dalla frequenza, come appunto deve essere in mezzi a struttura continua.

Osserviamo ancora che siccome il seno non può mai essere maggiore di 1 si ricava dalla (4)

$$v \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ciò che ci dice che non può avvenire nella nostra fila di particelle una propagazione di onde elastiche di frequenza maggiore di $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$. Questo fatto giustifica in un certo senso l'introduzione, fatta arbitrariamente da Debye, della frequenza limite.

Passiamo ora ad accennare come possano essere interpretati, dal punto di vista della teoria di cui abbiamo indicate le basi, alcuni dei principali fenomeni della fisica dei corpi solidi.

Se le forze che agiscono tra gli atomi del corpo, fossero rigorosamente elastiche, la posizione media occupata da ciascun atomo non dovrebbe spostarsi per effetto del moto termico. In realtà però le forze interatomiche sono soltanto approssimativamente elastiche. La conseguenza di questo è che l'atomo in movimento si sposta anche in media dalla posizione che occuperebbe se fosse fermo, per modo che per effetto del moto termico viene a variare la distanza media tra gli atomi. Questo dà luogo alla dilatazione termica. Per vedere schematicamente come ciò accada, consideriamo un unico punto, attratto da una forza quasi elastica verso una posizione di equilibrio. Supporremo per semplicità il nostro punto mobile sopra una retta, e sia $x = 0$ l'ascissa della posizione di equilibrio. Prendiamo come espressione dell'energia potenziale della forza quasi elastica, $U = kx^2 + hx^3$; se mancasse il termine cubico la forza sarebbe esattamente elastica, e noi supporremo perciò che il

termine cubico sia assai piccolo in confronto di quello quadratico. La forza agente sopra la nostra particella avrà per espressione $-\frac{\partial u}{\partial x} = -2kx - 3hx^2$; l'equazione del moto sarà

$$mx'' = -2kx - 3hx^2.$$

Prendiamo i valori medi dei due termini della equazione precedente. Se si ammette che la velocità resti limitata, si avrà evidentemente $\overline{x'} = 0$. Abbiamo dunque

$$2k\bar{x} + 3h\bar{x}^2 = 0$$

ossia

$$(5) \quad \bar{x} = -\frac{3}{2} \frac{h}{k} \bar{x}^2$$

si vede dunque che l'effetto della non perfetta elasticità del legame, consiste nel rendere differente da zero il valore medio dell'ascissa, ossia nel produrre uno spostamento della posizione media della particella. È chiaro come un ragionamento di questo genere sia suscettibile di essere esteso al caso di un reticolato atomico, e si capisce dunque come avviene che l'agitazione termica ha per effetto una dilatazione delle sostanze. Osserviamo ancora che dalla eguaglianza (5) risulta \bar{x} proporzionale a \bar{x}^2 , cioè in prima approssimazione alla energia del movimento; avremo dunque che la dilatazione termica sarà proporzionale alla energia termica del corpo. E questo si verifica in realtà, perché l'esperienza dimostra che il calore specifico, e il coefficiente di dilatazione termica hanno, in funzione della temperatura, un andamento del tutto simile.

La non completa elasticità del legame tra atomo e atomo, in un corpo solido presenta una notevole importanza per la spiegazione della conduzione termica degli isolanti, della piroelettricità, e di parecchi altri fenomeni. La ristrettezza del tempo ci vieta però di occuparci di questi argomenti.

Vogliamo invece accennare rapidamente agli studi che sono stati fatti sulla natura delle forze che agiscono tra atomo e atomo. Questo studio, dovuto principalmente all'opera di Born e della sua scuola, ha condotto fino ad ora a risultati definitivi solo per il caso delle sostanze a struttura salina. La ragione di questo, dipende dal fatto che nei corpi non salini, si hanno, secondo ogni probabilità, degli elettroni che migrano da un atomo all'altro descrivendo delle orbite intrecciate; ne segue in questo caso una straordinaria complicazione delle forze interatomiche, che fino ad ora sono restate indecifrabili.

I reticolati cristallini dei sali sono invece costituiti da ioni i quali, anche come costituenti del cristallo, conservano tuttavia sempre la loro individualità. Se per esempio consideriamo un pezzo di salgemma, il suo reticolato cristallino è costituito da ioni positivi disposti alternativamente con ioni negativi di cloro. Ora un ione di sodio è costituito da un nucleo positivo con carica undici volte maggiore di quella dell'elettrone, circondato da dieci elettroni negativi, così che il complesso ha una carica negativa di grandezza eguale a quella dell'elettrone. A grande distanza dallo ione la forza elettrica da esso prodotta sarà dunque con grande approssimazione eguale a quella di una carica puntiforme positiva, mentre molto vicino allo ione il suo potenziale elettrico dipen-

derà fortemente anche dalla sua struttura complessa. Lo ione negativo di cloro, è invece costituito da un nucleo positivo con carica 17 volte quella dell'elettrone, circondato da 18 elettroni. A grande distanza il suo potenziale elettrico sarà dunque quello di una carica puntiforme negativa, mentre molto vicino si fa sentire anche in questo caso la influenza della struttura complessa. Se ora supponiamo di porre un ione di cloro e uno di sodio in presenza uno dell'altro, si avrà che fino a che sono molto lontani essi si attireranno come due cariche puntiformi, una positiva e una negativa, con la legge di Coulomb; quando poi i due ioni si avvicinano molto la forza che agisce tra di essi dipenderà in modo essenziale dalla disposizione degli elettroni. Pur non potendosi in questo caso, fare un calcolo esatto della forza agente tra i due ioni, per la nostra ignoranza dei dettagli della loro struttura elettronica, si può tuttavia prevedere che quando gli elettroni che circondano i due ioni vengono ad avvicinarsi moltissimo, la forza repulsiva tra di essi finirà ad un certo punto per prevalere, di modo che nella immediata vicinanza i due ioni si respingeranno. La forza che agisce tra i due ioni può dunque venir rappresentata come la somma di una forza attrattiva inversamente proporzionale al quadrato della distanza, e di una forza repulsiva che acquista valori assai grandi quando i due ioni si trovano vicinissimi uno all'altro, e decresce rapidissimamente con la distanza.

Una brillante conferma sperimentale di queste vedute si ha nel calcolo dell'energia che tiene insieme un reticolato di ioni. Le esperienze di Laue, Bragg e altri sopra i fenomeni di diffrazione dei raggi Röntgen hanno infatti permesso in questi ultimi tempi di determinare esattamente la posizione degli atomi nei reticolati cristallini di numerose sostanze. Calcoli assai laboriosi permettono allora di calcolare l'energia potenziale delle forze interatomiche, la quale non è altro che l'energia che è necessaria per separare il cristallo negli ioni che lo costituiscono, e può essere anche misurata direttamente. La concordanza tra i valori misurati e calcolati di questa energia si è dimostrata praticamente perfetta. Questa conferma, come pure il successo ottenuto nel calcolo della compressibilità e delle altre costanti elastiche dei sali, hanno oramai messa fuori di dubbio la natura elettrica delle forze che tengono insieme gli atomi di queste sostanze.