

N° 64.

For the introduction to this paper see N° 50.

64.

SOPRA L'ELETTRODINAMICA QUANTISTICA (*)

« Rend. Lincei », 12, 431-435 (1930).

In una Nota pubblicata recentemente in questi « Rendiconti »⁽¹⁾ ho scritto in forma quantistica le equazioni dell'elettrodinamica; cioè le equazioni del sistema costituito dal campo elettromagnetico e da un numero qualunque di cariche elettriche puntiformi. Le equazioni scritte allora si riferivano al caso non relativistico; presupponevano cioè che le velocità delle cariche non fossero molto elevate. Esse possono tuttavia senza alcuna difficoltà essere scritte in forma relativistica, basandosi sopra la teoria di Dirac dell'elettrone rotante. È noto che recentemente anche W. Heisenberg e W. Pauli⁽²⁾ hanno trattato il problema dell'elettrodinamica quantistica. Siccome però i metodi seguiti da questi Autori sono essenzialmente diversi dai miei, credo non inutile pubblicare anche i miei risultati.

La forma definitiva in cui verranno espressi i risultati di questo lavoro è particolarmente semplice. Troveremo infatti che la Hamiltoniana che, nel senso del principio di corrispondenza, rappresenta la naturale traduzione quantistica dell'elettrodinamica classica, si ottiene semplicemente aggiungendo alla Hamiltoniana della teoria dell'irradiazione di Dirac un termine che rappresenta l'energia elettrostatica del sistema di cariche elettriche; per modo che, nella presente forma, l'elettrodinamica quantistica viene a non essere in alcun modo più complicata della teoria di Dirac dell'irradiazione. Questa semplificazione si può raggiungere come vedremo mediante una opportuna espressione della condizione

$$(1) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{U} = 0$$

che lega tra di loro i potenziali scalare e vettore e che, anche nella teoria di Heisenberg e Pauli costituisce uno degli elementi più caratteristici dell'elettrodinamica quantistica.

Nella Nota I abbiamo trovata l'espressione (21) che rappresenta l'Hamiltoniana del nostro sistema. Se, invece della meccanica classica, vogliamo rappresentare il moto dei punti per mezzo della Hamiltoniana di Dirac,

(*) Presentata dal Socio O. M. Corbino, è pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1930.

(1) E. FERMI, « Rend. Lincei », 5, 881 (1929). Citata nel seguito con I.

(2) W. HEISENBERG und W. PAULI, « Zs. f. Phys. », 56, 1 (1929); 59, 160 (1930).

possiamo verificare facilmente che, al posto della I dobbiamo usare l'Hamiltoniana seguente:

$$(2) \quad H = -c \sum_i \gamma_i \cdot \mathbf{P}_i - \sum_i \delta_i m_i c^2 + \sum_i e_i c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_j Q_j \cos \Gamma_{ji} \\ + \sum_j e_j c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s \gamma_i \cdot (\alpha_s \chi_s + \mathbf{A}_{s1} w_{s1} + \mathbf{A}_{s2} w_{s2}) \sin \Gamma_{si} \\ + \sum_i \left[\frac{1}{2} (\omega_{s1}^2 + \omega_{s2}^2 + \tilde{\omega}_s^2 - P_s^2) + 2 \pi^2 v_s^2 (w_{s1}^2 + w_{s2}^2 + \chi_s^2 - Q_s^2) \right].$$

Le notazioni sono quelle della Nota I; δ_i e γ_i rappresentano un q -scalare e un q -vettore tali che $\delta_i, \gamma_{ix}, \gamma_{iy}, \gamma_{iz}$ sono i quattro operatori, rappresentabili con matrici del quarto ordine, che intervengono nella Hamiltoniana relativa all' i -esimo punto materiale; naturalmente le γ e la δ relative a uno dei punti sono permutabili con le γ e la δ relative a un altro dei punti.

Osserviamo in particolare che dall'Hamiltoniana (2) risulta

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_s = \frac{\partial H}{\partial P_s} = -P_s \quad ; \quad \dot{P}_s = -\frac{\partial H}{\partial Q_s} = 4 \pi^2 v_s^2 Q_s - c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum e_i \cos \Gamma_{si} \\ \dot{\chi}_s = \frac{\partial H}{\partial \tilde{\omega}_s} = \tilde{\omega}_s \quad ; \quad \dot{\tilde{\omega}}_s = -\frac{\partial H}{\partial \chi_s} = -4 \pi^2 v_s^2 \chi_s - c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum e_i \gamma_i \cdot \alpha_s \sin \Gamma_{si} \end{array} \right.$$

e

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = -c \gamma_i$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \cos \Gamma_{si} = 2 \pi v_s \gamma_i \cdot \alpha_s \sin \Gamma_{si}.$$

Da questa equazione e dalle (3) risulta subito che anche dalla nuova Hamiltoniana (2) deriva l'equazione (18) I; e quindi che se l'espressione (19) I si annulla insieme alla sua derivata prima all'istante zero, essa resta sempre nulla in virtù delle equazioni differenziali. E resta quindi verificata la condizione (1), equivalente alla (19) I. Per mezzo delle (3), la (19) I si può scrivere

$$(4) \quad 2 \pi v_s \chi_s - P_s = 0$$

e la sua derivata, a meno di un fattore costante

$$(5) \quad \tilde{\omega}_s - 2 \pi v_s Q_s + \frac{c}{2 \pi v_s} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si} = 0.$$

In una interpretazione classica potremmo dunque dire che l'elettrodinamica ordinaria si ottiene integrando le equazioni canoniche dedotte dalla (2) e imponendo (4) e (5) come condizioni iniziali; ciò basta, poiché si è detto che se (4) e (5) sono verificate all'istante zero, esse lo sono anche automaticamente a un istante qualsiasi.

Per tradurre tutto questo nel linguaggio della meccanica quantistica, osserviamo, che, affinché le due grandezze (4) e (5) possano avere simultaneamente il valore zero, è necessario che esse siano commutabili, poiché

altrimenti il fatto che una delle due grandezze ha un valore determinato renderebbe di necessità indeterminato il valore dell'altra. Ora si verifica facilmente, in base alle ordinarie regole di commutazione, che i primi membri di (4) e (5) sono effettivamente commutabili; si può quindi anche quantisticamente attribuire ad essi allo stesso istante il valore determinato zero.

Al procedimento classico di integrazione delle equazioni canoniche con valori arbitrari delle costanti di integrazione, corrisponde, nella meccanica ondulatoria l'integrazione dell'equazione di Schroedinger corrispondente alla Hamiltoniana (2), scegliendo arbitrariamente la funzione che rappresenta lo scalare di campo

$$(6) \quad \psi = \psi(t, \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, w_{s1}, w_{s2}, \chi_s, Q_s)$$

($\boldsymbol{\sigma}_i$ rappresenta simbolicamente la coordinata interna « spincoordinate » dell' i -esimo corpuscolo) per il valore $t = 0$ del tempo. Se vogliamo invece soddisfare le condizioni (4) e (5) non possiamo più lasciare arbitraria questa funzione; resta invece determinato il modo secondo cui essa dipende dalle variabili χ_s e Q_s . Siccome infatti $\tilde{\omega}_s$, coniugata di χ_s , deve avere, secondo la (5) il valore

$$\tilde{\omega}_s = 2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si}$$

risulta che ψ deve dipendere da χ_s nel fattore

$$(7) \quad e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \chi_s \left(2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)}$$

Dalla (4) segue in modo simile che Q_s deve intervenire soltanto nel fattore

$$(8) \quad e^{\frac{2\pi i}{\hbar} 2\pi\nu_s Q_s \chi_s}$$

il quale è del resto già contenuto nel fattore (7). In conclusione la soluzione corrispondente alle condizioni (4) e (5) deve avere la forma:

$$(9) \quad \psi = \left[\prod_s e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \chi_s \left(2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)} \right] \varphi(t, \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, w_{s1}, w_{s2}).$$

Dobbiamo ora dimostrare che effettivamente si può soddisfare l'equazione di Schroedinger per mezzo della posizione (9). L'equazione di Schroedinger dedotta dall'Hamiltoniana (2) è

$$(10) \quad - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

dove H è naturalmente interpretato come operatore. Sostituendo nella (10) al posto di ψ l'espressione (9) si trova, con calcoli non difficili la seguente equazione a cui deve soddisfare φ :

$$(11) \quad - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = R \varphi$$

dove R rappresenta il seguente operatore.

$$(12) R = -c \sum_i \gamma_i \cdot \mathbf{p}_i - \sum_i \delta_i m_i c^2 + \sum_i e_i c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s \gamma_i \cdot (\mathbf{A}_{s1} w_{s1} + \mathbf{A}_{s2} w_{s2}) \sin \Gamma_{si} \\ + \sum_s \left[\frac{1}{2} (\omega_{s1}^2 + \omega_{s2}^2) + 2 \pi^2 v_s^2 (w_{s1}^2 + w_{s2}^2) \right] + \frac{c^2}{\pi \Omega} \sum_s \frac{1}{v_s^2} \left(\sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)^2.$$

A prescindere dall'ultimo termine, R coincide con l'Hamiltoniana della teoria dell'irradiazione di Dirac, in cui si trascura il potenziale scalare e la componente longitudinale del potenziale vettore, considerando solo il campo determinato dalle componenti trasversali del potenziale vettore, e cioè il solo campo di radiazione. Dobbiamo discutere il significato dell'ultimo termine. Per questo lo trasformiamo nel modo seguente:

$$\frac{c^2}{\pi \Omega} \sum_s \frac{1}{v_s^2} \left(\sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)^2 = \frac{e^2}{\pi \Omega} \sum_{ij} e_i e_j \frac{\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}}{v_s^2} \\ = \frac{c^2}{\pi \Omega} \sum_{ij} e_i e_j \sum_s \frac{\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}}{v_s^2}.$$

La somma rispetto ad s si può trasformare in un integrale e si trova, con calcoli privi di difficoltà

$$\sum_s \frac{\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}}{v_s^2} = \frac{\pi \Omega}{2c^2} \frac{1}{r_{ij}}$$

dove r_{ij} rappresenta la distanza tra i due punti i e j . Sostituendo troviamo

$$(13) \quad \frac{c^2}{\pi \Omega} \sum_s \frac{1}{v_s^2} \left(\sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{e_i e_j}{r_{ij}}.$$

La (13) ci dà dunque semplicemente la ordinaria espressione dell'energia elettrostatica; come nell'elettrostatica classica, l'espressione (13) diventa infinita nel caso di cariche elettriche puntiformi. Questo inconveniente, più che dalla elettrodinamica, deriva dalla imperfetta conoscenza della struttura dell'elettrone e potrebbe per esempio venir eliminato considerando elettroni di raggio finito. Noi lo elimineremo formalmente, come si suol fare anche nell'elettrostatica classica, escludendo dalla somma (13) i termini per cui $i = j$ che rappresentano in certo modo una costante additiva infinitamente grande. Indicheremo ciò con un'apice al segno Σ . Per mezzo della (13), la (12) diventa:

$$(14) R = -c \sum_i \gamma_i \cdot \mathbf{p}_i - \sum_i \delta_i m_i c^2 + \sum_i e_i c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s \gamma_i \cdot (\mathbf{A}_{s1} w_{s1} + \mathbf{A}_{s2} w_{s2}) \sin \Gamma_{si} \\ + \sum_s \left[\frac{1}{2} (\omega_{s1}^2 + \omega_{s2}^2) + 2 \pi^2 v_s^2 (w_{s1}^2 + w_{s2}^2) \right] + \frac{1}{2} \sum_{ij}' \frac{e_i e_j}{r_{ij}}.$$

Osserviamo infine che la funzione φ che abbiamo sostituito allo scalare di campo ψ per mezzo della (9) può in tutte le considerazioni sostituirsi ad esso, da cui differisce per un fattore complesso di modulo 1. La φ soddisfa all'equazione (11) che è del tipo di una equazione di Schrodinger in cui

però si deve prendere come Hamiltoniana R invece di H . Questa nuova Hamiltoniana R , come si legge immediatamente dalla (14) è costituita semplicemente aggiungendo l'ordinaria espressione dell'energia elettrostatica alla ordinaria Hamiltoniana dei termini di pura radiazione. Possiamo dunque concludere che, in questa forma, il problema di elettrodinamica quantistica non è in alcun modo più complicato di un ordinario problema di teoria della radiazione.

Naturalmente, come già abbiamo accennato, anche questa teoria conserva in sé due difetti fondamentali che però più che di origine elettrodinamica, possono considerarsi derivanti dalla non completa conoscenza della struttura elettronica. Essi sono la possibilità che ha l'elettrone di Dirac di passare a livelli energetici con energia negativa ed il fatto che l'energia intrinseca ha valore infinito se si ammette l'elettrone esattamente puntiforme.

N° 65.

For the introduction to this paper see N° 50.

65.

LE MASSE ELETTROMAGNETICHE
NELLA ELETTRODINAMICA QUANTISTICA

« Nuovo Cimento », 8, 121-132 (1931).

SUNTO. — In questo lavoro viene discusso il problema delle masse elettromagnetiche nella elettrodinamica quantistica per mezzo di ipotesi che equivalgono sostanzialmente ad attribuire all'elettrone un raggio finito. Vengono in particolare illustrate alcune caratteristiche differenze tra il caso classico e quello quantistico.

§ 1. — L'energia del campo elettrostatico prodotto da una carica elettrica puntiforme è, come è noto, infinita; per conseguenza nella teoria elettrodinamica ordinaria la massa elettromagnetica di una carica elettrica esattamente puntiforme risulta essa pure infinita. Si è per questo assai spesso pensato che i corpuscoli elettrici (elettroni o protoni) non si possano a tutto rigore considerare come cariche puntiformi, ma che essi abbiano una struttura di estensione finita. Una difficoltà in tutto simile a quella della elettrodinamica classica si incontra anche nella elettrodinamica quantistica, poiché, anche secondo questa teoria, una carica elettrica puntiforme viene necessariamente ad essere associata ad una energia infinita; né è possibile eliminare questa difficoltà alterando il valore dell'energia per una costante additiva infinita, poiché, come hanno mostrato Oppenheimer ⁽¹⁾ e Waller ⁽²⁾, il termine infinito non è costante, ma varia al variare degli stati quantici; ed anche le sue variazioni sono infinite. Ciò che ha del resto il suo riscontro classico nel fatto che se consideriamo una carica elettrica puntiforme in moto, non solo è infinita l'energia elettrica, ma anche l'energia magnetica, che dipende dalla velocità e corrisponde, in prima approssimazione, all'energia cinetica elettromagnetica.

L'artificio che si presenta per primo per cercare di evitare questi inconvenienti, consiste nel tentar di introdurre anche nell'elettrodinamica quantistica qualche cosa di equivalente ad un raggio finito dell'elettrone. Se si cerca di far questo però, ci si trova di fronte a difficoltà assai maggiori di quelle che si incontrano nel corrispondente problema classico; così che non sembra possibile, almeno con lo schema attuale dell'elettrodinamica quan-

(1) J. OPPENHEIMER, « Phys. Rev. », 35, 461 (1930).

(2) I. WALLER, « ZS. f. Phys. », 62, 673 (1930).

tistica, fare la teoria di un elettrone di raggio finito, conservando la invarianza relativistica. Ha tuttavia un certo interesse studiare fino a che punto può costruirsi una teoria delle masse elettromagnetiche, poiché in essa si presentano alcune caratteristiche differenze dalla teoria classica, allo studio delle quali è principalmente dedicato il presente lavoro (3).

Il metodo che seguiremo in questo studio è quello da me esposto in una recente Nota (4), alla quale rimandiamo anche per le notazioni: esso consiste sostanzialmente nel considerare come variabili dinamiche che caratterizzano il campo elettromagnetico i coefficienti dello sviluppo in componenti armoniche dei potenziali scalare e vettore a un certo istante.

§ 2. - Per introdurre in un modo analiticamente semplice l'ipotesi che l'elettrone abbia estensione finita, osserviamo che, se così è, le varie parti dell'elettrone verranno a trovarsi in punti di egual fase, rispetto ad onde di lunghezza d'onda grande in confronto alle dimensioni elettroniche; mentre onde di lunghezza d'onda dell'ordine delle dimensioni elettroniche, o più piccola, avranno fase differente nei diversi punti dell'elettrone. Si comprende allora molto facilmente, e calcoli immediati lo confermano, che l'elettrone verrà ad interagire tanto meno intensamente con le diverse onde, quanto più piccola è la loro lunghezza d'onda, poiché, per onde assai brevi, le diverse parti dell'elettrone agiscono in disaccordo.

L'effetto di ciò può rappresentarsi dicendo che l'elettrone interagisce con le componenti armoniche di alta frequenza del campo come se esso avesse una carica elettrica efficace più piccola di quella che determina l'interazione con le componenti armoniche di bassa frequenza, e che naturalmente coincide con l'ordinario valore della carica elettronica quale è dato da misure statiche o quasi statiche. Ben inteso che queste variazioni della carica efficace non sono sensibili ancora per nessuna delle radiazioni che si possono produrre in laboratorio; esse acquisterebbero importanza soltanto per lunghezze d'onda, che fossero piccole frazioni di unità X.

Noi prenderemo dunque come Hamiltoniana per il sistema costituito dal campo elettromagnetico e dalla radiazione la stessa espressione usata nella nota A (formula (2)) in cui però al posto di e_i (carica della i -esima particella) porremo $e_i(v_i)$ o anche brevemente $e_{i,v}$; v_i rappresenta la frequenza della componente armonica del campo con cui la particella interagisce. Ci limiteremo inoltre per semplicità al caso che si abbia nel campo un solo elettrone, e scriveremo perciò, come Hamiltoniana complessiva del campo e dell'elettrone

$$(1) \quad H = -c\gamma \cdot \mathbf{p} - \delta mc^2 + c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s e_s Q_s \cos \Gamma_s \\ + c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s e_s \gamma \cdot (\mathbf{a}_s \chi_s + \mathbf{A}_{s1} w_{s1} + \mathbf{A}_{s2} w_{s2}) \sin \Gamma_s \\ + \sum_s \left\{ \frac{1}{2} (\omega_{s1}^2 + \omega_{s2}^2 + \tilde{\omega}_s^2 - P_s^2) + 2\pi^2 v_s^2 (w_{s1}^2 + w_{s2}^2 + \chi_s^2 - Q_s^2) \right\}.$$

(3) Cfr. anche W. HEISENBERG, « ZS. f. Phys. », 65, 4 (1930).

(4) E. FERMI, « Rend. Lincei », 12, 431 (1930). Citato nel seguito con A.

È facile verificare che, anche nell'ipotesi qui fatta, che l'elettrone interagisca con una diversa carica elettrica con le differenti componenti armoniche, a seconda della loro frequenza, è possibile ridurre l'autofunzione ad una forma in tutto analoga alla ((9) *A*). Ciò si fa in modo identico a quello seguito nella Nota *A* tenendo conto delle due relazioni

$$(2) \quad 2 \pi \nu_s \chi_s - P_s = 0,$$

e

$$(3) \quad \tilde{\omega}_s - 2 \pi \nu_s Q_s + \frac{c}{2 \pi \nu_s} \sqrt{\frac{8 \pi}{\Omega}} e_s \cos \Gamma_s = 0,$$

che esprimono che è valida in ogni istante la relazione

$$(4) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{U} = 0,$$

che collega tra di loro i potenziali scalare e vettore. Per mezzo delle (2) e (3) resta fissato il modo con cui la ampiezza di probabilità $\psi(t, \mathbf{x}, \sigma, w_{s1}, w_{s2}, \chi_s, Q_s)$ dipende dalle variabili χ_s e Q_s ; si trova precisamente, come nella Nota *A*,

$$(5) \quad \psi = e^{\frac{2 \pi i}{h} \sum_s \chi_s \left(2 \pi \nu_s Q_s - \frac{c}{2 \pi \nu_s} \sqrt{\frac{8 \pi}{\Omega}} e_s \cos \Gamma_s \right)} \varphi(t, \mathbf{x}, \sigma, w_{s1}, w_{s2}).$$

La funzione φ , che può, in qualche modo, considerarsi ancora come una ampiezza di probabilità, soddisfa ad una equazione del tipo

$$(6) \quad -\frac{\hbar}{2 \pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = R \varphi,$$

dove *R*, come nella *A*, rappresenta l'operatore

$$(7) \quad R = -c \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - \delta m c^2 + c \sqrt{\frac{8 \pi}{\Omega}} \sum_r e_r (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}_r) w_r \sin \Gamma_r \\ + \sum_r \left(\frac{1}{2} \omega_r^2 + 2 \pi^2 \nu_r^2 w_r^2 \right) + \frac{c^2}{\pi \Omega} \sum_s \frac{1}{\nu_s^2} e_s^2 \cos^2 \Gamma_s.$$

In questa espressione di *R* è stata introdotta una piccola semplificazione rispetto alle notazioni della Nota *A*. Invece di considerare singolarmente le due coordinate w_{s1} e w_{s2} le abbiamo indicate con un solo indice, w_r . Naturalmente il nuovo indice *r* assume un numero di valori doppio di quelli del corrispondente indice *s*, date le due possibilità di polarizzazione per le componenti trasversali dell'onda.

§ 3. - Dobbiamo prima di tutto ricercare il significato fisico dell'ultimo termine di (7) per far vedere che esso corrisponde all'energia elettrostatica intrinseca dell'elettrone; tale energia non risulta più necessariamente infinita con le nostre ipotesi che equivalgono sostanzialmente ad attribuire all'elettrone un raggio finito.

La somma che figura nell'ultimo termine di (7) può trasformarsi in un integrale; basta per questo sostituire $\cos^2 \Gamma_s$ col suo valor medio 1/2; esprimere

e_s , come funzione della frequenza ν_s , col porre $e_s = e(\nu_s)$; sostituire infine $\sum_r \int_0^\infty \frac{4\pi\Omega}{c^3} \nu_s^2 d\nu_s$, dove $\frac{4\pi\Omega}{c^3} \nu_s^2 d\nu_s$, rappresenta il numero delle frequenze comprese tra ν_s e $\nu_s + d\nu_s$, per le onde longitudinali (indice s e non r). Si trova così:

$$(8) \quad \frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_r \frac{1}{\nu_s^2} e_s^2 \cos^2 \Gamma_s = \frac{2}{c} \int_0^\infty e^2(\nu_s) d\nu_s.$$

Si dimostra senza difficoltà che per esempio ad una distribuzione sferica superficiale di carica elettrica corrisponde

$$(9) \quad e(\nu) = \frac{ce}{2\pi\nu R} \sin \frac{2\pi\nu R}{c}$$

Sostituendo questa espressione nella (8) si trova

$$(10) \quad \frac{2}{c} \int_0^\infty e^2(\nu) d\nu = \frac{e^2}{2R},$$

che rappresenta appunto l'energia elettrostatica della distribuzione di elettricità considerata. Del resto l'identità tra l'espressione (8) e l'energia elettrostatica si dimostra senza difficoltà anche per il caso di una distribuzione di elettricità più complicata. Naturalmente il termine (8) diventa infinito per una carica elettrica puntiforme, per cui $e(\nu)$ non dipende dalla frequenza.

La presenza del termine (8) nella Hamiltoniana R , ed il suo significato fisico che abbiamo ora discusso, non debbono naturalmente farci credere che l'energia elettrostatica, divisa per c^2 , rappresenti la massa elettromagnetica anche nell'elettrodinamica quantistica, come si trova in quella classica; ci resta infatti ancora da considerare l'effetto di un altro termine di R che dipende dalla presenza della carica elettrica; precisamente

$$(11) \quad c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_r e_r (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}_r) w_r \sin \Gamma_r.$$

Prima di poter studiare l'azione di questo termine dobbiamo cercare alcune semplificazioni del nostro problema dipendenti dall'esistenza dell'integrale della quantità di moto.

§ 4. - Dalla forma (5) dell'autofunzione appare evidente che la quantità di moto \boldsymbol{p} del corpuscolo non può mai assumere un valore determinato; sarebbe perciò necessario che ψ dipendesse dalle coordinate di posizione nella forma $e^{\frac{2\pi i}{h} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}}$, ciò che è escluso dall'espressione (5) della ψ . Che del resto \boldsymbol{p} non possa assumere un valore determinato si riconosce anche dal fatto che \boldsymbol{p} non commuta col primo membro della (3), che ha il valore determinato zero. Si può anche riconoscere facilmente la causa fisica di questa indeterminazione di \boldsymbol{p} ; infatti l'elettrone è circondato da un campo elettro-

magnetico che lo accompagna nel suo movimento e che viene in qualche modo a costituire una parte integrante dell'elettrone stesso. Come quantità di moto dell'elettrone bisogna perciò necessariamente considerare anche il contributo di questo campo. Per ottenere la quantità di moto totale del sistema bisogna aggiungere anche la quantità di moto elettromagnetica del campo di radiazione. Tale quantità di moto totale dovrà naturalmente essere costante, e quindi commutare con H ; siccome essa deve poi essere suscettibile di valori determinati, essa dovrà anche commutare con i primi membri di (2) e (3).

Si verifica senza difficoltà che la quantità di moto totale è rappresentata dal vettore seguente

$$(12) \quad \Pi = \mathbf{p} - \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s e_s \chi_s \boldsymbol{\alpha}_s \sin \Gamma_s + \frac{2\pi}{c} \sum_j v_j \boldsymbol{\alpha}_j (w_j w_{j^*} - w_j w_{j^*}),$$

il quale soddisfa alle condizioni precedentemente indicate. L'ultimo termine di (12) rappresenta la quantità di moto della radiazione. In esso sono state usate le notazioni seguenti. L'indice j , rispetto al quale si effettua la somma, rappresenta soltanto metà delle componenti trasversali r della radiazione; l'altra metà è rappresentata dall'indice che abbiamo indicato con j^* . Per ogni componente j esiste una corrispondente j^* correlata ad essa dalle relazioni seguenti:

$$(13) \quad v_j = v_{j^*} \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}_{j^*} \quad ; \quad \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_{j^*} \quad ; \quad \cos \Gamma_j = \sin \Gamma_{j^*}.$$

Per modo che le due componenti j e j^* hanno eguali le frequenze, le direzioni di propagazione e di polarizzazione e sono spostate di fase una rispetto all'altra di un quarto di periodo.

La verifica che il vettore Π commuta con i primi membri di (2) e (3) è immediata. Per far vedere anche che esso è costante, e quindi commuta con H , conviene scrivere H nella forma

$$(14) \quad H = -c\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - \delta mc^2 + c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s e_s (Q_s \cos \Gamma_s + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}_s \chi_s \sin \Gamma_s) \\ + c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_j e_j \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}_j (w_j \sin \Gamma_j + w_{j^*} \cos \Gamma_j) \\ + \sum_j \left[\frac{w_j^2 + w_{j^*}^2}{2} + 2\pi^2 v_j^2 (w_j^2 + w_{j^*}^2) \right] + \sum_s \left[\frac{\tilde{\omega}_s^2 - P_s^2}{2} + 2\pi^2 v_s^2 (\chi_s^2 - Q_s^2) \right].$$

Si ottiene allora immediatamente la relazione

$$(15) \quad \Pi H - H \Pi = 0,$$

tenendo conto di (2) e di (3) ed osservando che evidentemente

$$\frac{8\pi}{\Omega} \sum_s \frac{c e_s^2}{2\pi v_s} \boldsymbol{\alpha}_s \sin \Gamma_s \cos \Gamma_s = 0,$$

data l'isotropia della distribuzione delle componenti armoniche della radiazione.

§ 5. - Nel caso che Π abbia valore numerico determinato, si possono facilmente eliminare dall'ampiezza di probabilità le coordinate di posizione, con un procedimento simile a quello già usato per eliminare le coordinate Q_r e χ_s , per mezzo delle relazioni (2) e (3). Questa eliminazione è stata anche fatta da Heisenberg, per il suo caso, nel citato lavoro.

Osserviamo che se si attribuisce al primo membro della (12) un valore determinato (vettoriale) l'ampiezza di probabilità deve soddisfare l'equazione differenziale che si ottiene eguagliando $\Pi\psi$ all'operatore che figura nel secondo membro di (12) applicato a ψ . Tenendo conto della (5) questa equazione si trasforma nella seguente equazione per la φ :

$$(15) \quad \frac{2\pi i}{\hbar} \Pi\varphi = \text{grad } \varphi - \sum_j \frac{2\pi v_j}{c} \alpha_j \left(w_j \frac{\partial \varphi}{\partial w_j} - w_{j^*} \frac{\partial \varphi}{\partial w_{j^*}} \right).$$

L'integrale generale di questa equazione è:

$$(16) \quad \varphi = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \Pi \cdot x} F\left(t, \sigma, \sqrt{w_j^2 + w_{j^*}^2}, \Gamma, -\arctg \frac{w_j}{w_{j^*}}\right) = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \Pi \cdot x} F(t, \sigma, \hbar_j \vartheta_j),$$

dove si è posto

$$(17) \quad w_j = \hbar_j \sin(\Gamma_j - \vartheta_j) \quad ; \quad w_{j^*} = \hbar_j \cos(\Gamma_j - \vartheta_j).$$

L'equazione differenziale a cui soddisfa la F si trova sostituendo in (6) l'espressione (16), ed osservando che l'operatore R , dato da (7) deve scriversi, tenendo conto del significato dell'indice j ,

$$(18) \quad R = c\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - \delta mc^2 + c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_j e_j (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}_j) (w_j \sin \Gamma_j + w_{j^*} \cos \Gamma_j) \\ + \frac{1}{2} \sum_j \left[\frac{\omega_j^2 + \omega_{j^*}^2}{2} + 2\pi^2 v_j^2 (w_j^2 + w_{j^*}^2) \right] + \frac{2}{c} \int_0^\infty e^2(v) dv.$$

Tenendo conto delle (17) si trova allora con calcoli privi di difficoltà:

$$(19) \quad -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial F}{\partial t} = GF,$$

dove G rappresenta l'operatore seguente

$$(20) \quad G = -c\Pi \cdot \boldsymbol{\gamma} - \delta mc^2 + \sum_j i\hbar v_j (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}_j) \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \\ + \sum_j \left\{ 2\pi^2 v_j^2 \hbar_j^2 - \frac{\hbar^2}{8\pi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \hbar_j^2} + \frac{1}{\hbar_j} \frac{\partial}{\partial \hbar_j} + \frac{1}{\hbar_j^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j^2} \right) \right\} \\ + c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_j e_j (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}_j) \hbar_j \cos \vartheta_j + \frac{2}{c} \int_0^\infty e^2(v) dv.$$

Se in luogo di \hbar_j e ϑ_j si introducono come variabili

$$(21) \quad \xi_j = \hbar_j \cos \vartheta_j \quad ; \quad \eta_j = \hbar_j \sin \vartheta_j,$$

l'operatore G prende la forma

$$(22) \quad G = -c\Pi \cdot \boldsymbol{\gamma} - mc^2 \delta + \sum_j i\hbar v_j (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\alpha}_j) \left(\xi_j \frac{\partial}{\partial \eta_j} - \eta_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \\ + \sum_j \left\{ 2 \pi^2 v_j^2 (\xi_j^2 + \eta_j^2) - \frac{\hbar^2}{8 \pi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_j^2} \right) \right\} \\ + c \sqrt{\frac{8 \pi}{\Omega}} \sum_j e_j (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}_j) \xi_j + \frac{2}{c} \int_0^\infty e^2(v) dv,$$

in cui è messa in evidenza la quantità di moto della radiazione (terzo termine) e la energia della radiazione (quarto termine).

§ 6. - Una ulteriore semplificazione dell'equazione (19) si può ottenere se facciamo l'ipotesi che il corpuscolo non abbia massa materiale, e che tutta la sua massa sia di origine elettromagnetica. Dovremo in questo caso porre nella (20) e nella (22) $m = 0$. Si verifica allora immediatamente che la grandezza

$$(23) \quad i\gamma_x \gamma_y \gamma_z,$$

commuta con G , e può considerarsi come un integrale suscettibile di valori numerici costanti. Elevandola al quadrato, e tenendo conto delle proprietà delle γ , si trova $(i\gamma_x \gamma_y \gamma_z)^2 = 1$; gli autovalori di $i\gamma_x \gamma_y \gamma_z$ sono dunque $+1$ e -1 . Questo fatto ci permette di semplificare il nostro problema riducendoci da una teoria a quattro componenti, in cui per γ_x , γ_y e γ_z , si debbono prendere le matrici di Dirac, ad una teoria a due componenti in cui si debbono usare le matrici di Pauli. Più precisamente si trova senza difficoltà che se

$$i\gamma_x \gamma_y \gamma_z = 1,$$

deve prendersi

$$(24) \quad \gamma_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Se invece

$$i\gamma_x \gamma_y \gamma_z = -1,$$

deve prendersi

$$(25) \quad \gamma_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Si riconosce subito che questi due casi non differiscono sostanzialmente tra di loro, e corrispondono semplicemente alle due possibili orientazioni dello spin. Noi supporremo perciò che le γ abbiano l'espressione (24).

L'operatore G si scrive ora, facendo in esso $m = 0$ e prendendo l'asse delle z nella direzione della quantità di moto totale

$$(26) \quad G = -c\Pi\gamma_z + \sum_j i\hbar v_j (\boldsymbol{\alpha}_j \cdot \boldsymbol{\gamma}) \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_j \left(2 \pi^2 v_j^2 k_j^2 - \frac{\hbar^2}{8 \pi^2} \Delta_j \right) \\ + c \sqrt{\frac{8 \pi}{\Omega}} \sum_j e_j (\mathbf{A}_j \cdot \boldsymbol{\gamma}) \xi_j + \frac{2}{c} \int_0^\infty e^2(v) dv,$$

ove le γ rappresentano gli operatori (24).

§ 7. - Il problema della determinazione della massa elettromagnetica del corpuscolo resta così ridotto matematicamente alla ricerca degli autovalori dell'operatore (26). Questi dipendono naturalmente dal valore della quantità di moto Π , che figura in (26) come un parametro; per modo che l'energia viene ad essere una funzione della quantità di moto. Confrontando questa relazione, con l'espressione relativistica dell'energia cinetica W_{cl} in funzione della quantità di moto

$$(27) \quad W = \sqrt{c^2 \Pi^2 + M^2 c^4},$$

si dovrebbe trovare la massa elettromagnetica M . Naturalmente si deve in ciò tener presente che la quantità di moto Π si può in genere interpretare come somma della quantità di moto dei quanti di radiazione eventualmente presenti nel campo elettromagnetico. Perché Π rappresenti la quantità di moto del corpuscolo soltanto, occorre cercare quelle soluzioni che corrispondono all'assenza di radiazione.

La ricerca esatta degli autovalori di G sembra essere connessa con considerevoli difficoltà matematiche, che per il momento non mi è riuscito di superare. L'unica via per cercare di formarsi una idea sulla loro struttura consiste perciò nella applicazione del metodo delle perturbazioni. Precisamente si spezza la Hamiltoniana G nella somma

$$(28) \quad G = G_0 + g,$$

di una Hamiltoniana imperturbata

$$(29) \quad G_0 = -c \Pi \gamma_z + \sum_j i \hbar v_j (\alpha_j \cdot \gamma) \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_j \left(2 \pi^2 v_j^2 k_j^2 - \frac{\hbar^2}{8 \pi^2} \Delta_j \right) + \frac{2}{c} \int_0^\infty e^2(v) dv,$$

e di un termine di perturbazione

$$(30) \quad g = c \sqrt{\frac{8 \pi}{\Omega}} \sum_j e_j (\mathbf{A}_j \cdot \gamma) \xi_j.$$

Perché il metodo delle perturbazioni dia dei risultati attendibili, sarebbe naturalmente necessario che la perturbazione fosse piccola in confronto della separazione degli autovalori del problema imperturbato. Ora si riconosce facilmente che questo non è il caso per il nostro problema, per modo che il metodo non può dare nel nostro caso nulla di più che qualche indicazione sopra il tipo di soluzione, da intendersi però con le debite riserve.

Ciò nonostante riporterò qui il risultato che si ottiene col metodo delle perturbazioni, poiché esso sembra indicare alcune particolarità della trattazione quantistica del problema delle masse elettromagnetiche essenzialmente diverse da quelle che si osservano nel caso classico.

Come soluzione di approssimazione zero dobbiamo prendere quella in cui tutte le componenti della radiazione hanno il numero quantico zero, poiché dobbiamo cercare una soluzione in cui non ci sia energia nel campo di radiazione (all'infuori, ben inteso, della energia di zero). Per questa soluzione particolare si ha evidentemente

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} = 0,$$

ciò che significa che, in approssimazione zero, è nulla la quantità di moto elettromagnetica. Naturalmente la soluzione è costituita da due funzioni, corrispondenti alle due componenti delle matrici di Pauli.

In approssimazione zero si può prendere eguale a zero la seconda di queste componenti: si ottiene così $\gamma_x = -1$. Per questo modo che, in approssimazione zero, l'energia risulta data, a meno della energia di zero (Nullpunktsenergie) e dell'energia elettrostatica $\frac{2}{c} \int_0^\infty e^2(v) dv$, da $c\Pi$, che coincide col valore dell'energia cinetica W che si ottiene dalla (27) quando, in approssimazione zero, si ponga in essa $M = 0$.

È facile vedere che la perturbazione di prima approssimazione dell'energia è nulla; essa è data infatti dal valor medio del termine di perturbazione g sopra l'autofunzione di approssimazione zero. Ora le autofunzioni dell'oscillatore di radiazione, avendo numero quantico zero, sono funzioni pari, per modo che per esse si ha $\bar{\xi}_j = 0$, da cui si deduce $\bar{g} = 0$. Occorre quindi, per ottenere il primo termine di correzione dell'energia non nullo, procedere alla seconda approssimazione. Il termine correttivo di seconda approssimazione dell'energia è dato, secondo le formule generali della teoria delle perturbazioni, tenendo conto che la perturbazione di prima approssimazione dell'energia è, per il nostro caso, nulla, da

$$W_2 = \sum_k \frac{|g_{0k}|^2}{E_0 - E_k}.$$

Il suo calcolo è un po' laborioso, ma non presenta difficoltà sostanziali dato che le autofunzioni e gli autovalori di approssimazione zero sono completamente conosciuti. Senza riportare il calcolo per disteso ne indichiamo il risultato:

$$(31) \quad W_2 = \frac{2\hbar}{c^2\Pi} \int_0^\infty e^2(v) v dv - \frac{2}{c} \int_0^\infty e^2(v) dv.$$

Aggiungendo l'energia (31) all'energia di approssimazione zero, data da

$$(32) \quad c\Pi + \frac{2}{c} \int_0^\infty e^2(v) dv + \text{energia di zero},$$

si trova l'espressione dell'energia come funzione della quantità di moto dell'elettrone, in seconda approssimazione. Essa risulta, omettendo la costante additiva inessenziale rappresentata dalla energia di zero della radiazione

$$(33) \quad W = c\Pi + \frac{2\hbar}{c^2\Pi} \int_0^\infty e^2(v) v dv.$$

Questa espressione deve essere confrontata con quella che si ottiene sviluppando in serie la (27) rispetto alle potenze di M , e fermandosi ai termini in M^2 . Cioè

$$(34) \quad c\Pi + \frac{M^2 c^3}{2\Pi}.$$

Dal confronto risulta

$$(35) \quad M^2 = \frac{4\hbar}{c^5} \int_0^\infty e^2(v) v dv.$$

Ossia

$$(36) \quad M = \sqrt{\frac{4\hbar}{c^5} \int_0^\infty e^2(v) v dv},$$

come espressione della massa elettromagnetica quantistica nella nostra approssimazione.

Da questi risultati, che, per le ragioni che abbiamo già esposto, debbono tuttavia venir considerati con certe riserve, sembrano dedursi le conclusioni seguenti.

a) La massa elettromagnetica nell'elettrodinamica quantistica non è direttamente dipendente, come nella elettrodinamica classica, dall'energia elettrostatica della distribuzione di carica elettrica che costituisce il corpuscolo. Tale energia elettrostatica anzi viene, in ultima analisi, a sparire dalle formule; essa è contenuta infatti nella energia di approssimazione zero data da (32) (secondo termine). Il secondo termine della correzione dell'energia (31) è però eguale e contrario all'energia elettrostatica; così nella somma (33) questa viene a sparire.

b) L'espressione (36) che abbiamo trovata per la massa elettromagnetica differisce sostanzialmente da quella classica per la presenza del fattore \hbar . Essa anzi si annullerebbe nel caso limite $\hbar = 0$.

Naturalmente queste conclusioni portano in sé tutta l'incertezza del metodo di approssimazione per mezzo del quale esse sono state dedotte; il quale del resto costituisce per il momento l'unico modo per cercar di formarsi una idea della soluzione. Conclusioni assai più sicure si potrebbero raggiungere quando riuscisse di risolvere esattamente il problema della ricerca degli autovalori della Hamiltoniana (26).

N° 67.

For the introduction to this paper see N° 50.

67.

QUANTUM THEORY OF RADIATION (*)

« *Rev. Mod. Phys.* », 4, 87–132 (1932).

INTRODUCTION.

Until a few years ago it had been impossible to construct a theory of radiation which could account satisfactorily both for interference phenomena and the phenomena of emission and absorption of light by matter. The first set of phenomena was interpreted by the wave theory, and the second set by the theory of light quanta. It was not until in 1927 that Dirac succeeded in constructing a quantum theory of radiation which could explain in an unified way both types of phenomena. In this article we shall develop the general formulas of Dirac's theory, and show its applications to several characteristic examples (Part I). In the second part of this work Dirac's relativistic wave equation of the electron will be discussed in relation to the theory of radiation. The third part will be devoted to the problems of the general quantum electrodynamics, and to the difficulties connected with it.

PART I. — DIRAC'S THEORY OF RADIATION

§ 1. — FUNDAMENTAL CONCEPT.

Dirac's theory of radiation is based on a very simple idea; instead of considering an atom and the radiation field with which it interacts as two distinct systems, he treats them as a single system whose energy is the sum of three terms: one representing the energy of the atom, a second representing the electromagnetic energy of the radiation field, and a small term representing the coupling energy of the atom and the radiation field.

If we neglect this last term, the atom and the field could not affect each other in any way; that is, no radiation energy could be either emitted or absorbed by the atom. A very simple example will explain these relations. Let us consider a pendulum which corresponds to the atom, and an oscillating string in the neighborhood of the pendulum which represents the radiation field. If there is no connection between the pendulum and the string, the two

(*) Lectures delivered at the Symposium for Theoretical Physics during the Summer Session of 1930 at the University of Michigan.

systems vibrate quite independently of each other; the energy is in this case simply the sum of the energy of the pendulum and the energy of the string with no interaction term. To obtain a mechanical representation of this term, let us tie the mass M of the pendulum to a point A of the string by means of a very thin and elastic thread a . The effect of this thread is to perturb slightly the motion of the string and of the pendulum. Let us suppose for instance that at the time $t = 0$, the string is in vibration and the pendulum is at rest. Through the elastic thread a the oscillating string transmits to the pendulum very slight forces having the same periods as the vibrations of the string. If these periods are different from the period of the pendulum, the amplitude of its vibrations remains always exceedingly small; but if a period of the string is equal to the period of the pendulum, there is resonance and the amplitude of vibration of the pendulum becomes considerable after a certain time. This process corresponds to the absorption of radiation by the atom.

If we suppose, on the contrary, that at the time $t = 0$ the pendulum is oscillating and the string is at rest, the inverse phenomenon occurs. The forces transmitted through the elastic thread from the pendulum to the string put the string in vibration; but only the harmonics of the string, whose frequencies are very near the frequency of the pendulum reach a considerable amplitude. This process corresponds to the emission of radiation by the atom.

§ 2. - ANALYTIC REPRESENTATION.

Returning to the case of the atom and the radiation field, the first problem which we have to solve is the finding of a convenient set of coordinates to represent the system. The position of the atom may be described by means of any system of general coordinates; if we assume that the atom contains only one electron, we may choose, for instance, its Cartesian coordinates (and eventually also the spin coordinate). The state of the radiation field could be determined by the values of the components of the electric and the magnetic vectors at any point of the space. We could also represent the field by means of a scalar and a vector potential. In this case we must give at any point of space the values of the scalar potential V and of the three components U_x, U_y, U_z of the vector potential. In this representation the field is described by a continuous infinity of variables, which is very difficult to handle; furthermore such representation is inconvenient because the energy of the field expressed in terms of the variables, contains them in a very mixed form, even if we neglect, in a first approximation, the action of the atom on the field.

For these reasons it is often more convenient to represent the field in the following way. Instead of considering the radiation in infinite space, let us consider the radiation enclosed in a cavity of finite volume Ω with perfectly reflecting walls. If afterwards we let the cavity become infinite in every direction, we shall get as a limit the properties of radiation in free space.

The electromagnetic vibrations in a cavity of finite volume, just as the vibrations of an elastic body of finite volume, may be represented by the superposition of a discreet infinity of fundamental vibrations each one corre-

sponding to a system of standing waves. The number of standing vibrations whose frequency lies between ν and $\nu + d\nu$ is given, for a very large volume Ω , by:

$$(1) \quad dN = \frac{8\pi}{c^3} \Omega \nu^2 d\nu$$

c being the velocity of light.

It is to be noticed that a radiation field only and not a general electromagnetic field may be represented through a superposition of standing vibrations. The general quantum electrodynamics deals with the quantum theoretical representation of a general electromagnetic field; we shall discuss this theory in Part III of this article. At present we shall limit ourselves to the simple radiation theory, that is, we shall consider quantum theoretically only that part of the electromagnetic field which is responsible for the phenomena of radiation. The radiation field may be then represented as a superposition of ordinary plane electromagnetic waves; whereas for instance the Coulomb forces need a more general representation.

The electromagnetic field of a plane standing wave has a vector potential of the form:

$$(2) \quad \mathbf{U} = \mathbf{A} u(t) \sin\left(\frac{2\pi\nu}{c} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X}) + \beta\right).$$

The sine factor gives us the amplitude dependence on position; \mathbf{X} is a vector with components x, y, z ; $\boldsymbol{\alpha}$ is a unit vector giving the direction of the standing wave; \mathbf{A} is a unit vector giving the direction of vibration of the electric force; since the wave is transversal, \mathbf{A} and $\boldsymbol{\alpha}$ are at right angles. The factor $u(t)$ which gives the dependence on the time, is generally a sine function of t . However, this is not always the case; if there is an atom which either emits or absorbs radiation, the amplitude of the standing vibration may increase or decrease.

Now we represent the radiation field as the superposition of standing waves of the type (2), with frequencies $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$. The number of frequencies lying between ν and $\nu + d\nu$ is given by (1). The directions $\boldsymbol{\alpha}_s$ and \mathbf{A}_s , of the standing waves and of polarization are distributed at random. We have also:

$$(3) \quad \mathbf{U} = \sum_s \mathbf{A}_s u_s(t) \sin \Gamma_s = \sum_s \mathbf{U}_s$$

where:

$$(4) \quad \Gamma_s = \frac{2\pi\nu}{c} (\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{X}) + \beta_s.$$

If there is neither emission nor absorption of radiation, the $u_s(t)$ are sine functions of the time; but in the general case, they may depend on t in any way. Now it is evident that if we know, at a given time t the values of all the u_s , the vector potential throughout the space Ω is determined for that instant since this is given by (3). We may therefore take the u_s as coordinates representing the radiation field at any moment.

§ 3. - ELECTROMAGNETIC ENERGY OF RADIATION FIELD.

We have now to express the electromagnetic energy of the radiation field in terms of the coordinates u_s . The electric and magnetic forces, derived from the potential \mathbf{U} , are:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \quad ; \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{U}.$$

From these equations we get, using (3) and (4),

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{E} = -\sum_s \frac{1}{c} \mathbf{A}_s \dot{u}_s \sin \Gamma_s \\ \mathbf{H} = \sum_s \frac{2\pi v_s}{c} (\boldsymbol{\alpha}_s \times \mathbf{A}_s) u_s \cos \Gamma_s. \end{cases}$$

The electromagnetic energy contained in the space Ω is:

$$W_e = \Omega \frac{\bar{\mathbf{E}}^2 + \bar{\mathbf{H}}^2}{8\pi}$$

where the barred expressions represent mean values. We must calculate the space average of \mathbf{E}^2 and \mathbf{H}^2 . It is evident that the mixed terms in the squares have the average zero. Remembering that $\overline{\sin^2 \Gamma_s} = \overline{\cos^2 \Gamma_s} = \frac{1}{2}$ and $(\boldsymbol{\alpha}_s \times \mathbf{A}_s)^2 = 1$, since \mathbf{A}_s and $\boldsymbol{\alpha}_s$ are perpendicular unit vectors, we find

$$\bar{\mathbf{E}}^2 = \frac{1}{2c^2} \sum_s \dot{u}_s^2 \quad ; \quad \bar{\mathbf{H}}^2 = \sum_s \frac{2\pi^2 v_s^2}{c^2} u_s^2.$$

Thus the electromagnetic energy is

$$(6) \quad W_e = \frac{\Omega}{8\pi c^2} \sum_s \left(\frac{1}{2} \dot{u}_s^2 + 2\pi^2 v_s^2 u_s^2 \right).$$

From this expression of the radiation energy we may easily obtain the equations which give the dependence of u_s on the time in Hamiltonian form. We introduce for this purpose a new variable v_s , canonically conjugated to u_s , by means of the usual rules

$$v_s = \frac{\partial W_e}{\partial \dot{u}_s} = \frac{\Omega}{8\pi c^2} \dot{u}_s.$$

The energy (6) becomes in the Hamiltonian form

$$(7) \quad W_e = \sum_s \left(\frac{8\pi c^2}{\Omega} \frac{v_s^2}{2} + \frac{\Omega}{8\pi c^2} 2\pi^2 v_s^2 u_s^2 \right).$$

From this Hamiltonian we get the canonical equations

$$(8) \quad \dot{u}_s = \frac{\partial W_e}{\partial v_s} = \frac{8\pi c^2}{\Omega} v_s \quad ; \quad \dot{v}_s = -\frac{\partial W_e}{\partial u_s} = -\frac{\Omega}{8\pi c^2} 4\pi^2 v_s^2 u_s.$$

If we eliminate v_s from these equations, we get

$$(9) \quad \ddot{u}_s + 4\pi^2 v_s^2 u_s = 0.$$

We find, as was to be expected, that u_s is a periodic function of the time with the frequency ν_s . We may also say that the canonical Eqs. (8) are equivalent to the Maxwell equations for the vacuum. It is convenient to avoid complicated factors in the Hamilton function (7) changing by constant factors the canonical variables u_s and v_s into two other conjugate variables q_s and p_s given by

$$(10) \quad u_s = \left(\frac{8 \pi c^2}{\Omega} \right)^{1/2} q_s \quad ; \quad v_s = \left(\frac{\Omega}{8 \pi c^2} \right)^{1/2} p_s.$$

The energy (7) takes now the form:

$$(11) \quad W_e = \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2 \pi^2 \nu_s^2 q_s^2 \right)$$

which is the same as the Hamiltonian of a system of many independent oscillators with mass 1 and frequencies $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$. The vector potential (3) in terms of the new variables q_s , takes the form:

$$(12) \quad \mathbf{U} = c \left(\frac{8 \pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s \mathbf{A}_s q_s \sin \Gamma_s.$$

§ 4. - HAMILTONIAN OF THE ATOM AND THE RADIATION FIELD.

We now must write the Hamiltonian for the atom which, added to (11), shall give us the Hamiltonian of the complex system of the atom and the radiation field.

The Hamiltonian function for an electron may be obtained to a first approximation from the ordinary relativistic Hamilton function for a point charge, that is:

$$(13) \quad o = -\frac{1}{2m} \left\{ \left(mc + \frac{W_a - eV}{c} \right)^2 - \left(\mathbf{p} - \frac{e\mathbf{U}}{c} \right)^2 \right\} + \frac{mc^2}{2}$$

by neglecting the terms in $1/c^2$. We shall see later (Part II) how it is possible to use also Dirac's relativistic Hamiltonian of the spinning electron in the radiation theory.

If we neglect the terms in $1/c^2$ we get from (13)

$$(14) \quad W_a = \frac{p^2}{2m} + eV - \frac{e}{mc} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{p}).$$

The Hamiltonian of the complex system of the atom and the radiation field is obtained adding (11) to (14) and putting in (14) the expression (12) instead of \mathbf{U} . We obtain in this way:

$$(15) \quad \begin{aligned} H = & \frac{1}{2m} p^2 + eV + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2 \pi^2 \nu_s^2 q_s^2 \right) \\ & - \frac{e}{m} \left(\frac{8 \pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}) q_s \sin \Gamma_s. \end{aligned}$$

The first and second term of (15) give us the Hamiltonian which describes the motion of the electron if we neglect the effect of the radiation on it. The

third term is the Hamiltonian (11) of the radiation field. The last term

$$(16) \quad \mathcal{H} = -\frac{e}{m} \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}) q_s \sin \Gamma_s$$

is the coupling term, since it contains both the coordinates of the radiation (q_s) and of the atom (\mathbf{p} and \mathbf{X} , contained in Γ_s).

In some cases, particularly for the theory of dispersion and of the Compton effect, it is necessary to write the Hamiltonian with a little closer approximation. In developing the term $(1/2m)(\mathbf{p} - e\mathbf{U}/c)^2$ of (13), we have neglected

$$(17) \quad e^2 \mathbf{U}^2 / 2mc^2.$$

If we keep this term, and introduce for \mathbf{U} the expression (12), we must add to the Hamiltonian (15) the term

$$(18) \quad \mathcal{H}^{(2)} = \frac{4\pi e^2}{\Omega m} \sum_{s\sigma} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{A}_\sigma) q_s q_\sigma \sin \Gamma_s \sin \Gamma_\sigma.$$

We shall see later the very peculiar connection of this term with the jumps from positive to negative mass which characterise Dirac's theory of the spinning electron.

§ 5. - CLASSICAL TREATMENT.

It is important to notice, that the results of the classical theory of emission of electromagnetic radiation and particularly Larmor's formula can be derived in a classical way from the Hamiltonian (15). This may be seen if we derive from (15) the canonical equations; for instance, if we consider the pair of variables q_s, p_s we get the equations:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s} = p_s \quad ; \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_s} = -4\pi^2 \nu_s^2 q_s + \frac{e}{m} \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}) \sin \Gamma_s.$$

If we eliminate p_s , we find for q_s :

$$(19) \quad \ddot{q}_s + 4\pi^2 \nu_s^2 q_s = \frac{e}{m} \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}) \sin \Gamma_s.$$

This is the equation for the forced vibrations of an oscillator of frequency ν_s . If we suppose for instance that at the time $t = 0$ there is no radiation in the field, i.e., that $q_s = \dot{p}_s = 0$; but that there is an electron moving with non-uniform motion, so that its momentum \mathbf{p} varies, we see from (19) that after a certain time q_s shall be different from zero; this means that there is a certain amount of energy in the s component of the radiation which has been emitted by the moving charge. The effect is of course bigger, if the motion of the charge is periodic with a period near to ν_s . It might actually be shown by this method that the amount of energy emitted per unit time by the moving charge is given, to a first approximation, by:

$$(20) \quad \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} A^2$$

where A is the acceleration of the particle, in accordance with Larmor's result.

This shows us, that the classical treatment of (15) gives us the same results as the ordinary theory of radiation; we must now apply to (15) the quantum mechanical methods.

§ 6. - PERTURBATION THEORY.

For this we write down some general formulas of the perturbation theory of wave mechanics which we shall use later. Let

$$(21) \quad H = H_0 + \mathcal{H}$$

be the Hamiltonian of a system with coordinates q and moments p . The Schrödinger equation is:

$$(22) \quad -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = (H_0 + \mathcal{H})\psi$$

where H is an operator obtained from H with the substitution of $(\hbar/2\pi i)(\partial/\partial q)$ in place of p .

We consider now the unperturbed problem corresponding to the Hamiltonian H_0 . The Schrödinger equation corresponding to it is:

$$(23) \quad -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_0 \Psi.$$

Let

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \dots$$

be the normalized eigenfunctions of the unperturbed problem and

$$E_1, E_2, \dots, E_n \dots$$

be the corresponding eigenvalues. The most general solution of (23) is then:

$$(24) \quad \Psi = \sum_n a_n \varphi_n(q) e^{-2\pi i E_n t / \hbar}$$

where the a_n are constants. The physical meaning of the a_n is contained in the statement that

$$(25) \quad |a_n|^2$$

is proportional to the probability of finding the system in the n th quantum state. We may also normalize the a_n in such a way that

$$\sum_n |a_n|^2 = 1.$$

Then $|a_n|^2$ gives us directly the probability that the system is in the n th quantum state; a_n is called the amplitude of probability for the n th quantum state. The solution ψ of the perturbed problem (22) can be developed in a series of eigenfunctions of the unperturbed problem; it can therefore be written in the form (24); only the a 's are no longer constants, but are functions of

the time t . Substituting (24) in (22), we find for the a 's the differential equations:

$$(26) \quad \dot{a}_n = -\frac{2\pi i}{h} \sum_m \mathcal{H}_{nm} a_m e^{2\pi i(\mathbb{E}_n - \mathbb{E}_m)t/h}$$

where:

$$(27) \quad \mathcal{H}_{nm} = \int \bar{\varphi}_n \mathcal{H} \varphi_m dq$$

is the element n, m of the perturbation matrix, representing the perturbation energy \mathcal{H} ; $\bar{\varphi}_n$ is the conjugate complex to φ_n . From (25) we see that the a 's vary with time, so that also the probability of the different quantum states, which is given by (25) changes with time. This means that the effect of the perturbation is to induce transition probabilities among the quantum states of the unperturbed system.

§ 7. - QUANTUM MECHANICAL TREATMENT.

We must now apply these methods to the Hamiltonian (15) of an atom and the radiation field. As the unperturbed Hamiltonian, we take:

$$(28) \quad H_0 = \frac{1}{2m} p^2 + eV + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2 \right).$$

The interaction energy (16) is considered as the perturbation energy.

The Hamiltonian H_0 of the unperturbed system is the sum of the terms

$$(29) \quad \frac{1}{2m} p^2 + eV$$

representing the energy of the atom, and terms like:

$$(30) \quad \frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2$$

representing the energy of the s th component of the radiation which is identical with the energy of an oscillator of the same frequency ν_s .

Let

$$u_n, u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_s}, \dots$$

be the Schrödinger functions for the atom (with Hamiltonian (29)) and for each component of radiation (with Hamiltonian (30)). For simplicity of writing we distinguish all these functions only by the index. The Schrödinger function corresponding to the unperturbed Hamiltonian H_0 is then given by the product

$$(31) \quad \varphi_{n, n_1, n_2, \dots, n_s, \dots} = u_n u_{n_1} u_{n_2} \dots u_{n_s} \dots$$

The corresponding eigenvalue is the sum:

$$(32) \quad E_{n, n_1, n_2, \dots, n_s, \dots} = E_n + E_{n_1} + \dots + E_{n_s} + \dots$$

Since the Hamiltonians (30) are of the oscillator type we have, as for the oscillator

$$E_{n_s} = h\nu_s \left(n_s + \frac{1}{2} \right).$$

We may also neglect the constant energy $h\nu_s/2$, which does not affect the phenomena, since the frequencies ν_s are constant, and only differences of energy are considered, and write simply

$$(33) \quad E_{n_s} = h\nu_s n_s.$$

Formula (32) now takes the form

$$(34) \quad E_{n_1, n_2, \dots, n_s, \dots} = E_n + h\nu_1 n_1 + h\nu_2 n_2 + \dots$$

The general form of the field scalar, corresponding to (24) is then:

$$(35) \quad \begin{aligned} &\psi(\mathbf{X}, q_1, q_2, \dots, q_s, \dots) \\ &= \sum a_{n_1, \dots, n_s, \dots} u_{n_1} \dots u_{n_s} \dots e^{-2\pi i (E_n + h\nu_1 n_1 + h\nu_2 n_2 + \dots) t / \hbar}. \end{aligned}$$

The physical meaning of the a 's, according to (25), is the following:

$$|a_{n_1, n_2, \dots, n_s, \dots}|^2$$

is the probability that the atom is in the quantum state n ; the first component of radiation in the state n_1 ; the second in the state n_2 . If we have for instance $a_{300\dots0\dots} = 1$ and all the other a 's are $= 0$, we may say that it is certain that the atom is in the third quantum state, and no component of radiation is excited.

If we neglect the effect of the perturbation term \mathcal{H} , the a 's are constant; the effect of the interaction term \mathcal{H} is, according to the general formula (26), that the a 's vary with the time. If we have, for instance, at the time $t = 0$, $a_{300\dots0\dots} = 1$ and all the other a 's equal to zero, after a certain time t , some of the a 's which were $= 0$, say $a_{2,1,0\dots0\dots}$ may have a value different from zero. There is therefore a finite probability of finding that, at the time t the atom is in the state 2, having jumped down from state 3 to state 2 and that the first component of the radiation is excited. This is the quantum theoretical mechanism of the radiation of energy.

We have now to write for our case the equations corresponding to (26) to find how the a 's vary with time. For this we must find the expression of the matrix element of the perturbation \mathcal{H} , corresponding to a transition of the whole system from a quantum state n, n_1, n_2, \dots to another m, m_1, m_2, \dots . This is given, according to (27) (31), since the u 's are real, by:

$$(37) \quad \begin{aligned} &\mathcal{H}_{m_1, \dots, n_s, \dots; m m_1, \dots, m_s, \dots} \\ &= \iint \dots \int \dots u_n u_{n_1} \dots u_{n_s} \dots \mathcal{H} u_m u_{m_1} \dots u_{m_s} \dots d\mathbf{X} dq_1 \dots dq_s \dots \end{aligned}$$

where we must put for \mathcal{H} the operator (16).

The integral (37) may be very easily calculated taking into account the following relations

$$(38) \quad \int u_{n_a} u_{m_a} dq_a = \delta_{n_a m_a}$$

which expresses the orthogonality of the u 's;

$$(39) \quad \int q_s u_{n_s} u_{m_s} dq_s = \begin{cases} 0 & \text{if } m_s \neq n_s \pm 1 \\ \left[\frac{\hbar (n_s + 1)}{8 \pi^2 \nu_s} \right]^{1/2} & \text{if } m_s = n_s + 1 \\ \left[\frac{\hbar n_s}{8 \pi^2 \nu_s} \right]^{1/2} & \text{if } m_s = n_s - 1. \end{cases}$$

These equations may be easily verified, since the u_s are the well known eigenfunctions of a harmonic oscillator with mass 1 and frequency ν_s ; (39) are the elements of the matrix representing the coordinate q_s for this oscillator. We must remember further that the operator \mathbf{p} , with components p_x, p_y, p_z , means $(\hbar/2 \pi i)$ grad; we put then

$$(40) \quad \begin{cases} \mathbf{P}_{snm} = \int u_n \sin \Gamma_s \mathbf{p} u_m dx dy dz \\ = (\hbar/2 \pi i) \int \sin \Gamma_s u_n \text{grad } u_m dx dy dz. \end{cases}$$

We find now easily that the matrix element (37) is always = 0 if more than one of the indices $m_1, m_2, \dots, m_s, \dots$ of the radiation components is different from the corresponding $n_1, n_2, \dots, n_s, \dots$. If only one of the $m_1, m_2, \dots, m_s, \dots$, say m_s , differs from the corresponding n_s , the result, according to (39) is different from zero only if $m_s = n_s \pm 1$. In this case we have:

$$(41) \quad \mathcal{H}_{m_1 \dots n_s \dots; m_1 \dots n_s \pm 1 \dots} = -\frac{e}{m} \left(\frac{\hbar}{\pi \Omega \nu_s} \right)^{1/2} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{P}_{snm}) \left[\frac{(n_s + 1)^{1/2}}{n_s^{1/2}} \right]$$

where we must use the upper expression $(n_s + 1)^{1/2}$ if $m_s = n_s + 1$ and the lower $n_s^{1/2}$ if $m_s = n_s - 1$. Very important is the particular case that the dimensions of the atom are very small compared with the wave-length, so that the Γ_s , i.e., the phases of the radiation components may be considered as constants over all the space where the eigenfunctions of the electron are practically different from zero. In this case we may take $\sin \Gamma_s$ out of the integral in (40) and we get:

$$\mathbf{P}_{snm} = \frac{\hbar}{2 \pi i} \sin \Gamma_s \int u_n \text{grad } u_m dx dy dz.$$

Remembering that:

$$\frac{\hbar}{2 \pi i} \int u_n \text{grad } u_m d\tau$$

represents the momentum of the electron, it can be immediately proved that:

$$(42) \quad \frac{\hbar}{2 \pi i} \int u_n \text{grad } u_m d\tau = -2 \pi i m \nu_{mn} \mathbf{X}_{nm}$$

where:

$$(43) \quad \nu_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$$

is the frequency corresponding to the jump from state m to state n ;

$$(44) \quad \mathbf{X}_{mn} = \mathbf{X}_{nm} = \int \mathbf{X} u_n u_m d\tau$$

is the element mn of the matrix representing the radius vector \mathbf{X} (observe that the letter m is used in (42) both as index and as the mass of the electron; but since no confusion is possible we prefer not to introduce a new symbol). We obtain now:

$$(45) \quad \mathbf{P}_{nm} = -2\pi i m v_{mn} \mathbf{X}_{nm} \sin \Gamma_s;$$

(41) becomes then:

$$(46) \quad \mathcal{H}_{m_1 \dots n_s \dots; m_1 \dots n_s \pm 1 \dots} = 2\pi i e \left(\frac{\hbar}{\pi \Omega} \right)^{1/2} \frac{v_{mn}}{v_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}_{nm}) \left[\frac{(n_s + 1)^{1/2}}{n_s^{1/2}} \right] \sin \Gamma_s.$$

Now we may write at once the equations analogous to (26) for the variations of the a 's as functions of the time. We get:

$$(47) \quad \dot{a}_{m_1 \dots n_s \dots} = -\frac{2\pi i}{\hbar} \sum_{m_1 \dots m_s \dots} a_{m_1 \dots m_s \dots} \mathcal{H}_{m_1 \dots; m_1 \dots} e^{-2\pi i (E_{m_1} \dots - E_{n_1} \dots) t / \hbar}.$$

Remembering (46) (43) (34) we get with a few reductions

$$(48) \quad \dot{a}_{m_1 \dots n_s \dots} = \frac{4\pi^{3/2} e}{(\hbar \Omega)^{1/2}} \sum_{m, s} \frac{v_{mn}}{v_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}_{nm}) \sin \Gamma_s [a_{m_1 \dots n_s + 1 \dots} (n_s + 1)^{1/2} e^{-2\pi i (v_{mn} + v_s) t} + a_{m_1 \dots n_s - 1 \dots} n_s^{1/2} e^{-2\pi i (v_{mn} - v_s) t}].$$

This is the fundamental equation of the radiation theory. In the applications we shall encounter equations which differ from (48) either because of the use of a higher degree of approximation, or because systems containing more than one electron are considered. When these cases come up we shall show the necessary modifications of the Eq. (48).

We shall now discuss some applications of the general theory that we have developed, with the chief purpose of showing that this theory may actually be considered as a satisfactory theory of radiation phenomena. For this we shall work out the following examples:

1. Emission from an excited atom and mean life.
2. Propagation of light in vacuum.
3. A case of interference: the Lippmann fringes.
4. The Doppler effect.
5. The Compton effect.

For applications to other problems see the bibliography.

§ 8. - EMISSION FROM AN EXCITED ATOM.

Let us consider an atom which at the time $t = 0$ is in an excited state; let us suppose that there is no radiant energy in the space surrounding it. We may consider, for the sake of simplicity only two states of the atom, numbered 1 and 2, and suppose that the atom at $t = 0$ is in the state 2. All this may be expressed by saying that for $t = 0$

$$(49) \quad a_{200 \dots 0 \dots} = 1$$

and all the other a 's are $= 0$. We know from experience that after a certain time the atom must go over to the state 1 of less energy and the energy difference must be found in the radiation field.

We will now show how it is possible to study this process with the fundamental Eq. (48).

We put

$$v_{21} = -v_{12} = \nu \quad ; \quad \mathbf{X}_{12} = \mathbf{X}_{21} = \mathbf{X}.$$

Eqs. (48) give then:

$$(50) \quad \dot{a}_{1,0\dots i_s\dots} = \frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega\hbar)^{1/2}} \frac{\nu}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}) \sin \Gamma_s a_{2,0\dots 0\dots} e^{-2\pi i(\nu-\nu_s)t}$$

$$(51) \quad \dot{a}_{2,0\dots 0\dots} = \frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega\hbar)^{1/2}} \sum_s \frac{\nu}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}) \sin \Gamma_s a_{1,0\dots i_s\dots} e^{-2\pi i(\nu_s-\nu)t}.$$

We try to solve these equations by

$$(52) \quad a_{2,0\dots 0\dots} = e^{-\gamma t}$$

where γ is a constant which must be determined.

We substitute (52) in (50) and then integrate with respect to t , determining the integration constant by the initial conditions $a_{1,0\dots i_s\dots} = 0$; we find:

$$(53) \quad a_{1,0\dots i_s\dots} = \frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega\hbar)^{1/2}} \frac{\nu}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}) \sin \Gamma_s \frac{e^{\{-2\pi i(\nu-\nu_s)-\gamma\}t} - 1}{-2\pi i(\nu-\nu_s) - \gamma}.$$

We substitute (52) and (53) in (51) and multiply by $-e^{\gamma t}$ and find:

$$\gamma = \frac{16\pi^3 e^2}{\Omega\hbar} \sum_s \frac{\nu^2}{\nu_s} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})^2 \sin^2 \Gamma_s \frac{1 - e^{\{\gamma - 2\pi i(\nu_s - \nu)\}t}}{-2\pi i(\nu - \nu_s) - \gamma}.$$

The sum may be calculated by the following method: since the phase, direction and polarization of the different radiation components are distributed at random, we may substitute for $(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})^2 \sin^2 \Gamma_s$ its mean value, taken over all phases, directions and polarizations; we replace then the sum by an integral over ν_s , multiplying by the factor:

$$(54) \quad \frac{8\pi}{c^3} \Omega \nu_s^2 d\nu_s,$$

which gives, according to (1) the number of radiation components with frequency between ν_s and $\nu_s + d\nu_s$. We get then, observing

$$\overline{(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})^2} = \frac{1}{3} X^2 \quad ; \quad \overline{\sin^2 \Gamma_s} = \frac{1}{2}$$

that

$$\gamma = \frac{64\pi^4 e^2}{3\hbar c^3} \nu^2 X^2 \int_0^\infty \frac{1 - e^{\{\gamma - 2\pi i(\nu_s - \nu)\}t}}{-2\pi i(\nu - \nu_s) - \gamma} \nu_s d\nu_s.$$

It may be proved that for small γ this integral has the value $\nu/2$; we obtain thus:

$$(55) \quad \gamma = \frac{32\pi^2 e^2}{3\hbar c^3} \nu^3 X^2$$

which determines the constant γ . The relation of this constant with the mean life of the state 2 is easily found: the probability of finding the atom in the

state 2 as shown by (52) is:

$$|a_{2,0\dots 0\dots}|^2 = e^{-2\gamma t}.$$

By definition of the mean life τ , this probability must be $e^{-t/\tau}$; we get then by comparison

$$(56) \quad \tau = \frac{1}{2\gamma} = \frac{3\hbar c^3}{64\pi^4 e^2 v^3 X^2}.$$

We may also deduce from this theory the form and the width of the emitted spectral line. For this purpose we observe that, after the emission has taken place, i.e., after a time t long with respect to the mean life, the exponential $e\{-2\pi i(\nu - \nu_s) - \gamma\}t$ becomes negligible; then we get from (53):

$$(57) \quad a_{100\dots 1_s\dots} = \frac{4\pi^{3/2} e}{(\Omega\hbar)^{1/2}} \frac{\nu}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}) \sin \Gamma_s \frac{1}{2\pi i(\nu_s - \nu) + \gamma}.$$

The probability that the emitted quantum belongs to the s component is therefore:

$$(58) \quad |a_{100\dots 1_s\dots}|^2 = \frac{16\pi^3 e^2}{\Omega\hbar} \frac{\nu^2}{\nu_s} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})^2 \sin^2 \Gamma_s \frac{1}{\gamma^2 + 4\pi^2(\nu_s - \nu)^2}.$$

The last factor

$$(59) \quad \frac{1}{\gamma^2 + 4\pi^2(\nu_s - \nu)^2}$$

represents the form of the emitted line; it is identical with the form which may be deduced in the classical theory for exponentially damped oscillators.

§ 9. - PROPAGATION OF LIGHT IN VACUUM.

This section and the next one will be devoted to the proof that the results of ordinary wave theory can be applied to the computation of the intensity of light both for the propagation in vacuum and for cases of interference.

This has been proved for a general case by Racah and more recently by a very general and direct method by Heisenberg, who does not use the Fourier analysis but calculates the amplitude of the field vectors directly.

We prefer however to show here by the use of two examples how the phase relations between the different components are effective in determining the propagation with finite velocity and the interference phenomena.

Let A and B be two atoms; let us suppose that at the time $t = 0$, A is in an excited and B in the normal state. After a certain time A emits its energy which may in turn be absorbed by the atom B which then becomes excited. Since the light needs a finite time to go from A to B, the excitation of B can take place only after the time r/c , r being the distance between the two atoms. We will show that all this may be deduced from the quantum theory of radiation. We simplify the problem by the assumption that the mean life of the first atom A is very short, in order that the light be emitted from A at a very definite time; we suppose further that the mean life of B

is very long. The result is that the line emitted from the atom A is very broad and might be considered as a portion of a continuous spectrum; on the contrary the atom B absorbs a very sharp line. We must first modify slightly the fundamental Eqs. (48), for the case of two atoms in the radiation field. We use indices and magnitudes without dash for the first atom A, and dashed letters for the atom B.

$$|a_{nm' n_1 \dots n_s \dots}|^2$$

is the probability that A is in the state n , B in the state n' , and the radiation components in the states $n_1 \dots n_s \dots$; the equations analogous to (48) for the case of two atoms, may be obtained by the same considerations as Eqs. (48). The right hand side will now consist of two terms, each one analogous to the right hand member of (48) and each one referring to one of the atoms. We get precisely:

$$(60) \quad \dot{a}_{nm' n_1 \dots n_s \dots} = \frac{4 \pi^{3/2} e}{(\Omega \hbar)^{1/2}} \sum_{ms} \frac{v_{mn}}{v_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}_{nm}) \sin \Gamma_s \{ a_{nm' n_1 \dots n_s + 1 \dots} (n_s + 1)^{1/2} e^{-2 \pi i (v_{mn} + v_s) t} \\ + a_{nm' n_1 \dots n_s - 1 \dots} n_s^{1/2} e^{-2 \pi i (v_{mn} - v_s) t} \} \\ + \frac{4 \pi^{3/2} e}{(\Omega \hbar)^{1/2}} \sum_{m's'} \frac{v_{m'n'}}{v_s'^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}'_{m'n'}) \sin \Gamma'_s \{ a_{nm' n_1 \dots n_s + 1 \dots} (n_s + 1)^{1/2} e^{-2 \pi i (v_{m'n'} + v_s) t} \\ + a_{nm' n_1 \dots n_s - 1 \dots} n_s'^{1/2} e^{-2 \pi i (v_{m'n'} - v_s) t} \}$$

Γ_s and Γ'_s are the phases of the s th standing vibrations at the places of the first and second atom. We may suppose that the atom A is at the origin of the coordinates, and the atom B is on the x -axis at a distance r from the origin. We have then from (4):

$$(61) \quad \Gamma'_s = \Gamma_s + \frac{2 \pi v_s}{c} r \cos \theta_s$$

θ_s being the angle between the x -axis and the direction of the s th radiation component.

As before we consider for each atom only two states, 1 and 2, and we put

$$v_{21} = -v_{12} = \nu \quad ; \quad v'_{21} = -v'_{12} = \nu' \\ \mathbf{X}_{21} = \mathbf{X}_{12} = \mathbf{X} \quad ; \quad \mathbf{X}'_{21} = \mathbf{X}'_{12} = \mathbf{X}'.$$

For simplicity we admit further that both vectors \mathbf{X} and \mathbf{X}' reduce to the only y -component. At the time $t = 0$, the first atom is excited in the state 2, and the second atom is in the normal state 1; further there is no radiation in the field; we have thus:

$$a_{210 \dots 0 \dots} = 1$$

while all the other a 's are 0 for $t = 0$. We must find what is the probability that, at the time t , the first atom has lost its energy and that this energy has been absorbed by the second atom; this probability is given by:

$$|a_{120 \dots 0 \dots}|^2.$$

We have shown in the preceding section that after a time long with respect to the mean life, the energy of the excited atom A is transferred to the radiation field according to (57). This formula can be applied also in our case, if we neglect the very small perturbation due to the presence of the atom B. We may write:

$$(62) \quad a_{1100\dots1_s\dots} = \frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega\hbar)^{1/2}} \frac{\nu}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}) \sin \Gamma_s \frac{1}{-2\pi i(\nu_s - \nu) + \gamma}$$

We put now in (60): $n = 1$, $n' = 2$, $n_1 = n_2 = \dots = n_s = \dots = 0$ and we get:

$$\dot{a}_{120\dots0\dots} = -\frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega\hbar)^{1/2}} \sum_s \frac{\nu'}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}') \sin \Gamma'_s a_{110\dots1_s\dots} e^{-2\pi i(-\nu' + \nu_s)t}$$

since the other terms are zero. Substituting (62) in this equation we obtain.

$$\dot{a}_{120\dots0\dots} = -\frac{16\pi^3 e^2}{\Omega\hbar} \nu\nu' \sum_s \frac{(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}') \sin \Gamma_s \sin \Gamma'_s}{\nu_s [2\pi i(\nu - \nu_s) + \gamma]} e^{-2\pi i(\nu_s - \nu')t}$$

We integrate with respect to t and remember that for $t = 0$, $a_{120\dots0\dots} = 0$: We obtain thus:

$$(63) \quad a_{120\dots0\dots} = \frac{16\pi^3 e^2}{\Omega\hbar} \nu\nu' \sum_s \frac{(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}') \sin \Gamma_s \sin \Gamma'_s}{\nu_s [2\pi i(\nu - \nu_s) + \gamma]} \frac{1 - e^{-2\pi i(\nu_s - \nu')t}}{2\pi i(\nu_s - \nu')}$$

To evaluate the sum over s we must transform it to an integral. For this we first substitute in the usual way the mean value for the expression $(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}') \sin \Gamma_s \sin \Gamma'_s$. Remembering (61), the fact that \mathbf{A}_s and α_s are perpendicular unit vectors, and that \mathbf{X} and \mathbf{X}' reduce to the only y -component, we find with some calculation:

$$(64) \quad \overline{(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}') \sin \Gamma_s \sin \Gamma'_s} \\ = \frac{XX'}{4} \left[\frac{c}{2\pi\nu_s r} \sin \frac{2\pi\nu_s r}{c} + \left(\frac{c}{2\pi\nu_s r} \right)^2 \cos \frac{2\pi\nu_s r}{c} - \left(\frac{c}{2\pi\nu_s r} \right)^3 \sin^2 \frac{2\pi\nu_s r}{c} \right]$$

The average is taken over all values of the phase, the direction and polarization. We suppose now that the distance r of the two atoms is very large compared with the wave-length; we may then neglect the square and the cube of the very small expression $c/2\pi\nu_s r$, and we write:

$$(65) \quad \overline{(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}') \sin \Gamma_s \sin \Gamma'_s} = \frac{cXX'}{8\pi\nu_s r} \sin \frac{2\pi\nu_s r}{c}$$

To calculate the sum (63) we must now substitute this average value, multiply by (54) and change the sum to an integral over ν_s . We get thus:

$$(66) \quad a_{120\dots0\dots} = -\frac{1}{r} \frac{16\pi^3 e^2}{c^2 \hbar} \nu X \nu' X' \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi\nu_s r/c) (1 + e^{-2\pi i(\nu_s - \nu')t})}{[2\pi i(\nu - \nu_s) + \gamma] 2\pi i(\nu_s - \nu')} d\nu_s$$

The integration can be effected by observing that because of the factor $(\nu_s - \nu')$ in the denominator the values of the integrand are concentrated in the neighbourhood of the value ν' for the variable ν_s . Since we have supposed that the mean life of the first atom is very short, the factor

$[2\pi i(\nu_s - \nu) + \gamma]^{-1}$ varies very regularly (that is the line excited by the first atom is so wide that it can be considered as a piece of continuous spectrum). We may therefore take this factor out of the integral putting into it $\nu_s = \nu'$. We may also extend the integration from $-\infty$ to $+\infty$, since, for the same reason, the terms that we add are negligible. At last we take $\xi = \nu_s - \nu'$ as a new variable. We find then:

$$(67) \quad a_{120\dots 0\dots} = -\frac{1}{r} \frac{16\pi^3 e^2}{c^2 \hbar} \frac{\nu X \nu' X'}{2\pi i(\nu - \nu') + \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi r/c)(\nu' + \xi)(1 - e^{-2\pi i t \xi})}{2\pi i \xi} d\xi.$$

The integral may be written:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin(2\pi r\nu'/c) \cos(2\pi r\xi/c) + \cos(2\pi r\nu'/c) \sin(2\pi r\xi/c)) (1 - \cos 2\pi t\xi + i \sin 2\pi t\xi)}{2\pi i \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sin \frac{2\pi r\nu'}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \cos \frac{2\pi r}{c} \xi (1 - \cos 2\pi t\xi) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \cos \frac{2\pi r\nu'}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \sin \frac{2\pi r}{c} \xi \sin 2\pi t\xi \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \cos \frac{2\pi r\nu'}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{2\pi r}{c} \xi (1 - \cos 2\pi t\xi) \frac{d\xi}{\xi} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi r\nu'}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{2\pi r}{c} \xi \sin 2\pi t\xi \frac{d\xi}{\xi}. \end{aligned}$$

The two first integrals are evidently zero, since the integrated functions are odd. The other integrals can be calculated at once by the integral formulas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin qx}{x} dx = \pi \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin qx \cos px}{x} dx = \begin{cases} \pi & \text{for } q > p \\ 0 & \text{for } q < p. \end{cases}$$

We find that the integral in (67) is given by:

$$\begin{cases} 0 & \text{for } r/c > t \\ (1/2i) e^{2\pi i r \nu' / c} & \text{for } t > r/c. \end{cases}$$

Substituting in (67) we find:

$$(68) \quad a_{120\dots 0\dots} = \begin{cases} 0 & \text{for } t < r/c \\ \frac{1}{r} \frac{8\pi^3 i e^2}{c^2 \hbar} \frac{\nu X \nu' X'}{2\pi i(\nu - \nu') + \gamma} e^{2\pi i r \nu' / c} & \text{for } t > r/c. \end{cases}$$

The square modulus of $a_{120\dots}$ measures the probability of finding the second atom excited. This probability is therefore zero if $t < r/c$, i.e., until the time necessary for the light emitted by the first atom to reach the second.

After that time the probability that the second atom is excited, is:

$$|a_{120\dots 0\dots}|^2 = \frac{1}{r^2} \left[\frac{16 \pi^3 e^2}{c^2 \hbar} v \mathbf{X} v' \mathbf{X}' \right]^2 \frac{1}{4 \pi^2 (v' - v) + \gamma^2}.$$

We notice that this probability is inversely proportional to the square of the distance r ; we conclude therefore that the theory gives correctly the velocity of propagation of light and the decrease of intensity with the distance from the source of light.

§ 10. - THEORY OF THE LIPPMANN FRINGES.

The Lippmann fringes are produced as light is reflected from a mirror perpendicular to the direction of propagation. They consist in the system of standing waves formed by the incident and the reflected waves. We will show now, how this phenomenon may be explained by the quantum theory of radiation.

We must consider a plane mirror S and two atoms, a first atom A which emits the light and a second atom B which absorbs it. We suppose that the atom A (light source) is very far from the mirror, so that the waves reaching the mirror are very nearly plane waves. On the contrary we suppose the atom B not very far from the mirror, and we will show that the probability of excitation of B depends periodically on its distance from the mirror exactly as is to be expected in the classical theory from the position of the maxima and minima of the standing waves.

We simplify the calculations by supposing that the straight line AB (which we take as x -axis) is perpendicular to the mirror. As origin of coordinates we take the intersection of this line with the mirror; the coordinates of the atom A are $x, 0, 0$, and those of B are $x', 0, 0$. Then $x \gg x'$. We suppose further as in the preceding chapter, that the mean life of A is very short and that of B is very long; and that the vectors \mathbf{X} and \mathbf{X}' which determine the transition probability from the state 2 to state 1 for both atoms reduce to the only y -component.

We have always considered the radiation contained in a volume Ω ; in our case it is convenient to take the mirror S as one of the walls limiting the space Ω . As Ω becomes infinite the wall S remains fixed and all the other walls are taken to infinite distance.

Every standing vibration constituting the radiation field must have S as a nodal plane. Its y -component must have therefore the form:

$$(70) \quad B_s = \frac{Y_s}{2^{1/2}} \left\{ \sin \left[\frac{2 \pi \nu_s}{c_s} (\alpha_{sx} x + \alpha_{sy} y + \alpha_{sz} z) + \beta_s \right] \right. \\ \left. - \sin \left[\frac{2 \pi \nu_s}{c_s} (-\alpha_{sx} x + \alpha_{sy} y + \alpha_{sz} z) + \beta_s \right] \right\}$$

where $1/2^{1/2}$ is a normalization factor; Y_s is the y -component of the unit vector \mathbf{A}_s .

By exactly the same method that we used for the deduction of (63) we find now a very similar equation, obtained by substituting in (63) for $\mathbf{A}_s \sin \Gamma_s$ and $\mathbf{A}_s \sin \Gamma'_s$ the values B_s and B'_s which are obtained by putting into (70) the coordinates $x, 0, 0$ and $x', 0, 0$, of the atoms A and B. This formula is:

$$a_{120 \dots 0 \dots} = \frac{16 \pi^3 e^2}{\Omega \hbar} \nu \nu' \sum_s \frac{B_s X B'_s X'}{\nu_s} \frac{1}{-2 \pi i (\nu_s - \nu) + \gamma} \frac{1 - e^{-2 \pi i (\nu_s - \nu') t}}{-2 \pi i (\nu_s - \nu')}.$$

The sum over s may be effected, as in the preceding chapter by taking first the mean value of $B_s B'_s$ over all the phases and orientations of the radiation components. We find thus the following formula corresponding to (65):

$$(72) \quad \overline{B_s B'_s} = \frac{c}{8 \pi \nu_s (x - x')} \sin \frac{2 \pi \nu_s (x - x')}{c} - \frac{c}{8 \pi \nu_s (x + x')} \sin \frac{2 \pi \nu_s (x + x')}{c}.$$

We substitute this expression in (71), multiply by

$$(8 \pi / c^3) \Omega \nu_s^2 d\nu_s$$

and integrate over ν_s . We find thus:

$$(73) \quad a_{120 \dots 0 \dots} = R^- - R^+$$

where R^- and R^+ represent two terms equal to the right hand side of (68) where in place of r respectively $x - x'$ and $x + x'$ has been substituted; we get:

$$(74) \quad R^- = \begin{cases} 0 & \text{for } t < \frac{x - x'}{c} \\ \frac{1}{x - x'} \frac{8 i \pi^3 e^2}{c^2 \hbar} \frac{\nu X \nu' X'}{-2 \pi i (\nu' - \nu) + \gamma} e^{2 \pi i \nu' (x - x')/c} & \text{for } t > \frac{x - x'}{c} \end{cases}$$

$$R^+ = \begin{cases} 0 & \text{for } t < \frac{x + x'}{c} \\ \frac{1}{x + x'} \frac{8 i \pi^3 e^2}{c^2 \hbar} \frac{\nu X \nu' X'}{-2 \pi i (\nu' - \nu) + \gamma} e^{2 \pi i \nu' (x + x')/c} & \text{for } t > \frac{x + x'}{c} \end{cases}.$$

The two terms R^- and R^+ clearly represent the effect of the incident and the reflected wave. Let us now consider a time $t > (x + x')/c$. Then both for R^- and R^+ the second expressions are valid and we get from (73)

$$(75) \quad a_{120 \dots 0 \dots} = \frac{8 i \pi^3 e^2}{c^2 \hbar} \frac{\nu X \nu' X'}{-2 \pi i (\nu' - \nu) + \gamma} \left\{ \frac{1}{x - x'} e^{2 \pi i \nu' (x - x')/c} - \frac{1}{x + x'} e^{2 \pi i \nu' (x + x')/c} \right\}.$$

It is evident that this expression has a large value if the two exponential factors have the same phase. The condition of equal phase is:

$$\frac{2 \pi \nu'}{c} (x - x') = \frac{2 \pi \nu'}{c} (x + x') - 2 \pi n$$

where n is an integer. We get from this:

$$x' = \frac{n}{2} \frac{c}{\nu'} = n \frac{\lambda'}{2}$$

where $\lambda' = c/\nu'$ represents the wave-length corresponding to the frequency ν' . We see therefore that the places where the probability of excitation is small (dark fringes) are planes, parallel to the mirror and spaced by a half wave-length from each other; similarly we find that the places where the probability of excitation is strong (bright fringes) are the planes situated in the middle between two dark fringes. We may conclude that the results of the quantum theory of radiation describe this phenomenon in exactly the same way as the classical theory of interference.

§ 11. - THEORY OF THE DOPPLER EFFECT.

The change of frequency of the light emitted from a moving source is very simply explained by the wave theory of light. But it finds also a simple, through apparently very different, explanation in the light-quantum theory; it can be shown that the Doppler effect may be deduced from the conservation of energy and momentum in the emission process.

Let us consider an atom A with two energy levels w_1 and w_2 ; the frequency emitted by the atom when it is at rest is then

$$\nu = (w_2 - w_1)/h.$$

Let us now suppose that the atom is excited and that it moves with velocity V ; its total energy is then:

$$w_2 + \frac{1}{2} mV^2.$$

At a given instant the atom emits, on jumping down to the lower state, a quantum of frequency ν' ; the recoil of the emitted quantum produces a slight change of the velocity, which after the emission becomes V' ; the energy of the atom is then $w_1 + \frac{1}{2} mV'^2$. We get therefore from the conservation of energy

$$(76) \quad h\nu' = \left(w_2 + \frac{1}{2} mV^2\right) - \left(w_1 + \frac{1}{2} mV'^2\right) = h\nu + \frac{1}{2} m(V^2 - V'^2).$$

The conservation of momentum gives:

$$m\mathbf{V}' = m\mathbf{V} - \frac{h\nu'}{c}$$

where the bold face letters mean vectors. Taking the square we get:

$$m^2 V'^2 = m^2 V^2 + \frac{h^2 \nu'^2}{c^2} - 2 mV \frac{h\nu}{c} \cos \theta$$

θ being the angle between the velocity and the direction of emission. From this equation and (76) we get, neglecting terms in $1/c^2$:

$$(77) \quad \nu' = \nu \left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta\right)$$

which is the classic formula for the Doppler effect to a nonrelativistic approximation.

We will now work out the theory of the Doppler effect with Dirac's theory of radiation. We shall see that the interpretation of the Doppler effect in this theory is very similar to its interpretation in terms of light quanta; and it is due essentially to the changes in momentum due to the recoil of the emitted light. In all the examples which we have worked out till now, we have used the approximation (45), which is obtained by supposing that the portion of space where the electron moves is so small, that the phases Γ_s of the standing vibrations can be considered as constants in it. Now we shall see that this simplification can no longer be made if we wish our theory to represent also the impulse properties of light quanta. So that for the theory of the Doppler effect and the Compton effect it is necessary to consider that the phase Γ_s are actually variables.

We simplify the problem by considering the emitting atom as constituted by a proton (charge e , mass m_1 , coordinates $x_1, y_1, z_1 \equiv \mathbf{X}_1$) and an electron (charge $-e$, mass m_2 , coordinates $x_2, y_2, z_2 \equiv \mathbf{X}_2$). The Hamilton function for the system consisting of this atom and the radiation field is the obvious generalization of (15); it is:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + eV + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 v_s^2 q_s^2 \right) - \frac{e}{m_1} \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}_1) \sin \Gamma_{s1} \\ + \frac{e}{m_2} \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}_2) \sin \Gamma_{s2}.$$

We take now as new coordinates: the coordinates

$$\xi = \frac{m_1 \mathbf{X}_1 + m_2 \mathbf{X}_2}{m_1 + m_2}$$

of the center of gravity, and the relative coordinates of the two particles:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2.$$

The momenta conjugated to ξ and \mathbf{X} are:

$$\boldsymbol{\eta} = M\dot{\xi} \quad \text{and} \quad \mathbf{p} = m \left(\frac{\mathbf{p}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{m_2} \right)$$

where $M = m_1 + m_2$ is the total mass of the atom and $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ is the relative mass.

We make the assumption that the dimensions of the atom are very small compared with the wave-length. We may then substitute for Γ_{s1} and Γ_{s2} the value:

$$(78) \quad \Gamma_s = \frac{2\pi v_s}{c} (\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \boldsymbol{\xi}) + \beta_s$$

of the phase in the center of gravity. The Hamiltonian of the system becomes then:

$$(79) \quad H = \frac{\eta^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} + eV(\mathbf{X}) + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 v_s^2 q_s^2 \right) \\ - \frac{e}{m} \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}) \sin \Gamma_s.$$

We consider now the last term

$$(80) \quad \mathcal{H} = -\frac{e}{m} \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}) \sin \Gamma_s$$

as the perturbation. The unperturbed Hamiltonian is:

$$(81) \quad H_0 = \frac{\eta^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} + eV(\mathbf{X}) + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 v_s^2 q_s^2 \right).$$

The first term of (81) is the Hamiltonian of the translatory motion of the center of gravity; the corresponding eigenfunctions are:

$$(82) \quad \Omega^{-1/2} e^{2\pi i (\eta_n \cdot \xi) / h}$$

where $\Omega^{-1/2}$ is a normalization factor; η_n represents the momentum of the atom, which can be supposed to assume discreet values, since the atom can move in a finite volume Ω .

The second and third term of H_0 represent the Hamiltonian of the internal coordinates of the atom; the corresponding eigenfunctions are $u_{n'}$. The last term of H_0 is the Hamiltonian of the radiation components whose eigenfunctions are:

$$u_{n_1} u_{n_2} \cdots u_{n_s} \cdots$$

The eigenfunctions of the unperturbed system are given by the product:

$$(83) \quad \varphi_{nn' n_1 \cdots n_s \cdots} = \Omega^{-1/2} e^{2\pi i (\eta_n \cdot \xi) / h} u_{n'} u_{n_1} \cdots u_{n_s}$$

and the corresponding eigenvalue, as in (34) is the sum

$$(84) \quad E_{nn' n_1 \cdots n_s \cdots} = \eta_n^2 / 2M + E_{n'} + h\nu_1 n_1 + \cdots + h\nu_s n_s + \cdots$$

The probability of the state $nn' n_1 \cdots n_s \cdots$ is given by the square of the modulus of the quantity:

$$a_{nn' n_1 \cdots n_s \cdots}$$

The a 's, according to the general formula (26) satisfy differential equations, analogous to (47)

$$(85) \quad \dot{a}_{nn' n_1 \cdots n_s \cdots} = \frac{2\pi i}{h} \sum_{mm' m_1 \cdots m_s \cdots} a_{mm' m_1 \cdots m_s \cdots} \mathcal{H}_{mm' \cdots; mm' \cdots} e^{2\pi i (E_{mm' \cdots} - E_{nn' \cdots}) / h}$$

where $\mathcal{H}_{mm' \cdots; mm' \cdots}$ represents, according to (27), the matrix element of the perturbation energy (80) corresponding to the transition from the state with indices m, m', m_1, \dots to the state n, n', n_1, \dots ; we have:

$$(86) \quad \mathcal{H}_{mm' \cdots; mm' \cdots} = \int \cdots \int \cdots \bar{\varphi}_{nn' \cdots} \mathcal{H} \varphi_{mm' \cdots} d\xi d\mathbf{X} dq_1 \cdots$$

Substituting in (86) the expressions (80) and (83) we see that the integral (86) splits in the product of integrals. We are interested in the factor containing the coordinates ξ of the center of gravity; this factor is, remembering (78):

$$(87) \quad \frac{1}{\Omega} \int e^{-2\pi i (\eta_n \cdot \xi) / h} \sin \left\{ \frac{2\pi v_s}{c} (\alpha_s \cdot \xi) + \beta_s \right\} e^{2\pi i (\eta_m \cdot \xi) / h} d\xi$$

where $d\xi$ represents the element of volume. Expressing the sine in terms of exponentials, (87) becomes:

$$\frac{e^{i\beta_s}}{2i\Omega} \int e^{(2\pi i/\hbar) ([\eta_m - \eta_n + (\hbar\nu_s/c) \alpha_s] \cdot \xi)} d\xi - \frac{e^{-i\beta_s}}{2i\Omega} \int e^{(2\pi i/\hbar) ([\eta_m - \eta_n - (\hbar\nu_s/c) \alpha_s] \cdot \xi)} d\xi.$$

The integrals have generally a value very near to zero; they are very different from zero only if

$$(88) \quad \eta_m - \eta_n \pm (\hbar\nu_s/c) \alpha_s = 0$$

since in this case one of the exponentials is equal to unity. Eq. (88) is the condition of conservation of momenta, since η_m and η_n are the momenta of the motion of the center of gravity of the atom and $(\hbar\nu_s/c) \alpha_s$ is the moment of the emitted quantum; the double sign arises from the fact that the s -component of the radiation field is a standing vibration which may be considered as resulting from two progressing waves moving in the opposite directions defined by the unit vectors $+\alpha_s$ and $-\alpha_s$.

We see therefore that the conservation of momentum in the emission process follows from the radiation theory. That also the energy principle must hold results from Eq. (85), since only the terms with

$$E_{mm'} \dots = E_{m'm'} \dots$$

give an important contribution.

Now we have shown that the formulas for the Doppler change of frequency can be derived if we assume the conservation of energy and momentum. The Doppler formulas can therefore be deduced from the radiation theory. We could also deduce from this theory the formulas for the intensity of radiation in different directions; the results are identical with the results of the classical theory.

§ 12. - SCATTERING OF RADIATION FROM FREE ELECTRONS.

The scattering of radiation from free electrons can be considered in two different approximations. The first approximation leads to the classical Thomson formula for the intensity of the scattered radiation with no change of frequency. The second approximation gives the phenomena of the Compton effect where the momenta of light quanta are considered. We shall see also that the theory of scattering carried out by help of Dirac's relativistic wave function for the electron is essentially different from the present non-relativistic theory. In this section we shall always discuss the nonrelativistic theory.

It can be shown that the simple interaction term (16) between the radiation and the electron is not responsible for the scattering from free electrons, not even in first approximation. This is connected with the well-known fact that the free electron has no probability of spontaneous transition between two states n and m with different velocity. The interaction term (16) involves the spontaneous transitions; therefore it may be neglected for the case of the free electron.

The interaction term which is responsible for the scattering is the term (17) which we have hitherto neglected, since it is smaller than (16) and only becomes important if the effect of (16) is zero. Let n and m be two (translational) states of the free electrons. The corresponding eigenfunctions can be written:

$$(89) \quad \psi_n = \Omega^{-1/2} e^{2\pi i (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x}) / h} \quad ; \quad \psi_m = \Omega^{-1/2} e^{2\pi i (\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{x}) / h}$$

where \mathbf{p}_n and \mathbf{p}_m represent the momentum of the electron in the states n and m ; $\Omega^{-1/2}$ is the normalization factor.

To get a scattering different from zero, we need consider the interaction term (17). By help of (12) this term can be written in the form (18). We must first calculate the matrix elements corresponding to (18); then we shall substitute them in a formula analogous to (26) in order to find out the variations of the a 's with the time. This calculation may be carried out to two different approximations. In the first one the supposition is made, that the phase Γ_s of the waves can be regarded as a constant; this approximation yields simply Thomson's formula for the intensity of the scattered radiation and is equivalent to neglecting the momentum properties of light quanta. In order to get the theory of the Compton shift of wave-length it is necessary to consider the dependence of the phases Γ_s on the coordinates. We shall at present restrict ourselves to the first approximation and consider the Γ_s as constants.

By means of (38) and (39) it may be very easily proved that a matrix element of $H^{(2)}$,

$$H_{n, n_1, n_2, \dots; m, m_1, m_2, \dots}^{(2)}$$

is only different from zero if the following conditions exist:

- (a) $n = m$
- (b) the numbers n_1, n_2, \dots with the exception of only two, say n_s and n_σ , are equal to the corresponding indices m_1, m_2, \dots
- (c) $m_s = n_s \pm 1$ and $m_\sigma = n_\sigma \pm 1$ (where the \pm signs are incoherent).

If these conditions are satisfied we get:

$$(90) \quad H_{n_s, n_\sigma; n_s \pm 1, n_\sigma \pm 1}^{(2)} = \frac{e^2 h (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{A}_\sigma)}{\pi m \Omega} \frac{\sin \Gamma_s \sin \Gamma_\sigma}{(v_s v_\sigma)^{1/2}} \cdot \left| \frac{(n_s + 1)^{1/2}}{n_s^{1/2}} \right| \cdot \left| \frac{(n_\sigma + 1)^{1/2}}{n_\sigma^{1/2}} \right|$$

where in the last two terms the upper or the lower expression must be taken according to the + or - sign in $n_s \pm 1$ or in $n_\sigma \pm 1$. Putting these matrix elements in the general formula (26) we get the following differential equations for the a 's:

$$(91) \quad \begin{aligned} \dot{a}_{n, n_1, n_2, \dots, n_\sigma, \dots} &= - \frac{2ie^2}{m\Omega} \sum_{s\sigma} \frac{(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{A}_\sigma)}{(v_s v_\sigma)^{1/2}} \sin \Gamma_s \sin \Gamma_\sigma \\ &\times [a_{m_1, \dots, n_s + 1, \dots, n_\sigma + 1, \dots} [(n_s + 1)(n_\sigma + 1)]^{1/2} e^{-2\pi i (v_s + v_\sigma) t} \\ &+ a_{m_1, \dots, n_s - 1, \dots, n_\sigma + 1, \dots} [n_s (n_\sigma + 1)]^{1/2} e^{+2\pi i (v_s - v_\sigma) t} \\ &+ a_{m_1, \dots, n_s + 1, \dots, n_\sigma - 1, \dots} [(n_s + 1) n_\sigma]^{1/2} e^{-2\pi i (v_s - v_\sigma) t} \\ &+ a_{m_1, \dots, n_s - 1, \dots, n_\sigma - 1, \dots} (n_s n_\sigma)^{1/2} e^{+2\pi i (v_s + v_\sigma) t}] \end{aligned}$$

To get the intensity of the scattered light, we make the assumption that at the time $t = 0$

$$(92) \quad a_{n,0,0,\dots,n_s,\dots,0_\sigma,\dots} = 1$$

while all the other a 's are zero. This means physically that there is a certain amount of radiation in the field; this is the primary radiation of frequency ν_s and energy density

$$(93) \quad w_s = n_s h\nu_s/\Omega.$$

We must find the intensity of the radiation scattered in the component σ . The probability that a quantum is scattered in the radiation component σ is given by the square modulus of

$$a_{n,0,\dots,n_s-1,\dots,1_\sigma,\dots}$$

If we limit ourselves to a very short time t , we might still assume (92) to be valid in first approximation; and we obtain therefore from (91):

$$(94) \quad \dot{a}_{n,0,\dots,n_s-1,\dots,1_\sigma,\dots} = -\frac{2ie^2}{m\Omega} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{A}_\sigma) \frac{\sin \Gamma_s \sin \Gamma_\sigma}{(\nu_s \nu_\sigma)^{1/2}} n_s^{1/2} e^{-2\pi i(\nu_s - \nu_\sigma)t}$$

since only the third term in the square brackets gives a result different from zero. Integration with respect to time, with the initial condition $a_{n,0,\dots,n_s-1,\dots,1_\sigma,\dots} = 0$ for $t = 0$ yields:

$$a_{n,\dots,n_s-1,\dots,1_\sigma,\dots} = \frac{e^2}{\pi m \Omega} \frac{(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{A}_\sigma) \sin \Gamma_s \sin \Gamma_\sigma}{(\nu_s \nu_\sigma)^{1/2}} n_s^{1/2} \frac{e^{-2\pi i(\nu_s - \nu_\sigma)t} - 1}{\nu_s - \nu_\sigma}.$$

The probability for the scattering of a quantum in the component σ , is the square modulus of this expression, i.e.,

$$\frac{4e^4}{\pi^2 m^2 \Omega^2} \frac{(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{A}_\sigma)^2 \sin^2 \Gamma_s \sin^2 \Gamma_\sigma}{\nu_s \nu_\sigma} n_s \frac{\sin^2 \pi(\nu_s - \nu_\sigma)t}{(\nu_s - \nu_\sigma)^2}.$$

Summing over the index σ we obtain the probability for the scattering of a quantum in any component of radiation. This sum may be transformed into an integral by a method similar to that described in section 8. We first substitute for $(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{A}_\sigma)^2$, $\sin^2 \Gamma_s$, $\sin^2 \Gamma_\sigma$ their mean values $1/3$, $1/2$, $1/2$. Then we multiply by the number of radiation components $(8\pi/c^3)\Omega \nu_\sigma^2 d\nu_\sigma$ with frequency between ν_σ and $\nu_\sigma + d\nu_\sigma$ and integrate over ν_σ . We obtain:

$$\frac{8}{3} \frac{e^4}{\pi c^3 m^2} \frac{n_s}{\Omega \nu_s} \int_0^\infty \nu_s \frac{\sin^2 \pi(\nu_s - \nu_\sigma)t}{(\nu_s - \nu_\sigma)^2} d\nu_\sigma.$$

The integral can be evaluated by observing that its values are all in the immediate neighborhood of $\nu_\sigma = \nu_s$. (The scattered radiation has the same frequency as the primary light). We can therefore extend the limits of integration from $-\infty$ to $+\infty$ and substitute ν_s for the first ν_σ . By the integral formula

$$(95) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 kx}{x^2} dx = \pi k$$

we obtain:

$$(96) \quad N = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{c^3 m^2} \frac{n_s}{\Omega} t$$

as the number of quanta scattered during the time t . The scattered energy is:

$$(97) \quad h\nu_s N = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{c^3 m^2} \omega_s t.$$

This expression coincides with the well-known formula derived by Thomson from the classical theory of radiation.

The theory carried out to this approximation gives no account of the Compton shift of wave-length, which is due to the momentum of light quanta. A theory of the Compton effect may be obtained if we calculate the matrix element:

$$(98) \quad H_{n, n_1, \dots; m, m_1, \dots}^{(a)}$$

without the assumption, which we have hitherto made, that the phase Γ , of the radiation components can be considered as a constant over the space occupied by the electron. From (18) and the expressions (89) of the eigenfunctions of the electron we see that the factor in the matrix element (98) depending on x, y, z is:

$$(99) \quad (1/\Omega) \int e^{-2\pi i (\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{X})/h} \sin \Gamma_s \sin \Gamma_\sigma e^{+2\pi i (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{X})/h} dx dy dz.$$

We write the sine functions in terms of exponentials and remember that

$$\Gamma_s = \frac{2\pi\nu_s}{c} (\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{X}) + \beta_s \quad ; \quad \Gamma_\sigma = \frac{2\pi\nu_\sigma}{c} (\boldsymbol{\alpha}_\sigma \cdot \mathbf{X}) + \beta_\sigma.$$

We see therefore that (99) splits in a sum of terms like:

$$\pm \frac{e^{\pm i\beta_s \pm i\beta_\sigma}}{4\Omega} \int e^{2\pi i ([\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n \pm (h\nu_s/c) \boldsymbol{\alpha}_s \pm (h\nu_\sigma/c) \boldsymbol{\alpha}_\sigma] \cdot \mathbf{X})} dx dy dz.$$

If the coefficient of \mathbf{X} in the exponent is considerably different from zero, the integral over the space Ω vanishes, since the exponential is a rapidly varying function with mean value zero. We get a term different from zero only if the coefficient is practically zero. That is:

$$(100) \quad \mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n \pm \frac{h\nu_s}{c} \boldsymbol{\alpha}_s \pm \frac{h\nu_\sigma}{c} \boldsymbol{\alpha}_\sigma = 0.$$

This is simply the condition of conservation of momentum. The double signs arise from the fact that a stationary wave is the superposition of two progressive waves of opposite directions.

From the conservation of momentum, the Compton wave-length change could be deduced with a method very analogous to the one used in the ordinary theory of Compton effect. We will not enter into the details of this theory, from which even intensity formulas in nonrelativistic approximation can be derived.

PART II. — THEORY OF RADIATION AND DIRAC'S WAVE EQUATION

In the second part of this work we shall first show how the general formulas of the previous section can be derived if we take as a basis Dirac's relativistic wave equation for the electron, instead of Schrödinger's equation. After this we shall study the very peculiar role which is played in the theory of light scattered from free electrons by the states of negative energy, characteristic of Dirac's theory of the electron. We shall also discuss the possibility of radiative transitions from states of positive to states of negative energy of a Dirac electron. These transitions in reality certainly do not take place; nevertheless it has some interest to see how they are derived from the present theory, since a correct theory should find some way of preventing them.

§ 13. - DIRAC'S WAVE FUNCTION OF THE ELECTRON.

We shall in this paragraph collect some formulas on Dirac's wave function which will be of use later.

It is well known that in Dirac's relativistic theory the electron at a given time is specified by four coordinates. Three of them, x, y, z , are the ordinary positional coordinates; the fourth coordinate σ will represent some internal degree of freedom; we shall call σ the spin coordinate. While the coordinates x, y, z have a continuous range of variability from $-\infty$ to $+\infty$, the spin coordinate σ can assume four values only; it is no limitation of generality to call these four values 1, 2, 3, 4. The wave function ψ will depend on x, y, z, σ :

$$(101) \quad \psi = \psi(x, y, z, \sigma).$$

Since the variable σ takes only a finite set of values, it is often convenient to write it as an index:

$$(102) \quad \psi = \psi_{\sigma}(x, y, z).$$

The wave function is thus represented by a set of four functions $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$, $\psi_3(x, y, z)$, $\psi_4(x, y, z)$ of the space coordinates only.

In Dirac's theory of the electron two types of operators are to be considered. The operators of the first kind act on the dependence of ψ on the space coordinates; for instance:

$$x^2, xy, p_x = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \dots$$

A second kind of operators acts on the dependence of ψ on σ . The most general type of linear operator of this kind is a linear substitution on the four $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Therefore these operators are represented by matrices of the

linear substitution; they have four rows and four columns. We shall consider chiefly four operators of this kind, *viz.*,

$$(103) \quad \left. \begin{aligned} \gamma_x &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; & \gamma_y &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \\ \gamma_z &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; & \delta &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\}$$

For instance the effect of the operator γ_x applied to the eigenfunction $\psi = (\psi_x, \psi_y, \psi_z, \psi_4)$ is to change it in $\gamma_x \psi = (\psi_y, \psi_z, \psi_x, \psi_4)$. Similarly

$$(104) \quad \gamma_y \psi = (-i \psi_x, i \psi_z, -i \psi_y, i \psi_4); \quad \gamma_z \psi = (\psi_z, -\psi_x, \psi_y, -\psi_4); \\ \delta \psi = (\psi_x, \psi_y, -\psi_z, -\psi_4).$$

The γ 's and δ satisfy the well-known relations:

$$\gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = \delta^2 = 1 \quad ; \quad \gamma_y \gamma_x + \gamma_x \gamma_y = 0 \text{ and similar} \\ \gamma_x \delta + \delta \gamma_x = 0 \text{ and similar.}$$

We will very often summarize $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ by a g -vector (that is a vector whose components are g -numbers) γ . It is well known that $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z, c\delta$ can be considered to transform as the four components of a four vector; our vector γ is the space component of this four vector.

Now we write down the well-known Dirac's relativistic Hamilton function for the electron in the form:

$$(105) \quad W = eV - c \left(\gamma \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e\mathbf{U}}{c} \right) \right) - mc^2 \delta.$$

The product containing γ is to be considered as an ordinary scalar product; V and \mathbf{U} are the scalar and the vector potential.

The Schrödinger equation corresponding to the Hamiltonian (105) can be written putting in evidence the four $\psi_x, \psi_y, \psi_z, \psi_4$. We obtain, remembering the meaning of the operators contained in (105) the four equations:

$$(106 a) \quad (mc^2 + W - eV) \psi_x = -\frac{c\hbar}{2\pi i} \left[\frac{\partial \psi_4}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_4}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right] \\ + e [(U_x - i U_y) \psi_4 + U_z \psi_3]$$

$$(106 b) \quad (mc^2 + W - eV) \psi_y = -\frac{c\hbar}{2\pi i} \left[\frac{\partial \psi_3}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_4}{\partial z} \right] \\ + e [(U_x + i U_y) \psi_3 - U_z \psi_4]$$

$$(106 c) \quad (-mc^2 + W - eV) \psi_z = -\frac{c\hbar}{2\pi i} \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right] \\ + e [(U_x - i U_y) \psi_2 + U_z \psi_1]$$

$$(106 d) \quad (-mc^2 + W - eV) \psi_4 = -\frac{c\hbar}{2\pi i} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right] \\ + e [(U_x + i U_y) \psi_1 - U_z \psi_2]:$$

It can be proved that the dissymmetry in these equations is only apparent; it arises in some way from the fact that the spin coordinate has been referred to the z -axis, which has therefore a different treatment.

The energy W contains the intrinsic energy mc^2 of the electron; its values are therefore in the neighborhood of mc^2 . As well known, the Hamiltonian (105) has also besides these « normal » eigenvalues, « anomalous » ones, which lie near the value $-mc^2$. These negative eigenvalues which have certainly for the electron no physical meaning, would correspond in some way to states of an electron with negative mass. They are supposed to be due to some fault either in the theory or in its interpretation but the tentative assumptions which have been made to get a correct theory cannot at present be claimed successful. In the following sections we shall see the importance of the negative states for the interpretation of actual phenomena, e.g., the scattering of light. Any theory which would try to get rid of the negative states by simply striking them away, should be very careful not to remove the scattering properties of the electron at the same time.

We will now consider for a moment some properties of the normal states with positive energy. Since the energy W lies near mc^2 , it can be conveniently written:

$$(107) \quad W = mc^2 + E$$

where E represents the ordinary energy without the term representing the intrinsic energy. For the sake of simplicity we neglect in (106) the terms depending on the vector potential \mathbf{U} . We see now that in Eqs. (106a) and (106b) the coefficient of ψ_x and ψ_y is very large: $(2mc^2 + E - eV)$, while ψ_z and ψ_w in the first side of (106c) and (106d) have a much smaller coefficient: $(E - eV)$. From this we infer that ψ_x and ψ_y are much smaller than ψ_z and ψ_w . From (106a) and (106b), neglecting in a first nonrelativistic approximation $E - eV$ with respect to mc^2 , we obtain:

$$(108) \quad \begin{cases} \psi_x = \frac{i\hbar}{4\pi mc} \left(\frac{\partial\psi_w}{\partial x} - i \frac{\partial\psi_z}{\partial y} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z} \right) \\ \psi_y = \frac{i\hbar}{4\pi mc} \left(\frac{\partial\psi_z}{\partial x} + i \frac{\partial\psi_w}{\partial y} - \frac{\partial\psi_w}{\partial z} \right) \end{cases}$$

(from these equations we see that ψ_x and ψ_y are smaller than ψ_z and ψ_w by a factor of the order of magnitude v/c). We substitute (108) in (106c) and (106d) always putting the \mathbf{U} 's equal to zero, and obtain both for ψ_z and ψ_w the ordinary Schrödinger equation

$$(109) \quad \begin{cases} (E - eV) \psi_z + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta\psi_z = 0 \\ (E - eV) \psi_w + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta\psi_w = 0. \end{cases}$$

We see therefore that in the nonrelativistic approximation ψ_z and ψ_w are eigenfunctions of the ordinary Schrödinger problem, corresponding to the same eigenvalue. Therefore if there is no degeneration in the Schrödinger problem ψ_z and ψ_w can differ only by a constant factor, from the normalized

eigenfunction corresponding to the eigenvalue E in Schrödinger's equation

$$(110) \quad (E - eV)w + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta w = 0.$$

We can take for instance either:

$$\psi_3 = w \quad , \quad \psi_4 = 0$$

or:

$$\psi_3 = 0 \quad , \quad \psi_4 = w.$$

These solutions correspond to the two possible orientations of the spin with respect to the z -axis. From these expressions for ψ_3 and ψ_4 , and (108) we obtain the complete expression of the four components of ψ in the form:

$$(111) \quad \begin{cases} \psi_\alpha = \left[\frac{i\hbar}{4\pi mc} \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{i\hbar}{4\pi mc} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right), w, 0 \right] \\ \psi_\beta = \left[\frac{i\hbar}{4\pi mc} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right), -\frac{i\hbar}{4\pi mc} \frac{\partial w}{\partial z}, 0, w \right] \end{cases}$$

ψ_α and ψ_β are the eigenfunctions corresponding to the two orientations of the spin.

We will now write also the expressions of the exact Dirac wave function for the case where there are no forces acting on the electron ($V = 0$, $\mathbf{U} = 0$) and the components of the momentum p_x , p_y , p_z , are therefore constants. Corresponding to these values of the momentum components, ψ must contain the space coordinates x , y , z in the exponential factor $e^{2\pi i(p_x x + p_y y + p_z z)/\hbar}$. The four components of ψ will therefore be products of four constants B_1, B_2, B_3, B_4 by this factor:

$$(112) \quad \psi = [B_1, B_2, B_3, B_4] e^{2\pi i(p_x x + p_y y + p_z z)/\hbar}.$$

Putting in (105) this expression for ψ and taking $V = 0$, $\mathbf{U} = 0$, we get for the B 's the following equations:

$$(113) \quad \begin{cases} (mc^2 + W) B_1 + c(p_x - ip_y) B_4 + cp_z B_3 = 0 \\ (mc^2 + W) B_2 + c(p_x + ip_y) B_3 - cp_z B_4 = 0 \\ (-mc^2 + W) B_3 + c(p_x - ip_y) B_2 + cp_z B_1 = 0 \\ (-mc^2 + W) B_4 + c(p_x + ip_y) B_1 - cp_z B_2 = 0. \end{cases}$$

It can be readily proved that these linear equations have not identically vanishing solutions only if:

$$W^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$$

that is:

$$(114) \quad W = \pm (m^2 c^4 + c^2 p^2)^{1/2}$$

This is the ordinary relativistic relation between energy and momentum. The $+$ sign corresponds to the ordinary positive values of the energy; the $-$ sign to the anomalous negative energy values. For each of the two energy values (114) there are two linear independent solutions of (113) which correspond

to the two possible orientations of the spin. They can be written in the form:

$$(115 a) \left\{ \begin{aligned} [B_1, B_2, B_3, B_4] &= \left(1 + \frac{c^2 p^2}{(mc^2 + W)^2} \right)^{-1/2} \left[-\frac{c p_x}{mc^2 + W}, -\frac{c(p_x + i p_y)}{mc^2 + W}, 1, 0 \right] \\ [B_1, B_2, B_3, B_4] &= \left(1 + \frac{c^2 p^2}{(mc^2 + W)^2} \right)^{-1/2} \left[-\frac{c(p_x - i p_y)}{mc^2 + W}, \frac{c p_x}{mc^2 + W}, 0, 1 \right] \end{aligned} \right.$$

for the positive energy values; and in the form:

$$(115 b) \left\{ \begin{aligned} [B_1, B_2, B_3, B_4] &= \left(1 + \frac{c^2 p^2}{(mc^2 - W)^2} \right)^{-1/2} \left[1, 0, \frac{c p_x}{mc^2 - W}, \frac{c(p_x + i p_y)}{mc^2 - W} \right] \\ [B_1, B_2, B_3, B_4] &= \left(1 + \frac{c^2 p^2}{(mc^2 - W)^2} \right)^{-1/2} \left[0, 1, \frac{c(p_x - i p_y)}{mc^2 - W}, -\frac{c p_x}{mc^2 - W} \right] \end{aligned} \right.$$

for the negative energy values.

The normalization factors $(1 + c^2 p^2 / (mc^2 \pm W)^2)^{-1/2}$ have been so chosen that the sum of the square modulus of the B's is unity. For vanishing momentum p , the B's take the very simple expressions:

$$(115 c) \left\{ \begin{aligned} [B_1 B_2 B_3 B_4] &= [0 \ 0 \ 1 \ 0] \\ [B_1 B_2 B_3 B_4] &= [0 \ 0 \ 0 \ 1] \end{aligned} \right\} W = + mc^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} [B_1 B_2 B_3 B_4] &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \\ [B_1 B_2 B_3 B_4] &= [0 \ 1 \ 0 \ 0] \end{aligned} \right\} W = - mc^2.$$

§ 14. - RADIATION THEORY IN NONRELATIVISTIC APPROXIMATION.

We shall restrict ourselves to the case for which the electron of our atom can be considered in an electrostatic field of force, and the only nonelectrostatic forces are those due to the radiation field. In Eq. (105) we may therefore suppose that V is independent of the time, and represents the electrostatic potential of the atom, while \mathbf{U} vanishes if we neglect the interaction of the atom and the radiation field; if we do not neglect this interaction we put for \mathbf{U} the expression (12) of the vector potential of radiation. The Hamilton function (105) of the electron becomes then:

$$(116) \quad eV - c(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) - mc^2 \delta + ec \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}_s) q_s \sin \Gamma_s,$$

where the last term represents the effect of the radiation field.

We get the Hamilton function of the complex system of the atom and the radiation field, adding to (116) the Hamiltonian (11) of the radiation. We get thus:

$$(117) \quad H = eV - e(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) - mc^2 \delta + \sum_s \left(\frac{p_s^2}{2} + 2\pi^2 v_s^2 q_s^2 \right) + ec \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}_s) q_s \sin \Gamma_s.$$

The Hamiltonian function (117) can be split up into the sum of an unperturbed Hamiltonian

$$(118) \quad H_0 = eV - c(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) - mc^2 \delta + \sum_s \left(\frac{p_s^2}{2} + 2\pi^2 v_s^2 q_s^2 \right)$$

and a perturbation term:

$$(119) \quad \mathcal{H} = ec \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}_s) q_s \sin \Gamma_s,$$

representing the interaction energy.

The eigenfunctions of the unperturbed problem represented by H_0 can be very easily written, since H_0 is the sum of a term containing the coordinates of the electron only, and of terms each containing the only variables, q_s , p_s of the s th radiation component. The unperturbed eigenfunctions are therefore products of eigenfunctions of the atom and the radiation oscillators as in formula (31)

$$(120) \quad \varphi_{n_1 n_2 \dots n_s \dots} = u_n u_{n_1} u_{n_2} \dots u_{n_s} \dots$$

where the symbols are the same as in (31).

We must now calculate the matrix elements of the perturbation (119)

$$\mathcal{H}_{n_1 n_2 \dots n_s \dots ; m_1 m_2 \dots m_s \dots}$$

Its calculation is practically identical with the calculation for the derivation of (41). It is found that the only matrix elements which don't vanish identically are:

$$(121) \quad \mathcal{H}_{n_1 n_2 \dots n_s \dots ; m_1 n_2 \dots n_s \pm 1 \dots} = ec \left(\frac{\hbar}{\pi \Omega} \right)^{1/2} \frac{1}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{D}_{snm} \cdot \mathbf{A}_s) \Big|_{n_s^{1/2}}^{(n_s \pm 1)^{1/2}}$$

where the upper or the lower expression of the last factor must be taken according to the two possibilities $m_s = n_s + 1$ or $m_s = n_s - 1$. The vector \mathbf{D}_{snm} has the following meaning:

$$(122) \quad \mathbf{D}_{snm} = \int \bar{u}_n \boldsymbol{\gamma} \sin \Gamma_s u_m d\omega$$

where integration must be extended over all the configuration space for the electron (that is: integrate over the space coordinates x , y , z from $-\infty$ to $+\infty$, and sum over the four values of the spin variable).

The expression of \mathbf{D}_{snm} can be very much simplified if we make the assumption that the dimensions of the atom are much smaller than the wavelength. In this case we may consider $\sin \Gamma_s$ as a constant all over the space occupied by the atom and take it out of the integral (122). We get thus:

$$(123) \quad \mathbf{D}_{snm} = \sin \Gamma_s \int \bar{u}_n \boldsymbol{\gamma} u_m d\omega = \sin \Gamma_s \boldsymbol{\gamma}_{nm}$$

where $\boldsymbol{\gamma}_{nm}$ is the matrix element of the operator $\boldsymbol{\gamma}$.

We calculate the last factor by the nonrelativistic approximation (111) for the eigenfunctions. We take first both for u_n and u_m eigenfunctions of the type ψ_α (spin in the positive z -direction). We have:

$$u_m = \left[\frac{i\hbar}{4\pi mc} \frac{\partial w_m}{\partial z}, \frac{i\hbar}{4\pi mc} \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} + i \frac{\partial w_m}{\partial y} \right), w_m, 0 \right].$$

Let us calculate the x -component of the vector (123); remembering the meaning of $\boldsymbol{\gamma}_x$ we obtain:

$$\dots \boldsymbol{\gamma}_x u_m = \left[0, w_m, \frac{i\hbar}{4\pi mc} \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} + i \frac{\partial w_m}{\partial y} \right), \frac{i\hbar}{4\pi mc} \frac{\partial w_m}{\partial z} \right].$$

We have also:

$$\bar{u}_n = \left[-\frac{i\hbar}{4\pi mc} \frac{\partial w_n}{\partial z}, -\frac{i\hbar}{4\pi mc} \left(\frac{\partial w_n}{\partial x} - i \frac{\partial w_n}{\partial y} \right), w_n, 0 \right].$$

We get $\int \bar{u}_n \gamma_x u_m d\omega$, summing up the products of the corresponding four components of the two last expressions, and integrating over all space. We get:

$$\begin{aligned} \int \bar{u}_n \gamma_x u_m d\omega &= -\frac{i\hbar}{4\pi mc} \int \left(w_m \frac{\partial w_n}{\partial x} - w_n \frac{\partial w_m}{\partial x} \right) d\tau \\ &\quad - \frac{\hbar}{4\pi mc} \int \left(w_m \frac{\partial w_n}{\partial y} + w_n \frac{\partial w_m}{\partial y} \right) d\tau \\ &= \frac{i\hbar}{2\pi mc} \int w_n \frac{\partial w_m}{\partial x} d\tau - \frac{i\hbar}{4\pi mc} \int \frac{\partial}{\partial x} (w_n w_m) d\tau - \frac{\hbar}{4\pi mc} \int \frac{\partial}{\partial y} (w_n w_m) d\tau. \end{aligned}$$

The last two integrals can be transformed by Green's theorem into surface integrals extended over a surface at infinite distance; since the eigenfunctions w_n and w_m decrease very rapidly they vanish. We obtain therefore:

$$\int \bar{u}_n \gamma_x u_m d\omega = \frac{i\hbar}{2\pi mc} \int w_n \frac{\partial w_m}{\partial x} d\tau.$$

Calculating with a similar method the components y and z we obtain vectorially:

$$(124) \quad \int \bar{u}_n \boldsymbol{\gamma} u_m d\omega = \frac{i\hbar}{2\pi mc} \int w_n \text{grad } w_m d\tau$$

which shows the affinity between the operator $\boldsymbol{\gamma}$ of Dirac's theory and the expression $-\mathbf{p}/mc = -\mathbf{v}/c$ of Schrödinger's theory (remember that $\mathbf{p} \sim [\hbar/2\pi i] \text{grad}$).

From (42) (observe that the u 's in (42) are the Schrödinger eigenfunctions, so they correspond to our present w 's) we obtain now:

$$(125) \quad \int \bar{u}_n \boldsymbol{\gamma} u_m d\omega = (2\pi i/c) v_{mn} \mathbf{X}_{nm}$$

where \mathbf{X}_{nm} is the matrix element representing the radius vector in Schrödinger's approximation. From (123) and (121) we obtain at last:

$$(126) \quad \mathcal{H}_{m_1 \dots n_s \dots; m_1 \dots n_s \dots \pm 1 \dots} = 2\pi i e \left(\frac{\hbar}{\pi \Omega} \right)^{1/2} \frac{v_{mn}}{v_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}_{nm}) \left[\frac{(n_s + 1)^{1/2}}{n_s^{1/2}} \right] \sin \Gamma_s,$$

which is identical to (46) derived previously.

This shows that in the present nonrelativistic approximation the results obtained for the radiation theory with Dirac's wave function are completely identical to those derived in Part I with Schrödinger's function.

We notice further that (125) has been derived on the assumption that the states n and m have their spins pointing in the same direction. If their spins point in opposite direction the result is zero. This fact can at first sight seem contradictory, since it means that there are no transitions between states with opposite spin directions. But we must remember that we have made the calculations on the hypothesis that the eigenfunctions of the Schrödinger problem are not degenerate. The effect of this is that there is no coupling between spin and orbital movement, as in s -terms; where changes of spin

direction are observed, this is only due to the coupling of spin and orbit and if this coupling is loosened, as in Paschen-Back effect, no changes of spin direction actually occur.

§ 15. - DIRAC'S THEORY AND SCATTERING FROM FREE ELECTRONS.

The theory of scattering of light from free electrons has some interest, as we have said, because it shows in a very striking way the actual importance of the states with negative energy even for very real phenomena where these mysterious states do not explicitly appear. This theory can of course be carried out either to the approximation of the Compton effect or to the approximation giving simply Thomson's coefficient of scattering and no change of frequency. Since the essential features of the theory are conserved also if we neglect the change of frequency, we shall carry out the theory to this approximation (i.e., we shall not consider the momentum properties of light quanta). The exact theory leads to the intensity formula of Klein-Nishina.

The approximation introduced by neglecting the momentum properties of light quanta is equivalent, as we have often said, to considering the phase Γ_s of light constant over the place occupied by the electron. We may also suppose that the velocity of the electron during the process of scattering is always negligible, since we neglect the recoil of the scattered quanta. We can take therefore the eigenfunctions of the electron in the very simple form (115 c) corresponding to velocity zero. We shall indicate the four states (115 c) by the indices 1, 2, 3, 4. States 1, 2 are states of positive energy $+mc^2$, with spin pointing in the direction $+z$ and $-z$; states 3, 4 have negative energy $-mc^2$ with the spin pointing in the directions $\pm z$.

We will suppose that at the beginning ($t = 0$) the electron is in the state 1 and there are n_s quanta in the s -component of radiation (primary radiation). We can put therefore:

$$(127) \quad a_{1,0\dots 0,n_s,0\dots 0} = 1$$

while the other a 's are zero. To find out the amount of radiation scattered into the σ -component, we must find the value of $a_{1,0\dots 0,n_s-1,\dots 1,0\dots 0}$ at the time t . Now the matrix element of the perturbation corresponding to this transition is zero, since two radiation components (s and σ) change their quantum number; the transition can therefore occur only through an intermediate state, which can combine both with the initial and the final state. It is easily seen that there are only four such states:

$$(128) \quad (3, n_s - 1, 0), (4, n_s - 1, 0), (3, n_s, 1), (4, n_s, 1).$$

For brevity only the quantum numbers of the electron and of the radiation components, s , σ have been indicated. The states $(2, n_s - 1, 0)$ and $(2, n_s, 1)$ have not been considered since it is immediately shown by the definition that $\gamma_{12} = 0$ so that these states do not combine.

The intermediate states (128) are states for which the electron has a negative energy; without these states of negative energy no scattering proc-

ess would be possible. We will now show, that the scattering calculated with the intermediate states (128) actually gives Thomson's intensity formula.

For this we must first write the matrix elements corresponding to the transition from the initial state $(1, n_s, 0)$ to the intermediate states (128), and from these states to the final state $(1, n_s - 1, 1)$. From (115 c) we immediately find:

$$(129) \quad \begin{cases} \gamma_{x13} = 0 & ; & \gamma_{y13} = 0 & ; & \gamma_{z13} = 1 \\ \gamma_{x14} = 1 & ; & \gamma_{y14} = i & ; & \gamma_{z14} = 1. \end{cases}$$

Interchanging of the indices changes the corresponding γ into its complex conjugate value: (e.g., $\gamma_{y41} = -i\gamma_{y14}$). From (121) (123) (129) we obtain the required matrix elements: they are:

$$(130) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{H}_{3, n_s - 1, 0 ; 1, n_s, 0} &= ec \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_s}{v_s^{1/2}} A_{sz} n_s^{1/2} \\ \mathcal{H}_{4, n_s - 1, 0 ; 1, n_s, 0} &= ec \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_s}{v_s^{1/2}} (A_{sx} - iA_{sy}) n_s^{1/2} \\ \mathcal{H}_{3, n_s, 1 ; 1, n_s, 0} &= ec \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_\sigma}{v_\sigma^{1/2}} A_{\sigma z} \\ \mathcal{H}_{4, n_s, 1 ; 1, n_s, 0} &= ec \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_\sigma}{v_\sigma^{1/2}} (A_{\sigma x} - iA_{\sigma y}) \end{aligned} \right.$$

for the transitions from the initial states $(1, n_s, 0)$ to the intermediate states (128); and

$$(131) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{H}_{1, n_s - 1, 1 ; 3, n_s - 1, 0} &= ec \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_\sigma}{v_\sigma^{1/2}} A_{\sigma z} \\ \mathcal{H}_{1, n_s - 1, 1 ; 4, n_s - 1, 0} &= ec \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_\sigma}{v_\sigma^{1/2}} (A_{\sigma x} + iA_{\sigma y}) \\ \mathcal{H}_{1, n_s - 1, 1 ; 3, n_s, 1} &= ec \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_s}{v_s^{1/2}} A_{sz} n_s^{1/2} \\ \mathcal{H}_{1, n_s - 1, 1 ; 4, n_s, 1} &= ec \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_s}{v_s^{1/2}} (A_{sx} + iA_{sy}) n_s^{1/2} \end{aligned} \right.$$

for the transitions from the intermediate states to the final state $(1, n_s - 1, 1)$.

From these matrix elements and the general formula (26) we easily calculate the amplitudes of probability for the intermediate states. If we limit ourselves to a very short interval of time we may still suppose (127) to be valid in first approximation, and we obtain from (26):

$$\dot{a}_{3, n_s - 1, 0} = - \frac{2\pi i}{\hbar} \mathcal{H}_{3, n_s - 1, 0 ; 1, n_s, 0} a_{1, n_s, 0} e^{2\pi i (-2mc^2 - \hbar\nu_s)t/\hbar}$$

(notice the very big change in the energy due to the transition of the electron from state 1 with positive energy $+mc^2$, to state 3 with negative energy $-mc^2$). Putting $a_{1, n_s, 0} = 1$ and remembering (130) we obtain:

$$\dot{a}_{3, n_s - 1, 0} = - \frac{2\pi i}{\hbar} ec \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_s}{v_s^{1/2}} n_s^{1/2} A_{sz} e^{-2\pi i (2mc^2 + \hbar\nu_s)t/\hbar}.$$

Integrating and neglecting $h\nu_s$, in comparison with $2mc^2$ in the denominator we obtain:

$$(132) \quad a_{3,n_s-1,0} = \frac{e}{2mc} \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_s}{\nu_s^{1/2}} n_s^{1/2} A_{sz} e^{-2\pi i(2mc^2 + h\nu_s)t/\hbar}.$$

Notice that the integration constant should have been determined with the condition $a_{3,n_s-1,0} = 0$ for $t = 0$; instead we have chosen the constant so that the mean value of $a_{3,n_s-1,0}$, is zero. This corresponds exactly to what is done also in the classical theory of dispersion of light from a harmonic oscillator; one considers in that case the motion of the oscillator to be represented simply by the forced vibrations and one neglects the vibrations with the characteristic frequency of the oscillator which are superposed on them. The justification of this classical proceeding lies in the well known fact that the vibrations of characteristic frequency are very rapidly damped by the reaction of radiation, so that, in the permanent state, only the forced vibrations remain. The justification in our case is quite similar; it could be shown that the effect of an integration constant added to (132) would be very rapidly damped from the reaction of states like $(1, n_s - 1, 1)$ which has been neglected in our calculations.

The amplitudes of probability for the other intermediate states are deduced with exactly the same method as (132). They are:

$$(133) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{4,n_s-1,0} &= \frac{e}{2mc} \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_s}{\nu_s^{1/2}} n_s^{1/2} (A_{sz} - iA_{sy}) e^{-2\pi i(2mc^2 + h\nu_s)t/\hbar} \\ a_{3,n_s,1} &= \frac{e}{2mc} \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_\sigma}{\nu_\sigma^{1/2}} A_{\sigma z} e^{-2\pi i(2mc^2 - h\nu_\sigma)t/\hbar} \\ a_{4,n_s,1} &= \frac{e}{2mc} \left(\frac{\hbar}{\pi\Omega} \right)^{1/2} \frac{\sin \Gamma_\sigma}{\nu_\sigma^{1/2}} (A_{\sigma z} - iA_{\sigma y}) e^{-2\pi i(2mc^2 - h\nu_\sigma)t/\hbar}. \end{aligned} \right.$$

We apply now once more the general formula (26) to the calculation of the amplitude of probability for the final state. We get:

$$\dot{a}_{1,n_s-1,1} = -\frac{2\pi i}{\hbar} \left[\mathcal{H}_{1,n_s-1,1;3,n_s-1,0} a_{3,n_s-1,0} e^{-2\pi i(2mc^2 + h\nu_\sigma)t/\hbar} + \dots \right]$$

where similar terms for the other three intermediate states have been omitted. With (132) (133) and (131) we find now:

$$(134) \quad \dot{a}_{1,n_s-1,1} = -\frac{2i}{\Omega} \frac{e^2}{m} \left(\frac{n_s}{\nu_s \nu_\sigma} \right)^{1/2} \sin \Gamma_s \sin \Gamma_\sigma (A_s A_\sigma) e^{2\pi i(\nu_\sigma - \nu_s)t/\hbar}.$$

This equation coincides exactly with equation (94) obtained in the theory of scattering made without using Dirac's wave equation. By exactly the same method used for (94) we deduce from (134) Thomson's formula for the intensity of scattered radiation.

The very profound difference between these two theories of scattering should be emphasized; in the first theory, deduced from the Schrödinger wave equation for the electron, the scattering effect was due to the presence in the Hamiltonian of the term (17). This term is quadratic (and not linear) in the

vector potential, and therefore enables transitions for which a quantum jumps in a single act from one radiation component to another. In Dirac's wave equation only terms linear in the potentials are contained; this has the effect that no direct transitions between two states can occur, if more than one radiation component changes its quantum number. Therefore it would seem probable at first sight that Dirac's relativistic free electron has no scattering properties. We have shown however that this conclusion is wrong; the scattering properties come out if one properly takes into account also the negative states. Scattering appears as a sort of resonance (very far from the resonance line) of the quantum jump (of energy $2mc^2$) between the positive and the negative states.

§ 16. - RADIATIVE TRANSITIONS FROM POSITIVE TO NEGATIVE STATES.

We have seen in the preceding sections that a very great number of phenomena find their natural explanation in Dirac's theory of radiation. We will now briefly discuss some serious difficulties of this theory. They are mainly connected with difficulties in the theory of the electron.

It is well known that the most serious difficulty in Dirac's relativistic wave equation lies in the fact that it yields besides the normal positive states also negative ones, which have no physical significance. This would do no harm if no transition between positive and negative states were possible (as are, e. g., transitions between states with symmetrical and antisymmetrical wave function). But this is unfortunately not the case: Klein has shown by a very simple example that electrons impinging against a very high potential barrier have a finite probability of going over into a negative state.

Dirac has tried with a very keen hypothesis to overcome these difficulties. He postulates that there are in every portion of space an infinite number of electrons which fill nearly completely in the sense of Pauli's principle, all the states of negative energy; a transition from a positive to a negative state therefore occurs very seldom since only a few negative states are unoccupied. Dirac goes further with the hypothesis, as he postulates that the unoccupied, negative places, the « holes », are to be interpreted as protons; in fact it is easily seen that a hole behaves like a positive charge with positive mass. The quantum transition in which an electron jumps from a positive state into a hole would therefore correspond to a hypothetic process of annihilation of an electron and a proton, with radiation of the energy corresponding to their masses.

Oppenheimer, Dirac and Tamm have calculated the probability of transition from a positive to a negative state with radiation of the energy difference. From the standpoint that the negative states are equivalent to protons, their result gives the rate of annihilation of electrons and protons.

Without carrying out these calculations in any detail, we limit ourselves to some qualitative remarks. Let us discuss the probability of radiative transition between a state (1) in which the momentum of the electron is $\mathbf{p}_1 = 0$ and

its energy $W_1 = + mc^2$ to a state (2) where its energy is negative $W_2 = - mc^2$ and its momentum is $p_2 = 0$.

It is evident that the energy difference $W_1 - W_2 = 2 mc^2$ can not be radiated in a single quantum, since the momentum condition $p_1 - p_2 = 2 mc$ is not verified. It is however possible to obtain a finite probability of transition between the two states 1, 2 with emission of two quanta having both energy mc^2/h and opposite direction of motion. This process is of course consistent both with energy and momentum conservation.

The process will therefore happen in two steps. First step: a quantum of energy mc^2 is emitted and the electron receives the recoil going over to a state with momentum mc . The energy of the electron in this state is (114): $W = \pm 2^{1/2} mc^2$. This intermediate state does not satisfy also conservation of (unperturbed) energy; as we have often seen in preceding instances, the amplitude of probability for this state can not continuously increase with time, but it can nevertheless be different from zero though having very small oscillating values. From this intermediate state a direct transition to the final state, with emission of a quantum of energy mc^2 and momentum opposite to the momentum of the first quantum is possible; since this last state satisfies energy and momentum conservation, it is actually possible to show that its amplitude of probability steadily increases giving a finite rate of transition from initial to final state.

Carrying out the calculation, the required probability of transition per unit time results:

$$(135) \quad \pi e^4 / m^2 c^3.$$

If the electron in the negative state has not momentum zero, but has the energy $W' = - mc^2 \alpha$, ($\alpha \geq 1$) the probability of transition becomes:

$$(136) \quad \frac{\pi e^4}{m^2 c^3} \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \left[\frac{\alpha^2 + 4\alpha + 1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} \log [\alpha + (\alpha^2 - 1)^{1/2}] - \alpha - 3 \right].$$

If we assume that all the negative states are empty, formula (136) summed over all negative states would give an infinite probability for the transition from a positive to a negative state: electrons could not remain in a positive state, not even for a very short time.

If we assume on the other hand the "hole" theory of protons, the theory of the transitions becomes very uncertain, since the electron is in that case surrounded by an infinite number of other (negative) electrons. The interaction effects of these electrons are neglected in the theory, though it is evident that they might have enormous effects. Dirac suggests that this interaction might be responsible for the difference in mass of the electron and the proton. If we tentatively try to apply (136) to the process of annihilation of an electron and a proton, putting for m some mean value between the masses of the electron and the proton, the rate of annihilation comes out much too rapid; matter would be destroyed in a very short time.

PART III. — QUANTUM ELECTRODYNAMICS

§ 17. - The electromagnetic field, whose interaction with matter we have hitherto considered, is not an electromagnetic field of the most general type, since a field of general type cannot be constructed by simply superposing plane electromagnetic waves. It can be immediately seen that in a plane electromagnetic wave $\text{div } \mathbf{E} = 0$ and this equation holds also for any superposition of waves. Instead in a general electromagnetic field we have $\text{div } \mathbf{E} = + 4 \pi \rho$, ρ being the density of electricity; this shows that no field, where charges are present, can be represented as a superposition of electromagnetic waves.

An electromagnetic field of the most general type is represented by help of a scalar potential V and a vector potential \mathbf{U} by the well-known relations:

$$(137) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \quad ; \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{U}.$$

V and \mathbf{U} are classically connected to the density of charge and the velocity $\dot{\mathbf{X}}$ by:

$$(138) \quad \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -4 \pi \rho \quad ; \quad \Delta \mathbf{U} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = -\frac{4 \pi}{c} \rho \dot{\mathbf{X}}.$$

Further \mathbf{U} and V are not completely independent of each other; they satisfy the relation:

$$(139) \quad \text{div } \mathbf{U} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

which is closely connected to the equation of continuity for the electricity.

A general quantum theory of the electromagnetic field was constructed by Heisenberg and Pauli by a method in which the values of the electromagnetic potentials in all the points of space are considered as variables.

Independently the writer proposed another method of quantization of the electromagnetic field starting from a Fourier analysis of the potentials. Though Heisenberg and Pauli's method puts in evidence much more clearly the properties of relativistic invariance and is in many respects more general, we prefer to use in this article the method of the writer, which is more simple and more analogous to the methods used in the theory of radiation.

We will consider only a region of space of finite volume and we suppose that both scalar and vector potential at a given time can be represented by Fourier series of the type:

$$(140) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = c \left(\frac{8 \pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s Q_s \cos \Gamma_s \\ \mathbf{U} = c \left(\frac{8 \pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s \mathbf{u}_s \sin \Gamma_s \end{array} \right.$$

where Q_s and \mathbf{u}_s are a scalar and a vector function respectively of the time only. The factor $c(8\pi/\Omega)^{1/2}$ has been put for convenience of normalization as in (12). Γ_s is given by (4). It is convenient to develop V and U in series of $\cos \Gamma_s$ and $\sin \Gamma_s$, respectively, since in this case Eq. (139) takes a much simpler form. It should finally be noticed that the number of characteristic frequencies between ν_s and $\nu_s + d\nu_s$ is to be taken equal to:

$$(141) \quad (4\pi/c^3)\Omega\nu_s^2 d\nu_s,$$

i.e., to the half of (1), since in our case the two possibilities of polarization for the transverse waves are taken in account by the fact that \mathbf{u}_s is a vector.

As variables representing the field at a given time we take Q_s and the three components of the vector \mathbf{u}_s ; it is convenient however to take these components in directions related to the form of the phase factor $\sin \Gamma_s$; we consider three mutually perpendicular unit vectors: α_s , which points in the direction of the wave, \mathbf{A}_{s1} and \mathbf{A}_{s2} perpendicular to that direction. Let χ_s , q_{s1} , q_{s2} be the components of \mathbf{u}_s in the directions α_s , \mathbf{A}_{s1} , \mathbf{A}_{s2} ; we have then:

$$(142) \quad \mathbf{u}_s = \alpha_s \chi_s + \mathbf{A}_{s1} q_{s1} + \mathbf{A}_{s2} q_{s2}.$$

As variables describing the field we can take:

$$(143) \quad Q_s, \chi_s, q_{s1}, q_{s2}.$$

They depend only on the time.

It is very easy to deduce from (138) the differential equations that determine the dependence of the variables (143) on the time. Multiply both members of the first Eq. (138) by $\cos \Gamma_s d\tau$ and integrate over all the space. We suppose that the potential V vanishes on the very distant surface limiting our space Ω , so that certain integrals over that surface can be omitted; we obtain then by obvious transformations:

$$\begin{aligned} -4\pi \int \rho \cos \Gamma_s d\tau &= \int \Delta V \cdot \cos \Gamma_s d\tau - \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \cos \Gamma_s d\tau \\ &= \int V \cdot \Delta \cos \Gamma_s d\tau - \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \cos \Gamma_s d\tau. \end{aligned}$$

From (4) we obtain:

$$\Delta \cos \Gamma_s = -\frac{4\pi^2 \nu_s^2}{c^2} \cos \Gamma_s.$$

We have therefore:

$$(144) \quad +4\pi c^2 \int \rho \cos \Gamma_s d\tau = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 4\pi^2 \nu_s^2 \right) \int V \cos \Gamma_s d\tau.$$

Putting for V its expression (140) and remembering that the functions $\cos \Gamma_s$ are orthogonal and satisfy the relation

$$\int \cos \Gamma_s \cos \Gamma_{s'} d\tau = \frac{1}{2} \Omega \delta_{ss'}$$

we obtain:

$$\int V \cos \Gamma_s d\tau = c(2\pi\Omega)^{1/2} Q_s.$$

From (144) we obtain therefore:

$$(145) \quad \ddot{Q}_s + 2\pi^2 v_s^2 Q_s = c \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \int \rho \cos \Gamma_s d\tau.$$

This equation takes a much simpler form if we suppose that there are only point charges e_1, e_2, e_3, \dots , at the points $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots$. The integral in (145) becomes then a sum over the point charges and we obtain:

$$(146) \quad \ddot{Q}_s + 2\pi^2 v_s^2 Q_s = c \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si}$$

where the sum has to be extended over all the charges; Γ_{si} is the value of the phase Γ_s at the place \mathbf{X}_i of the i^{th} charge

$$(147) \quad \Gamma_{si} = \frac{2\pi v_s}{c} (\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{X}_i) + \beta_s.$$

By the same method we find a similar equation for the vector \mathbf{u}_s :

$$(148) \quad \ddot{\mathbf{u}}_s + 2\pi^2 v_s^2 \mathbf{u}_s = \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_i e_i \dot{\mathbf{X}}_i \sin \Gamma_{si}.$$

Remembering (142), we find that the three components of this vector equation in the three direction $\boldsymbol{\alpha}_s, \mathbf{A}_{s1}, \mathbf{A}_{s2}$ are:

$$(149) \quad \ddot{\chi}_s + 2\pi^2 v_s^2 \chi_s = \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_i e_i (\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \dot{\mathbf{X}}_i) \sin \Gamma_{si}$$

$$(150) \quad \left. \begin{aligned} \ddot{q}_{s1} + 2\pi^2 v_s^2 q_{s1} &= \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_i e_i (\mathbf{A}_{s1} \cdot \dot{\mathbf{X}}_i) \sin \Gamma_{si} \\ \ddot{q}_{s2} + 2\pi^2 v_s^2 q_{s2} &= \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_i e_i (\mathbf{A}_{s2} \cdot \dot{\mathbf{X}}_i) \sin \Gamma_{si}. \end{aligned} \right\}$$

The Eqs. (146), (149), (150) are equivalent to (138).

Take the derivative of (146) with respect to t and add it to (149) multiplied by $2\pi v_s$. Then we find:

$$(151) \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + 4\pi^2 v_s^2 \right) (2\pi v_s \chi_s + \dot{Q}_s) = 0.$$

This equation is evidently satisfied if:

$$(152) \quad 2\pi v_s \chi_s + \dot{Q}_s = 0.$$

It is immediately seen that this last equation is equivalent to (139). Eq. (152) does not follow directly from the differential equations (146), (149); though it results from (151) that, if at a given time (e.g., $t = 0$), (152) and its derivative with respect to time

$$(153) \quad 2\pi v_s \dot{\chi}_s + \ddot{Q}_s = 0$$

are both satisfied, then they are satisfied for all time.

We must now write in Hamiltonian form the equations that describe the motion of the particles and the variation of the electromagnetic field. For this we simply write the Hamilton function and then verify that the canoni-

cal equations that can be derived by it actually represent the motion of the particles and the Maxwell equations. The Hamilton function is the following:

$$(154) \quad H = -c \sum_i (\boldsymbol{\gamma}_i \cdot \mathbf{p}_i) - \sum_i m_i c^2 \delta_i + \sum_i e_i c \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s Q_s \cos \Gamma_{si} \\ + \sum_i e_i c \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_s (\boldsymbol{\gamma}_i \cdot (\boldsymbol{\alpha}_s \boldsymbol{\chi}_s + \mathbf{A}_{s1} q_{s1} + \mathbf{A}_{s2} q_{s2})) \sin \Gamma_{si} \\ + \sum_s \left[\frac{1}{2} (\dot{p}_{s1}^2 + \dot{p}_{s2}^2 + \omega_s^2 - P_s^2) + 2\pi^2 \nu_s^2 (q_{s1}^2 + q_{s2}^2 + \chi_s^2 - Q_s^2) \right].$$

In this Hamilton function the variables are \mathbf{X}_i , and the spin coordinates, describing the motion of the particles; \mathbf{p}_i are the momenta (vectors) conjugated to the coordinates \mathbf{X}_i ; $Q_s, \chi_s, q_{s1}, q_{s2}$ are the coordinates describing the field and $P_s, \omega_s, \dot{p}_{s1}, \dot{p}_{s2}$ are their conjugated momenta. $\boldsymbol{\gamma}_i$ and δ_i represent operators analogous to Dirac's operators $\boldsymbol{\gamma}$ and δ of Eq. (105) operating on the spin coordinate of the i^{th} particle. The structure of the Hamiltonian (154) is very simple. Remembering (140), its first four terms can be written:

$$(155) \quad \sum_i \left\{ e_i V_i - c \left(\boldsymbol{\gamma}_i \cdot \left(\mathbf{p}_i - \frac{e_i}{c} \mathbf{U}_i \right) - m_i c^2 \delta_i \right) \right\}$$

which is simply the repetition of Dirac's Hamilton function (105) for all the particles. The last term of (154) represents the Hamiltonian function of the electromagnetic field without interaction with the charges, and is analogous to (11).

From this we see clearly that the Hamiltonian (154) correctly represents the motion of the particles, since their coordinates are contained in (155) which is equivalent to Dirac's Hamilton function. We must show that also the Maxwell equations, or the equivalent equations (146), (149), (150) can be deduced from the Hamiltonian (154). For this we write the canonical equations derived from (154); we obtain:

$$(156) \quad \dot{Q}_s = \frac{\partial H}{\partial P_s} = -P_s \quad ; \quad \dot{P}_s = -\frac{\partial H}{\partial Q_s} = 4\pi^2 \nu_s^2 Q_s - \sum_i e_i c \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \cos \Gamma_{si}.$$

If we eliminate P_s from these equations, we obtain:

$$\ddot{Q}_s + 4\pi^2 \nu_s^2 Q_s = \sum_i e_i c \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \cos \Gamma_{si}$$

which is identical with (146). Similarly the canonical equations for the pair of conjugate variables χ_s, ω_s are:

$$(157) \quad \dot{\chi}_s = \frac{\partial H}{\partial \omega_s} = \omega_s \quad ; \quad \dot{\omega}_s = -\frac{\partial H}{\partial \chi_s} = -4\pi^2 \nu_s^2 \chi_s - c \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_i e_i (\boldsymbol{\gamma}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_s) \sin \Gamma_{si}.$$

Elimination of ω_s , yields:

$$(158) \quad \ddot{\chi}_s + 4\pi^2 \nu_s^2 \chi_s = -c \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_i e_i (\boldsymbol{\gamma}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_s) \sin \Gamma_{si}.$$

Now we observe that the velocity of the i^{th} particle in Dirac's relativistic theory is

$$(159) \quad \dot{\mathbf{X}}_i = -c \boldsymbol{\gamma}_i.$$

(This results also from the Hamiltonian (154), since $\dot{X}_{ix} = \partial H / \partial p_{ix}$). Eq. (158) coincides therefore with (149). By the same method it can be proved that also the Eq. (150) for the transverse components of the vector potential can be derived from (154).

Eq. (152) which is equivalent to (139) can be written, remembering (156):

$$(160) \quad 2 \pi \nu_s \chi_s - P_s = 0$$

and its derivative with respect to time is $2 \pi \nu_s \dot{\chi}_s - \dot{P}_s$, which can be written by (156), (157):

$$(161) \quad \omega_s - 2 \pi \nu_s Q_s + \frac{c}{2 \pi \nu_s} \left(\frac{8 \pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si} = 0.$$

We have proved by (151) that if (160), (161) are satisfied for $t = 0$, they are satisfied also automatically for any value of time.

§ 18. - In a classical interpretation we could therefore say that electrodynamics and motion of the points can be deduced by integration of the canonical equations corresponding to the Hamilton function (154); the initial values of the variables must satisfy the supplementary conditions (160), (161).

As we go over to the quantum mechanical interpretation, we must first observe that it is in general impossible that two functions of the variables of the system have simultaneously a well determined value, with the exception of the case that the two functions commute; so at first sight it would seem impossible to satisfy simultaneously (160) and (161). This is, however, possible in this special case, since the first members of (160) and (161) commute with each other as an immediate verification shows (remember that ω_s and χ_s are conjugate and therefore $\omega_s \chi_s - \omega_s \chi_s = \hbar / 2 \pi i$; and similarly $P_s Q_s - Q_s P_s = \hbar / 2 \pi i$, while all the other variables in (160) and (161) commute).

To the classical integration of a system of canonical equations corresponds in wave mechanics the integration of the Schrödinger equation:

$$(162) \quad H\psi = - \frac{\hbar}{2 \pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

where H , given by (154) must be considered in the ordinary way as an operator acting on the function ψ of the coordinates only:

$$(163) \quad \psi = \psi(t, \mathbf{X}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, q_{s1}, q_{s2}, \chi_s, Q_s)$$

$\boldsymbol{\sigma}_i$ represent the spin coordinates.

If there were no condition limiting the initial values of the variables, then ψ for $t = 0$ could be chosen arbitrarily. But we have the conditions (160) (161). We will show that these conditions determine the form of the dependence of ψ on χ_s and Q_s . Indeed, ω_s , conjugate to χ_s , must have according to (161) the value:

$$\omega_s = 2 \pi \nu_s Q_s - \frac{c}{2 \pi \nu_s} \left(\frac{8 \pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si}$$

It results from this that χ_s can be contained in ψ only in a factor:

$$(164) \quad e^{2 \pi i \omega_s \chi_s / \hbar} = \exp \left[\frac{2 \pi i}{\hbar} \chi_s \left(2 \pi \nu_s Q_s - \frac{c}{2 \pi \nu_s} \left(\frac{8 \pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right) \right].$$

By the same method we deduce from (160) that χ_s must be contained only in a factor:

$$e^{i\pi^2 v \chi_s Q_s / h}$$

which is already contained in (164).

We see therefore that the form of ψ must be:

$$(165) \quad \psi = \exp \left[\frac{2\pi i}{h} \sum_s \chi_s \left(2\pi v_s Q_s - \frac{c}{2\pi v_s} \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right) \right] \\ \times \varphi(t, \mathbf{X}, \sigma_s, q_{s1}, q_{s2}).$$

If we substitute this expression for ψ in the Schrödinger Eq. (162) we obtain a new differential equation for φ . With some calculations it is found that this equation can be put in the form:

$$(166) \quad R\varphi = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

which strongly resembles the form of a Schrödinger equation. The operator R is the following:

$$(166) \quad R = -c \sum_i (\boldsymbol{\gamma}_i \cdot \mathbf{p}_i) - \sum_i m_i c^2 \delta_i + \sum_i e_i c \left(\frac{8\pi}{\Omega} \right)^{1/2} (\boldsymbol{\gamma}_i \cdot (\mathbf{A}_{s1} q_{s1} + \mathbf{A}_{s2} q_{s2})) \sin \Gamma_{si} \\ + \sum_s \left\{ \frac{1}{2} (p_{s1}^2 + p_{s2}^2) + 2\pi^2 v_s^2 (q_{s1} + q_{s2}) \right\} + \frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_s \frac{1}{v_s^2} \left(\sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)^2.$$

This operator R can be considered as a sort of Hamilton function acting on φ . By this method therefore the coordinates Q_s and χ_s representing the scalar potential and one component of the vector potential are completely eliminated both from the new amplitude of probability φ and from the new Hamilton function R . Not considering the last term in R , which we shall discuss later, the operator R is identical with the Hamilton function of Dirac's theory of radiation (117). (There are only some formal differences: in (117) only one electron, instead of many particles is considered; in (166) the two polarized components are considered separately with the indices $s1$ and $s2$, whereas in (117) there is only one index s).

We must find out the physical meaning of the last term in (166). This term is:

$$\frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_s \frac{1}{v_s^2} \left(\sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)^2 = \frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_{ij} e_i e_j \sum_s \frac{\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}}{v_s^2}.$$

The sum over s can be transformed into an integral. (Take the mean value of $\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}$ over all directions of propagation and phases for the s -component; and then remember (141)). We find at last:

$$\sum_s \frac{\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}}{v_s^2} = \frac{\pi\Omega}{2c^2} \frac{1}{r_{ij}}$$

r_{ij} being the distance between the two points i and j . The last term of (166) takes therefore the very simple form:

$$(167) \quad \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{e_i e_j}{r_{ij}}$$

which is the ordinary classical expression for the electrostatic energy of our system of charges.

At this point we meet a very serious difficulty, since the electrostatic energy of point charges is infinite; every charge has an infinite electrostatic self-energy. We could try of course to avoid this difficulty, as it is very often done in classical electrostatics by simply neglecting in the sum (167) all the terms with $i = j$ which represent the self-energy of the charges. We shall see however that even this very crude proceeding is not sufficient to avoid infinite terms of non-electrostatic origin in the self-energy.

The problem which we meet now in quantum electrodynamics is identical with that of radiation theory since our new Hamilton function R is the Hamilton function of radiation theory plus the electrostatic energy. We have hitherto considered in the radiation theory as unperturbed system, the system obtained by neglecting the interaction between atom and radiation field. The interaction term had then simply the effect of determining transitions between different states of the unperturbed system which have the same or nearly the same unperturbed energy.

But we can ask whether there are quantum states for the complete problem. This problem is mathematically very difficult and can only be discussed by the method of successive approximations. However the second approximation still yields an infinite perturbation term in the energy levels and it seems therefore probable, that for point electrons there are no quantum states of the unperturbed problem. It could be noticed however that the application of the perturbation method is for this problem extremely uncertain, since the differences between the quantum states of the unperturbed problem are very small in comparison with the perturbation.

To all these difficulties no satisfactory answer has yet been given. One would be tempted to give the electron a finite radius; this would actually avoid infinite terms, as in the classical theory of electromagnetic masses. But this method is connected with serious difficulties for the relativistic invariance.

In conclusion we may therefore say that practically all the problems in radiation theory which do not involve the structure of the electron have their satisfactory explanation; while the problems connected with the internal properties of the electron are still very far from their solution.

BIBLIOGRAPHY.

We collect here some of the papers on quantum theory of radiation and quantum electrodynamics:

- E. AMALDI, « *Rend. Lincei* », 9, 876 (1929) (Theory of Raman effect).
 F. BLOCH, « *Phys. Zeits.* », 29, 58 (1928) (Reaction of radiation).
 G. BREIT, « *Phys. Rev.* », 34, 553 (1929) (Interaction of two electrons).
 P. A. M. DIRAC, « *Proc. Roy. Soc.* », A 114, 243 (1927). (General theory); « *Proc. Roy. Soc.* », A 114, 710 (1927) (Dispersion); « *Proc. Camb. Phil. Soc.* », 26, 361 (1903) (Transition of the electron from positive to negative states).

- E. FERMI, « *Rend. Lincei* », 10, 72 (1929) (Lippmann fringes); « *Rend. Lincei* », 9, 881 (1929); 12, 431 (1930) (Quantum electrodynamics); « *Annales Inst. Poincaré* », 1929 (General theory of radiation); « *Nuovo Cim.* », 8, 121 (1931) (Quantum theory of electromagnetic mass).
- J. A. GAUNT and W. H. MCCREA, « *Proc. Camb. Phil. Soc.* », 23, 930 (1927) (Quadrupole radiation).
- M. GÖPPERT-MAYER, « *Ann. d. Physik* », 9, 273 (1931) (Double transitions).
- W. HEISENBERG, « *Ann. d. Physik* », 9, 338 (1931) (Correspondence between classical and quantum theoretical properties of light); « *ZS. f. Physik* », 65, 4 (1930) (Self-energy of the electron).
- W. HEISENBERG and W. PAULI, « *ZS. f. Physik* », 56, 1 (1929); 59, 168 (1930) (Quantum electrodynamics).
- P. JORDAN and W. PAULI, « *ZS. f. Physik* », 47, 151 (1928) (Quantum electrodynamics of spaces without electric charges).
- S. KIKUCHI, « *ZS. f. Physik* », 68, 803 (1931) (Compton Effect).
- L. LANDAU and R. PEIERLS, « *ZS. f. Physik* », 62, 188 (1930). (Quantum electrodynamics).
- J. R. OPPENHEIMER, « *Phys. Rev.* », 35, 461 (1930) (Interaction of field and matter); « *Phys. Rev.* », 35, 939 (1930) (Annihilation of electrons and protons).
- G. RACAH, « *Rend. Lincei* », 11, 837, 1100 (1930) (Interference).
- L. ROSENFELD, « *Ann. d. Physik* », 5, 113 (1930) (Quantization of wave fields).
- E. SEGRÈ, « *Rend. Lincei* », 9, 887 (1929) (Fluorescence).
- I. TAMM, « *ZS. f. Physik* », 60, 345 (1930) (Scattering of light in solid bodies); « *ZS. f. Physik* » 62, 7 (1930) (Compton effect, annihilation of electrons and protons).
- I. WALLER, « *ZS. f. Physik* », 58, 75 (1929); 61, 837 (1930) (Scattering); 62, 673 (1930) (Self-energy of the electron).
- V. WEISSKOPF, « *Ann. d. Physik* », 9, 23 (1931) (Fluorescence).
- V. WEISSKOPF and E. WIGNER, « *ZS. f. Physik* », 63, 54 (1930); 65, 18 (1930) (Width of spectral lines).

N° 68.

This paper was suggested to Fermi by Rasetti's observation that the totally symmetric vibration of the CO_2 molecule manifests itself in the Raman spectrum with a group of 4 closely spaced lines, instead of one line as expected. When Rasetti returned to Rome from Pasadena where he had performed the experiment, this puzzling result was the object of much discussion with Fermi. Several unsatisfactory explanations were discarded. Finally, Fermi hit upon the correct interpretation and immediately performed the calculations by means of the perturbation theory. The effect was shown to be due to an accidental degeneracy of the first excited state of the above-mentioned vibration with the second excited state of the transverse vibration, whose frequency happens to be almost exactly half of the former. This became the first known case of a phenomenon that was later observed in several organic molecules, among them CCl_4 , as discussed in another of Fermi's papers (N° 71).

This explanation of the apparently anomalous Raman effect in CO_2 aroused considerable interest at the Leipzig conference on molecular structure, where it was reported by Rasetti⁽¹⁾. The Raman effect was one of the main topics discussed at that conference.

F. RASETTI.

68.

ÜBER DEN RAMANEFFEKT DES KOHLENDIOXYDS

« Z. Physik », 71, 250–259 (1931).

Das Ramanspektrum des CO_2 wird theoretisch erklärt; es wird gezeigt, dass das Auftreten von zwei Ramanlinien, wo man nach dem Modell des CO_2 -Moleküls nur eine erwarten würde, auf eine zufällige quasi Entartung von zwei Schwingungsniveaus zurückgeführt werden kann.

Das Ramanspektrum des gasförmigen CO_2 besteht⁽²⁾ aus zwei ziemlich starken Ramanlinien mit Frequenzen von 1285 und 1388 Wellenzahlen; in der Nähe von diesen beiden Linien werden noch zwei andere sehr schwache Trabanten beobachtet. Zweck dieser Arbeit ist, dieses Spektrum aus dem Modell des CO_2 -Moleküls abzuleiten.

1. Beim CO_2 liegen bekanntlich die drei Atome in der Ruhelage auf einer Geraden, und zwar das C-Atom im Mittelpunkte zwischen den beiden O-Atomen (Fig. 1^a). Fasst man die drei Atome als elastisch gebundene Massenpunkte auf, so hat dieses System mechanisch drei Grundfrequenzen ν_1 , ν_2 ,

(1) F. RASETTI, in Debye, Leipziger Vortraege 1931, pp. 59–69. Hirzel, Leipzig, 1931.

(2) F. RASETTI, « Nature », 123, 205 (1929); R. G. DICKINSON, R. T. DILLON u. F. RASETTI, « Phys. Rev. », 34, 582 (1929).

ν_3 , welche den Bewegungsformen ⁽³⁾ *b*, *c*, *d* in Fig. 1 entsprechen. Die Frequenz ν_2 ist zweifach entartet; die anderen sind einfach. Nun ist die Frage zu verstehen, wie man aus diesen drei Grundfrequenzen das Ramanspektrum erklären kann, weil es von vornherein unwahrscheinlich ist, dass die beobachteten Ramanlinien irgendwie aus den Rotationen des Moleküls oder aus elektronischen Niveaus herrühren.

Von den drei Grundfrequenzen ν_1 , ν_2 , ν_3 sind offensichtlich nur die zwei letzten optisch aktiv, weil die erste wegen der Symmetrie der Bewegung, mit keinem schwingenden Dipol verbunden ist. In der ultraroten Absorption werden also nur ν_2 und ν_3 , abgesehen von Kombinationen, beobachtet.

In der Tat werden im Ultraroten zwei besonders intensive Banden bei 14,87 und 4,27 μ beobachtet ⁽⁴⁾, entsprechend zu 673 bzw. 2350 Wellenzahlen; diese Frequenzen sind wahrscheinlich mit den Grundfrequenzen ν_2 und ν_3 zu identifizieren. Und zwar

$$\nu_2 = 673 \quad ; \quad \nu_3 = 2350,$$

weil es aus den Bewegungstypen (Fig. 1) plausibel erscheint, dass $\nu_3 > \nu_2$.

Die Frequenz ν_1 ist optisch inaktiv und kann deswegen aus dem ultraroten Spektrum nicht direkt ermittelt werden. Ihr Wert kann trotzdem mit Hilfe der folgenden Betrachtungen abgeschätzt werden. Die beiden Grundfrequenzen ν_1 und ν_3 sind in erster Näherung von der Stärke der elastischen Bindung zwischen dem C-Atom und den beiden O-Atomen, bestimmt. Falls man die Bindung zwischen den beiden O-Atomen vernachlässigt, werden also die beiden Grundfrequenzen ν_1 und ν_3 von einem einzigen elastischen Koeffizienten bestimmt. Sei kx die elastische Kraft zwischen einem O-Atom und dem C-Atom, wenn sie um x relativ zueinander verschoben sind. Seien weiter M und m die Massen von C und O. Dann hat man mit unseren vereinfachenden Hypothesen

$$(1) \quad \nu_1 \cong \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \nu_3 \cong \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{2m+M}{M}}.$$

Die Frequenzen ν_1 und ν_3 stehen also angenähert im Verhältnis

$$(2) \quad \frac{\nu_3}{\nu_1} \cong \sqrt{\frac{2m+M}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16 + 12}{12}} = 1,91.$$

Aus dem angegebenen Wert von ν_3 findet man also

$$\nu_1 \cong 1230.$$

(3) D. M. DENNISON, « Rev. Mod. Phys. », 3, 280 (1931).

(4) E. F. BARKER, « Astrophys. Journ. », 55, 391 (1922); C. SCHAEFER u. B. PHILIPPS, « ZS. f. Phys. », 36, 641 (1926); A. EUCKEN, « ZS. f. Phys. », 37, 14 (1926).

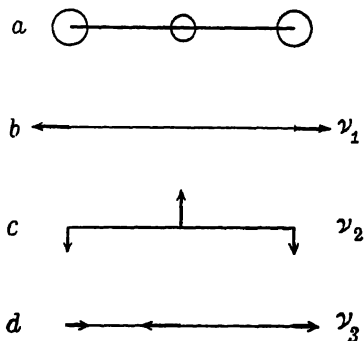


Fig. 1.

Dieser letzte Wert ist natürlich nur grob angenähert; wir werden sehen, dass ν_1 wahrscheinlich ungefähr 100 Wellenzahlen höher liegt.

2. Wir haben gesagt, dass nur die Frequenzen ν_2 und ν_3 optisch aktiv sind. Im Ramaneffekt muss man dagegen erwarten, dass nur die Frequenz ν_1 intensiv ist. Dies hat darin seinen Grund⁽⁵⁾, dass die Bewegungstypen ν_2 und ν_3 (vgl. Fig. 1) symmetrisch verlaufen (d.h. nach einer halben Periode befindet sich das Molekül in einer Lage, welche symmetrisch zur Anfangslage ist). Dagegen ist der erste Bewegungstyp nicht symmetrisch und kann also im Ramaneffekt erscheinen. Und zwar tritt bekanntlich intensiv im Ramanpektrum nur die Grundfrequenz und nicht ihre Obertöne auf⁽⁶⁾.

Man würde also ein Ramanspektrum erwarten, bestehend aus einer einzigen intensiven Linie in der Umgebung von 1230 Wellenzahlen. Nun liegt zwar die Frequenz der Ramanlinien nicht weit von diesem Wert entfernt; das Spektrum hat jedoch eine beträchtlich kompliziertere Struktur: zwei starke und zwei schwache Linien. Wir werden zuerst die starken Linien diskutieren; die schwachen Komponenten rühren von einem thermisch angeregten Schwingungszustand mit einem Quantum der Frequenz 673 her; wir werden diesen Punkt erst später untersuchen.

Für das Auftreten von zwei starken Frequenzen an Stelle von einer schlagen wir folgende Erklärung vor.

In Fig 2 ist ein theoretisches Schema der tieferen Schwingungsniveaus unseres Moleküls dargestellt. Das Schema wurde dadurch vereinfacht, dass die Entartung der Frequenz ν_2 vorläufig vernachlässigt worden ist; die zwei Oszillatoren mit den Frequenzen ν_1 und ν_2 wurden vorerst als exakt harmonisch und ungekoppelt angenommen; die Frequenz ν_3 kommt für die tieferen Niveaus nicht in Betracht, weil sie viel höher liegt. Die neben den Niveaus angeschriebenen zwei Zahlen bedeuten die Quantenzahlen der beiden Oszillatoren ν_1 und ν_2 . Man würde eine Ramanlinie erwarten, entsprechend dem Übergang $(1, 0) - (0, 0)$.

Die Möglichkeit, zwei starke Ramanlinien zu erhalten, entsteht durch die Tatsache, dass die beiden Niveaus $(1, 0)$ und $(0, 2)$ beinahe zusammenfallen. In der Tat ist $2\nu_2 = 1346$. ν_1 ist nicht exakt bekannt, liegt aber gewiss in der Nähe von diesem Wert. Hierdurch stören sich die beiden Zustände $(1, 0)$ und $(0, 2)$ sehr stark, so dass die Quantenzustände, welche infolge der Kopplung zwischen den beiden Oszillatoren ν_1 und ν_2 aus ihnen entstehen, Eigenfunktionen entsprechen, welche lineare Kombinationen der ungestörten Eigenfunktionen $(1, 0)$ und $(0, 2)$ sind, und zwar sind die Koeffizienten von $(1, 0)$ für beide gestörte Eigenfunktionen von der Grössenordnung 1. Beide Zustände können also im Ramaneffekt intensiv mit dem Grundniveau kombinieren, weil beide einen grossen Prozentsatz der Eigen-

(5) C. MANNEBACK, « ZS. f. Phys. », 62, 224 (1930).

(6) J. H. VAN VLECK, « Proc. Nat. Acad. Amer. », 15, 754 (1929).

funktion $(1, 0)$ enthalten, die mit $(0, 0)$ stark kombiniert. Wir werden auch zeigen, dass der beobachtete Frequenzunterschied (103 Wellenzahlen) zwischen den beiden starken Ramanlinien mit dieser Hypothese recht gut verträglich ist.

3. Der Sachverhalt ist in Wirklichkeit wegen der Entartung der Frequenz ν_2 etwas komplizierter. Diese Entartung entsteht durch die Möglichkeit⁽³⁾ für das C-Atom, in beliebigen Richtungen der Ebene senkrecht durch den Mittelpunkt der Molekülachse zu schwingen. Die Eigenfunktionen müssen also mit drei Zahlen numeriert werden, auch wenn die Quantenzahl der grossen Frequenz ν_3 als 0 festgesetzt wird, wie wir hier immer annehmen wollen.

Als Koordinaten für die Bestimmung der Bewegung nehmen wir die folgenden: x bedeutet die Projektion der Verschiebung der O-Atome auf der Molekülachse. ξ und η sind die Projektionen der Verbindungslinie des C-mit einem der O-Atome auf zwei senkrecht zueinander und zur Molekülachse stehende feste Richtungen. (Vgl.

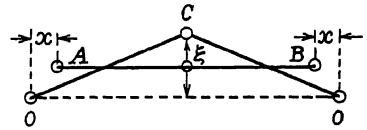


Fig. 3.

Fig. 3, wo AB die Gleichgewichtslage des Moleküls, C, O, O' die augenblicklichen Lagen der drei Atome darstellen. Die Figur ist auf eine Ebene parallel zur Molekülachse und zu ξ projiziert.) x ist die Koordinate der Bewegung ν_1 ; ξ, η die Koordinaten der beiden entarteten Bewegungen mit der Frequenz ν_2 ; von einer vierten Koordinate für die Bewegung ν_3 wurde abgesehen, weil die Frequenz ν_3 nicht angeregt ist.

Die schwingende Masse für die Koordinate x ist

$$(3) \quad m_x = 2m.$$

Für ξ, η ist die schwingende Masse m_2 gleich der reduzierten Masse zwischen $2m$ und M , d. h.

$$(4) \quad m_2 = \frac{2mM}{2m + M}.$$

Ein Quantenzustand des ungestörten Systems wird mit drei Quantenzahlen bezeichnet, etwa (n_x, n'_2, n''_2) . n_x, n'_2, n''_2 sind die Quantenzahlen der Variablen x, ξ, η . Die ungestörte Energie ist (wenn man der Übersichtlichkeit wegen die Nullniveaus der Energie ein halbes Quantum höher nimmt als üblich, so dass die Nullpunktsenergien verschwinden)

$$(5) \quad E_{n_x n'_2 n''_2} = h\nu_1 n_x + h\nu_2 (n'_2 + n''_2).$$

Die ungestörten Eigenwerte $(0, 2, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 2)$ sind also exakt entartet; ihr Wert ist (wegen der Tatsache, dass $\nu_1 \cong 2\nu_2$) sehr nahe an dem ungestörten Eigenwert $(1, 0, 0)$.

Im ungestörten Problem hat die potentielle Energie die Form

$$(6) \quad kx^2 + \alpha(\xi^2 + \eta^2),$$

wo k und α Konstanten darstellen; der Wert von k kann angenähert durch (1) berechnet werden. α kann aus der Frequenz ν_2 mit der Gleichung

$$(7) \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\alpha(2m+M)}{2mM} \right]$$

gewonnen werden.

4. Wir wollen jetzt die Störungsenergie berechnen, und zwar nur bis auf Glieder dritter Ordnung in den Koordinaten. Aus Symmetriegründen findet man sofort, dass nur Glieder von den Typen

$$x^3 \quad \text{und} \quad x(\xi^2 + \eta^2)$$

vorkommen können. Das erste Glied bewirkt keine Kopplung zwischen den Oszillatoren, da es nur von x abhängt. Wir brauchen also dieses Glied nicht zu berücksichtigen, und wir könnten es eventuell in der ungestörten Energie mitberücksichtigen. Als Kopplungsglied nehmen wir also nur

$$(8) \quad U = \beta x (\xi^2 + \eta^2),$$

wo β eine Konstante darstellt.

Man kann auch mit plausiblen Annahmen die Größenordnung von β abschätzen. Nehmen wir dafür an, dass die potentielle Energie des Moleküls für die Bewegungstypen ν_1 und ν_2 sich als Summe einer Funktion der Entfernung CO (Fig. 3), welche die Bewegung ν_1 bestimmt, und einer Funktion des Winkels zwischen CO und der Molekülachse, welche die Schwingung ν_2 bestimmt, darstellen lässt. In dieser Annahme, die eigentlich sehr willkürlich ist, findet man mit leichten Rechnungen, indem man (6) berücksichtigt:

$$(9) \quad \beta = \frac{k-2\alpha}{a},$$

wo a die Entfernung CO für die Gleichgewichtslage darstellt, deren Wert sich aus dem Trägheitsmoment⁽⁷⁾ $70 \cdot 10^{-40}$ berechnen lässt. Man findet

$$a = 1,15 \cdot 10^{-8}.$$

5. Wir betrachten nunmehr die vier quasientarteten Eigenfunktionen $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 1)$ und berechnen die zugehörigen Matrixelemente der Kopplungsenergie (8). Dies geschieht ohne weiteres mit Hilfe der bekannten Formeln für die Matrix der Koordinate q eines Oszillators mit Masse m :

$$(10) \quad q_{n,n+1} = \sqrt{\frac{\hbar}{8\pi^2\nu m}} \sqrt{n+1}.$$

Alle anderen Matrixelemente verschwinden. Hierdurch finden wir

$$(11) \quad x_{01} = x_{10} = \sqrt{\frac{\hbar}{8\pi^2\nu_1 m_1}} \quad ; \quad (\xi^2)_{02} = \xi_{01} \xi_{12} = \frac{\hbar}{8\pi^2\nu_2 m_2} \sqrt{2}.$$

(7) W. HOUSTON, « Phys. Rev. », 37, 227 (1931).

Mit Anwendung dieser Formeln finden wir die gewünschten Matrixelemente:

$$(12) \quad U(100, 020) = U(100, 002) = P.$$

$$(13) \quad U(100, 011) = 0,$$

wo gesetzt wurde

$$(14) \quad P = \frac{\beta h^{3/2}}{8 \sqrt{2} \pi^3 \nu_1 m_1 \nu_2 m_2}.$$

Die Eigenfunktion $(0, 1, 1)$ wird also vom Störungsglied mit den anderen Eigenfunktionen nicht gekoppelt; da diese Eigenfunktion im Ramaneffekt inaktiv ist, brauchen wir sie also nicht zu berücksichtigen.

Die Energiematrix für die anderen Eigenfunktionen wird also

$$(15) \quad \begin{vmatrix} A & P & P \\ P & B & 0 \\ P & 0 & B \end{vmatrix},$$

wo A den ungestörten Eigenwert $(1, 0, 0)$ und B den ungestörten Eigenwert $(0, 0, 2)$ darstellt.

Die Energiematrix (15) hat die drei Eigenwerte

$$(16) \quad B, \frac{A+B}{2} \pm \sqrt{2P^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2},$$

welche linearen Kombinationen der drei Eigenfunktionen $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ entsprechen. Der Eigenwert B gehört zur linearen Kombination

$$(17) \quad (0, 0, 2) - (0, 2, 0),$$

welche die Eigenfunktion $(1, 0, 0)$ nicht enthält. Da der Ramanübergang gerade durch $(1, 0, 0)$ ermöglicht wird, wird also der Term (17) im Raman-effekt nicht auftreten. Es bleiben also nur die zwei anderen Eigenwerte

$$(18) \quad \frac{A+B}{2} \pm \sqrt{2P^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2}.$$

Diese entsprechen den linearen Kombinationen

$$(19) \quad \frac{1}{P} \left[\frac{A-B}{2} \pm \sqrt{2P^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2} \right] (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 2),$$

die tatsächlich die Eigenfunktion $(1, 0, 0)$ enthalten, welche die Raman-übergänge nach dem Grundniveau ermöglicht.

Es scheint nun, dass das beobachtete Ramanspektrum von CO_2 sich recht gut durch die Annahme erklären lässt, dass die beiden ungestörten Niveaus A und B fast genau zusammenfallen. Setzen wir in (18) $A = B$, so finden wir die beiden Energien

$$(20) \quad A \pm \sqrt{2} P.$$

Die Kombination mit dem Grundniveau (0, 0, 0) gibt also zwei Ramanlinien mit den Frequenzen (20); also mit dem Frequenzunterschied

$$(21) \quad \Delta\nu = 2\sqrt{2} P.$$

Mit Hilfe von (14), (9), (7), (4), (3), (1) unter Zugrundelegung der angegebenen Werte von ν_2 , ν_3 , a kann P numerisch abgeschätzt werden; man findet

$$P = 40 \text{ Wellenzahlen.}$$

Aus (21) erhalten wir also

$$\Delta\nu = 113.$$

Dieser Wert stimmt sehr gut mit der experimentell gefundenen Aufspaltung von 103 Wellenzahlen; die Übereinstimmung ist sogar grösstenteils zufällig, da wir die Konstante β von Formel (8) nur grob abgeschätzt haben. Wichtig für uns war nur festzustellen, dass man für die Aufspaltung die richtige Grössenordnung erhält.

Für $A = B$ wird (19):

$$\pm \sqrt{2} (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 2).$$

Man sieht also, dass mit dieser Hypothese der Prozentsatz der Eigenfunktion (1, 0, 0) in den beiden gestörten Eigenfunktionen derselbe ist (50%). Man würde deshalb die gleiche Intensität für die beiden starken Ramanlinien erwarten. Nun ist aber die Ramanlinie mit grösserer Frequenz etwas stärker, was man gut durch die Annahme verstehen kann, dass A ein wenig grösser als B ist; es genügt ein Unterschied von ungefähr 10 Wellenzahlen, um den beobachteten Intensitätsunterschied zu erklären.

Durch diese Betrachtungen sind also die beiden lichtstärkeren Ramanlinien vollständig gedeutet.

6. Es bleibt noch, den Ursprung der beiden schwachen Ramanlinien zu diskutieren. Diese beiden Linien können, wie wir bereits angedeutet haben, auf die Wirkung der Moleküle zurückgeführt werden, die durch thermische Anregung ein Quantum von der Frequenz 673 enthalten [Zustand (0, 1) des vereinfachten Niveauschemas von Fig. 2]. Der Boltzmannfaktor hat für diesen Zustand bei Zimmertemperatur den Wert $1/28$; da aber das statistische Gewicht des angeregten Zustandes 2 ist, findet man im thermischen Gleichgewicht $1/14$ Moleküle im Zustand (0, 1).

Der Zustand (0, 1) kombiniert im Ramaneffekt mit dem Zustand (1, 1). Da aber dieses Niveau sehr nahe an (0, 3) liegt (Fig. 2), erhalten wir wieder durch denselben Mechanismus wie früher zwei Ramanlinien.

Zur quantitativen Berechnung muss man natürlich die Entartung der Frequenz ν_2 berücksichtigen. Der Zustand (1, 1) ist zweifach: (1, 1, 0) und (1, 0, 1); der Zustand (0, 3) ist vierfach: (0, 3, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 2) und (0, 0, 3). Die Energiematrix, die diesen sechs Eigenfunktionen entspricht,

kann wie früher ohne weiteres berechnet werden, indem man als Störungsenergie wieder (8) nimmt. Man findet die Energiematrix:

$$(22) \quad \begin{vmatrix} A' & 0 & \sqrt{3} P & 0 & P & 0 \\ 0 & A' & 0 & P & 0 & \sqrt{3} P \\ \sqrt{3} P & 0 & B' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & B' & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & B' & 0 \\ 0 & \sqrt{3} P & 0 & 0 & 0 & B' \end{vmatrix},$$

wo A' und B' die ungestörten Eigenwerte darstellen. P ist wieder durch (14) gegeben.

Die Matrix (22) spaltet sich in zwei gleiche Matrizen dritter Ordnung

$$(23) \quad \begin{vmatrix} A' & \sqrt{3} P & P \\ \sqrt{3} P & B' & 0 \\ P & 0 & B' \end{vmatrix},$$

welche die Eigenfunktionen $(1, 1, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 1, 2)$ und $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 3)$, $(0, 2, 1)$ koppeln; beide Gruppen geben natürlich dieselben Linien, so dass es genügt, nur die erste Gruppe zu berücksichtigen.

Die Matrix (23) hat die drei Eigenwerte

$$(24) \quad B'; \quad \frac{A' + B'}{2} \pm \sqrt{4P^2 + \left(\frac{A' - B'}{2}\right)^2}.$$

Der Eigenwert B' wird jedoch im Ramaneffekt nicht beobachtet, weil die entsprechende Eigenfunktion

$$(0, 3, 0) - \sqrt{3} (0, 1, 2)$$

$(1, 1, 0)$ nicht enthält. Die beiden anderen Eigenwerte entsprechen den Eigenfunktionen

$$\frac{1}{P} \left\{ \frac{A' - B'}{2} \pm \sqrt{4P^2 + \left(\frac{A' - B'}{2}\right)^2} \right\} (1, 1, 0) + \sqrt{3} (0, 3, 0) + (0, 1, 2),$$

enthalten also die ungestörte Eigenfunktion $(1, 1, 0)$, welche die Ramanübergänge ermöglicht.

Machen wir auch in diesem Falle die Hypothese $A' = B'$, so erhalten wir die beiden Eigenwerte $A' \pm 2P$.

Die Aufspaltung der zwei schwachen Ramanlinien ist also

$$(25) \quad \Delta' \nu = 4P.$$

Ein Vergleich mit (21) ergibt das Verhältnis zwischen den Aufspaltungen der schwachen und der starken Ramanlinien. Man findet

$$(26) \quad \frac{\Delta' \nu}{\Delta \nu} = \sqrt{2}$$

in vorzüglicher Übereinstimmung mit dem experimentellen Verhältnis 1,4.

Aus den Intensitäten der beiden schwachen Ramanlinien kann man auch für diesen Fall schliessen, dass A' um einige Wellenzahlen höher als B' liegt, was jedoch nur einen Effekt zweiter Ordnung auf die Werte der Aufspaltungen $\Delta\nu$ und $\Delta'\nu$ ausübt, so dass das Verhältnis (26) noch mit grosser Annäherung gültig bleibt.

Zusatz bei der Korrektur. Durch den in dieser Arbeit für das Beispiel des CO₂ erläuterten Mechanismus dürften wahrscheinlich auch bei anderen Molekeln, hauptsächlich bei solchen mit vielen Eigenfrequenzen, mehr Ramanlinien erscheinen, als man nach den üblichen Theorien erwarten würde.

Dies scheint z. B. bei CS₂ der Fall zu sein; beobachtet werden zwei Ramanfrequenzen von 655 und 800 Wellenzahlen. Da CS₂ dieselbe gestreckte Struktur wie CO₂ hat, würde man erwarten, dass nur eine von den drei Eigenfrequenzen in Ramaneffekt aktiv ist. Die Anwesenheit von zwei Ramanlinien rührt wahrscheinlich auch in diesem Falle von derselben quasi-Entartung ($\nu_1 \cong 2\nu_2$) wie bei CO₂ her. Die Intensitäten der beiden Ramanlinien 655 und 800 werden als 10 bzw. 2 geschätzt. Dieser ziemlich grosse Intensitätsunterschied zeigt, dass ν_1 wesentlich kleiner als $2\nu_2$ ist. Aus einem Intensitätsverhältnis 5 erhält man $2\nu_2 - \nu_1 \cong 100$ Wellenzahlen. Man würde also als ungestörte Werte der Eigenfrequenzen $\nu_1 = 678$ und $\nu_2 = 388$ erhalten; diese Werte sind natürlich ziemlich ungenau, weil das Intensitätsverhältnis nur geschätzt ist.

Es ist wahrscheinlich, dass dieselbe Erscheinung auch bei CCl₄ vorliegt. In diesem Falle sind theoretisch vier verschiedene Eigenfrequenzen zu erwarten, welche alle im Ramaneffekt aktiv sein müssen. Experimentell findet man, dass die grösste von diesen Frequenzen in zwei Komponenten von 758 und 789 cm⁻¹ zerfällt. Dieses Verhalten kann dadurch erklärt werden, dass die Summe von zwei anderen beobachteten Grundfrequenzen $314 + 459 = 773$ ist; diese Summe liegt also fast genau in der Mitte zwischen den beiden beobachteten hohen Ramanfrequenzen. Auch in diesem Falle liegt also eine zufällige quasi-Entartung vor, wodurch die Aufspaltung gedeutet werden kann; die Symmetrieverhältnisse des Moleküls lassen tatsächlich ein Kopplungsglied zu, das diese Aufspaltung ermöglichen kann.

N° 69.

As explained in a footnote, the experimental part of this work was performed by Rasetti, using his technique of exciting Raman spectra with the resonance line of mercury and subsequently absorbing the exciting line with mercury vapor, thus permitting the unhindered observation of weak Raman lines of low frequency shifts. By this technique, the weak, second-order Raman spectrum of rocksalt, which owing to the symmetry of the lattice does not possess a first-order spectrum, was photographed. Fermi was entirely responsible for the theory. He showed that the second-order spectrum should be a continuum, in agreement with experiment, extending up to twice the characteristic infrared absorption frequency of the crystal.

The theory of the effect was later developed in much greater detail by Born and Bradburn⁽¹⁾ who found even closer agreement with the observations on rocksalt. The objections raised by Raman and coworkers against the existence of a continuum and its interpretation seem totally unfounded.

F. RASETTI

69.

ÜBER DEN RAMANEFFEKT DES STEINSALZES (*)

E. FERMI und F. RASETTI

«Z. Physik», 71, 689–695 (1931)

Es ist gelungen, mit einer besonders lichtstarken Methode, den Ramaneffekt des Steinsalzes zu beobachten. Das Ramanspektrum weicht von den gewöhnlich bei den Kristallen beobachteten Ramanspektren nicht nur wegen seiner Schwäche, sondern auch wegen seiner kontinuierlichen Struktur ab. Es wird eine qualitative Theorie für dieses Spektrum vorgeschlagen, in welcher es als ein Ramaneffekt zweiter Näherung gedeutet wird.

Die Symmetrie des Steinsalzgitters lässt bekanntlich erwarten⁽²⁾, dass es keine der ultraroten Eigenschwingung bei $52\ \mu$ entsprechende Ramanlinie haben soll. Ein Ramaneffekt kann nur als Erscheinung höherer Ordnung erwartet werden.

In der Tat hatte man bisher mit den gewöhnlichen Methoden keinen Ramaneffekt beim Steinsalz oder bei den anderen ähnlich gebauten Alkalihalogenidkristallen gefunden. Es ist nun gelungen, durch sehr starke Anregung im Ultraviolett und ziemlich langer Expositionsdauer ein gut ausgeprägtes Ramanspektrum auch bei Steinsalz zu beobachten.

Die experimentelle Anordnung ist vielfach von einem von uns beschrieben worden⁽³⁾. Als primäres Licht dient die Resonanzlinie $\lambda\ 2537$ des Quecksilbers,

(1) M. BORN and MARY BRADBURN, «Proc. Roy. Soc.», A 188, 161 (1947).

(*) In dieser Arbeit rührt der experimentelle Teil von F. RASETTI, der theoretische Teil von E. FERMI her.

(2) C. SCHAEFER, «ZS. f. Phys.», 54, 153, (1929).

(3) F. RASETTI, ebenda, 66, 646 (1930).

die von einer sehr intensiven wassergekühlten Quecksilberlampe emittiert wird. Das zerstreute Licht unveränderter Frequenz wird durch Quecksilberdampf wieder absorbiert; dieser Kunstgriff ist für die Beobachtung schwacher Ramanspektren in der Nähe der Anregungsfrequenz sehr wesentlich.

Als Kristall wurde ein Steinsalzprisma eines Spektrometers für das Ultrarot benutzt; seine Höhe betrug ungefähr 5 cm. Die Lampe war neben einer Seitenfläche des Prismas parallel zur Achse eingestellt, so dass man durch mehrfache Reflexionen an den inneren Flächen des Prismas eine sehr starke

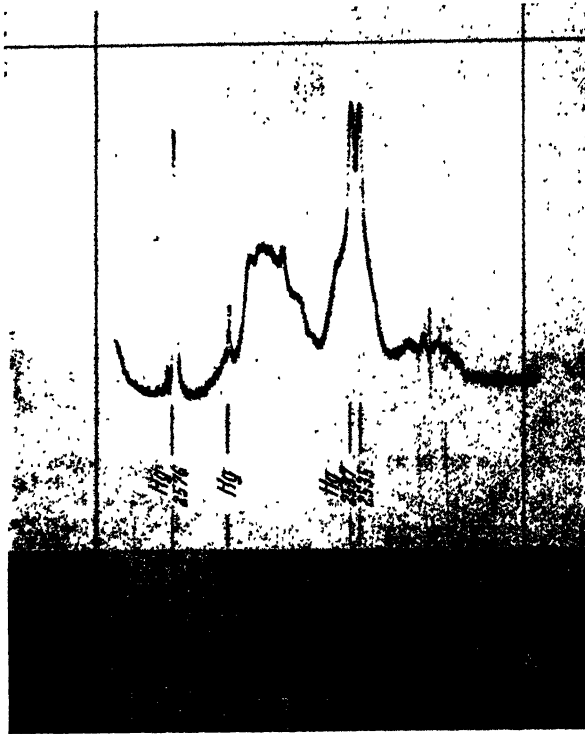


Fig. 1.

Beleuchtung erreichte; die Beobachtung geschah parallel zur Achse des Prismas, um eine möglichst grosse Dicke zu benutzen. Als Spektrograph wurde ein Hilgerscher Spektrograph E 315 verwendet; die Expositionsdauer betrug acht Stunden.

Das erhaltene Ramanspektrum ist in Fig. 1 wiedergegeben; die Intensitätsverteilung ist aus der Photometrie zu ersehen. Das Spektrum ist sehr schwach; unter denselben Bedingungen würde man etwa bei Kalkspat oder Quarz ein ziemlich starkes Ramanspektrum in wenigen Minuten erhalten. Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Kristallen, deren Ramanspektren aus ziemlich scharfen Linien bestehen, hat Steinsalz ein kontinuierliches Ramanspektrum mit unregelmässig verteilten Maxima und Minima, das wesentlich aus einem Teil in der Nähe der anregenden Linie (von 0 bis 50 cm^{-1}) und

einem Teil von 160 bis 365 cm^{-1} besteht; auch in der Lücke zwischen diesen beiden Spektralgebieten ist die Intensität nicht verschwindend, sondern nur etwas kleiner.

Wir wollen jetzt einige Betrachtungen entwickeln, welche die beobachteten Erscheinungen mindestens qualitativ erklären.

Bekanntlich kann jedes Kristallgitter mit einem Kontinuum von Frequenzen schwingen. Wesentlich verschieden ist aber das Schwingungsspektrum, je nachdem das Gitter einfach oder komplex ist. Und zwar hat im ersteren Falle das Gitter für jede (vektorielle) Wellenzahl drei Grundfrequenzen, welche drei Schwingungsrichtungen der Partikel entsprechen; diese Frequenzen sind Funktionen der drei Komponenten der Wellenzahl und verschwinden für verschwindende Wellenzahl. Im Falle eines komplexen Gitters, welches aus s einfachen Gittern zusammengesetzt ist, hat man für jede Wellenzahl $3s$ im allgemeinen verschiedene Frequenzen; für verschwindende Wellenzahl schliessen sich drei von diesen Frequenzen an die Frequenz Null (akustische Schwingungen) an; die anderen schliessen sich dagegen an die ultraroten Frequenzen an, welche den Schwingungen der einzelnen einfachen Gitter gegeneinander entsprechen.

So hat man z. B. im Falle des Steinsalzes ein zusammengesetztes Gitter, welches aus den zwei gleichen flächenzentrierten Gittern der Cl- und der Na-Ionen besteht. Man hat also für jede Wellenzahl sechs Frequenzen, deren drei sich an die akustischen Schwingungen und drei an die ultrarote Reststrahlenfrequenz bei 52μ anschliessen.

Man kann nun beweisen⁽⁴⁾, dass nur solche Frequenzen in erster Näherung im Ramanspektrum eines Kristalls erscheinen, für welche die elastische Wellenzahl von der Grössenordnung der Wellenzahl des anregenden Lichtes ist; da diese letzte sehr klein in Bezug auf den reziproken Abstand aufeinanderfolgender Atome ist, kann man mit sehr guter Annäherung annehmen, dass die Wellenzahl der im Ramaneffekt wirksamen Eigenfrequenzen Null ist.

Um dies am besten zu sehen, wollen wir ein kleines Stück des Kristalls betrachten, dessen lineare Dimensionen klein in Bezug auf die optischen Wellenlängen, aber gross in Bezug auf die interatomaren Abstände angenommen werden, so dass man die Phasenunterschiede der Lichtwelle an verschiedenen Orten des Kristalls vernachlässigen kann.

Die Streuung des Lichtes wird bekanntlich in diesem Falle durch das vom Strahlungsfeld im Kristall induzierte elektrische Moment M bestimmt; dies hängt aber in erster Näherung von der elektrischen Polarisierbarkeit k des Kristalls nach der Formel

$$(1) \quad M = kE$$

ab, wo E die elektrische Feldstärke darstellt; M wurde auf die Volumeneinheit bezogen.

(4) L. MANDELSTAM, G. LANDSBERG, u. M. LEONTOWITSCH, «ZS. f. Phys.», 60, 334 (1930); IG. TAMM, ebenda S. 345.

Sind einige elastische Schwingungen des Kristalls angeregt, so ist eigentlich die Polarisierbarkeit nicht an allen Orten des Kristalls dieselbe, weil sie etwas von den örtlich verschiedenen Verzerrungen des Kristalls beeinflusst wird; man muss also in (1) für k den Mittelwert über den ganzen Kristall nehmen. In erster Näherung kann die Änderung der Polarisierbarkeit an einem Orte proportional der Verzerrung des Kristallgitters an demselben Orte angesetzt werden; der Einfluss einer elastischen Welle kleiner Wellenlänge an Orten entgegengesetzter Phase wird also entgegengesetzt sein und sich durch die Mittelung über den ganzen Kristall fortheben. Falls aber der ganze Kristall elastisch mit derselben Phase schwingt (Wellenzahl Null oder praktisch Null), hat man eine zeitlich periodische Schwankung der mittleren Polarisierbarkeit, mit derselben Frequenz ω der elastischen Schwingung. Das induzierte elektrische Moment (1) des ganzen Kristalls, in harmonischen Komponenten analysiert, hat eine grosse Komponente, die mit der Frequenz ν des anregenden Lichtes schwingt; diese bedingt die Rayleighstreuung un veränderter Frequenz; plus schwächere Komponenten, die mit den Kombinationsfrequenzen $\nu \pm \omega$ schwingen, welche die Ramanstreuung bedingen. Diese klassische Behandlung des Problems kann bekanntlich quantentheoretisch gedeutet werden.

Es ergibt sich also, dass in erster Näherung nur Frequenzen mit der elastischen Wellenzahl Null vorkommen können. Bei einem einfachen Gitter, wo man nur Schwingungen vom akustischen Typus hat, gibt es also in erster Näherung keine Ramanlinie, sondern nur eine sehr kleine richtungsabhängige Verbreiterung der Rayleighlinie, welche davon herrührt, dass in Wirklichkeit, wie oben angedeutet, nicht nur die Wellenzahl Null, sondern auch Wellenzahlen von der Grössenordnung der optischen Wellenzahl wirksam sind. Bei zusammengesetzten Gittern hat man aber für die Wellenzahl Null ausser der Frequenz Null noch ultrarote Frequenzen, welche den Schwingungen der verschiedenen einfachen Gitter gegeneinander entsprechen. Die Anzahl dieser Frequenzen ist $3s - 3$; einige von diesen Frequenzen können koinzidieren oder im Ramaneffekt inaktiv sein.

Dieser letzte Fall kommt im besonderen immer dann vor, wenn die betreffende Eigenschwingung symmetrisch ist, in dem Sinne, dass die Polarisierbarkeit eine gerade Funktion der Verrückung ist, was immer mit leicht erkennbaren Symmetrieverhältnissen des Kristallgitters zusammenhängt.

So wird z. B. beim Flussspat nur eine Ramanfrequenz bei 321 cm beobachtet⁽⁵⁾. Das Flussspatgitter besteht aus drei kubischen flächenzentrierten Gittern, wovon eines mit Ca- und zwei mit F-Atomen besetzt sind. Wegen der Symmetrie dieses Gitters hat man zwei dreifach entartete ultrarote Frequenzen mit der Wellenzahl Null. Eine entspricht der Schwingung des Ca gegen die beiden F-Gitter. Diese ist mit einem schwingenden elektrischen Dipolmoment verbunden, ist aber symmetrisch; entsprechend wird sie in ultraroter Absorption, nicht aber als Ramaneffekt beobachtet. Die andere Eigenfrequenz entspricht einer Schwingung der beiden F-Gitter gegeneinan-

(5) F. RASETTI, «Nature», 127, 626 (1931).

der, wobei das Ca-Gitter stehen bleibt. Diese Frequenz ist optisch inaktiv, ist aber unsymmetrisch und kommt also im Ramaneffekt vor.

Im Falle des Steinsalzes hat man drei zusammenfallende Frequenzen mit der Wellenzahl Null; die entsprechenden Schwingungen sind aber symmetrisch, und werden deswegen im Ramaneffekt nicht beobachtet. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass man bei Steinsalz keinen Ramaneffekt beobachten kann, sondern nur, dass ein etwaiger Ramaneffekt viel lichtschwächer als bei anderen Kristallen sein muss; es handelt sich nämlich um einen Ramaneffekt zweiter Näherung.

Wir wollen also den Ramaneffekt zweiter Näherung kurz besprechen: Die Tatsache, dass der Ramaneffekt bei Kristallen gewöhnlich aus scharfen Linien und nicht aus einem Kontinuum besteht, ist dadurch bedingt, dass man in erster Näherung nur Frequenzen mit der Wellenzahl Null beobachtet. Die Polarisierbarkeit des Kristalls ist eine Funktion der elastischen Verrückungen, welche in erster Näherung linear von diesen Verrückungen abhängt. Die linearen Glieder geben natürlich einen für den ganzen Kristall nicht interferierenden Anteil nur für die Wellenzahl Null. Falls aber, wie beim Steinsalz, die linearen Glieder verschwinden, muss man zur nächsten Näherung übergehen, also auch die quadratischen Glieder der Abhängigkeit der Polarisierbarkeit von den elastischen Verrückungen berücksichtigen. Das hat zur Folge, dass jetzt auch Schwingungen mit von Null verschiedener Wellenzahl wirksam sein können. Dies ist der Grund dafür, dass man im Ramaneffekt zweiter Näherung nicht scharfe Linien, sondern ein Kontinuum beobachtet.

Um diese Verhältnisse für den Fall des NaCl etwas genauer darzustellen, nehmen wir ein Koordinatensystem mit dem Zentrum in einem der Cl-Atome und den Achsen x, y, z parallel zu den Kristallachsen. Sei a die Entfernung zwischen einem Cl und dem nächsten Na-Atom. Dann liegen die Ruhelagen der Atome an den Stellen $x = n_1 a, y = n_2 a, z = n_3 a$, wo die n ganze Zahlen sind; und zwar ist das betreffende Atom ein Cl- oder ein Na-Atom, je nachdem $n_1 + n_2 + n_3$ gerade oder ungerade ist.

Für jede vektorielle Wellenzahl $f \equiv (f_1, f_2, f_3)$ hat das Steinsalzgitter sechs Eigenschwingungen mit sechs Frequenzen

$$\omega_i(f) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Zu jeder Eigenschwingung gehört eine Normalkoordinate q_{if} . Die Verrückung eines Atoms des Gitters drückt sich durch die Normalkoordinaten folgendermassen aus:

$$(2) \quad \xi_n = \sum_f \sum_{i=1}^6 q_{if} \begin{vmatrix} A_{if} \\ B_{if} \end{vmatrix} \cos \left[2\pi a (n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3) + \begin{vmatrix} \varphi_{if} \\ \psi_{if} \end{vmatrix} \right],$$

wo man die oberen (A, φ)- oder die unteren (B, ψ)-Ausdrücke nehmen muss, je nachdem $n_1 + n_2 + n_3$ gerade oder ungerade ist, d.h. je nachdem es sich um ein Cl- oder um ein Na-Atom handelt. Zu summieren ist über alle Wellenzahlen des Debyespektrums.

Die Polarisierbarkeit κ eines Atoms $n \equiv (n_1, n_2, n_3)$ des Gitters, hängt offenbar von den relativen Verschiebungen der umliegenden Atome ab. Sie ist also eine Funktion der Grössen $\xi_{n+l} - \xi_n$, wo n und l eine Abkürzung

für n_1, n_2, n_3 und l_1, l_2, l_3 darstellen. Wir wollen diese Funktion nach Potenzen dieser Variablen entwickeln, und zwar bis auf Glieder zweiter Ordnung; man findet:

$$(3) \quad x = x_0 + \sum_l \alpha_l (\xi_{n+l} - \xi_l) + \sum_{jl} \beta_{jl} (\xi_{n+j} - \xi_n) (\xi_{n+l} - \xi_n).$$

Nun ist offenbar, wegen der Symmetrie des Gitters, $\alpha_l = -\alpha_{-l}$; (3) wird also:

$$(4) \quad x = x_0 + \frac{1}{2} \sum_l \alpha_l (\xi_{n+l} - \xi_{n-l}) + \sum_{jl} \beta_{jl} (\xi_{n+j} - \xi_n) (\xi_{n+l} - \xi_n).$$

Um die Polarisierbarkeit des ganzen Kristalls zu erhalten, müssen wir den Mittelwert von (4) über das ganze Gitter nehmen; wir ersetzen in (4) die Ausdrücke (2) für die Verschiebungen und beachten, dass die Atome $n+l$ und $n-l$ gleichartig sind. Dann finden wir für die mittlere Polarisierbarkeit \bar{k} einen Ausdruck der Form

$$(5) \quad \bar{k} = k_0 + \sum_f \sum_{r,s=1}^6 A_{rsf} q_{rf} q_{sf},$$

weil sich alle anderen Glieder durch die Mittelung fortheben.

Setzen wir diesen Ausdruck für die mittlere Polarisierbarkeit in (1) ein und beachten, dass E mit der Frequenz ν des anregenden Lichtes schwingt und die Normalkoordinaten q_{if} mit den entsprechenden Eigenfrequenzen $\omega_i(f)$, so finden wir, dass das elektrische Moment M harmonische Komponenten mit den Kombinationsfrequenzen

$$(6) \quad \nu \pm 2 \omega_i(f) \quad ; \quad \nu \pm [\omega_i(f) + \omega_k(f)] \quad ; \quad \nu \pm [\omega_i(f) - \omega_k(f)]$$

hat, wobei nur Eigenfrequenzen derselben (vektoriellen) Wellenzahl zu kombinieren sind. Die Frequenzen (6) entsprechen den Stokesschen und anti-Stokesschen Ramanlinien; sie sind hier klassisch abgeleitet worden, man kann aber ohne Schwierigkeit zeigen, dass man auch mit einer quantentheoretischen Berechnung genau dieselben Frequenzen findet.

Das Ramanspektrum zweiter Näherung erstreckt sich also kontinuierlich von der Frequenz Null bis zum Doppelten der maximalen Eigenfrequenz, welche die Reststrahlenfrequenz, d. h. die Frequenz der Schwingung des Cl- und Na-Gitters gegeneinander ist. Aus der Grenze des Ramanspektrums bei 365 Wellenzahlen ergibt sich diese maximale Frequenz zu 183 Wellenzahlen, d. h. ungefähr 55μ , in ziemlich guter Übereinstimmung mit der aus den Reststrahlen erhaltenen Wellenlänge von 52μ .

Um die Intensitätsverteilung des Ramanspektrums zu berechnen, wären besondere Annahmen über die Beeinflussung der Polarisierbarkeit der Kristallatome durch die elastischen Verzerrungen notwendig. Es scheint deswegen vorläufig aussichtslos, die feineren Einzelheiten des Spektrums erklären zu wollen. Es sei nur bemerkt, dass die Frequenzen, welche zu derselben elastischen Wellenzahl gehören, zu sehr vielen verschiedenen Kombinationsfrequenzen Anlass geben. Für einige Frequenzen hat man übrigens Häufungen von Eigenschwingungen, welche Intensitätsmaxima im Ramanspektrum zur Folge haben, so dass man qualitativ recht gut das unregelmässige Aussehen des beobachteten Ramanspektrums verstehen kann.

N° 70.

For the introduction to this paper see N° 50.

70.

ÜBER DIE WECHSELWIRKUNG VON ZWEI ELEKTRONEN

H. BETHE und E. FERMI

« Z. Physik », 77, 296–306 (1932)

Die Zusammenhänge zwischen den Wechselwirkungsformeln von Breit ⁽¹⁾ und Møller ⁽²⁾ und der Quantenelektrodynamik werden diskutiert. Es wird gezeigt, dass die Breitsche Formel sich aus der Møllerschen (§ 1) und aus der Quantenelektrodynamik (§ 2) ableiten lässt, und dass aus der letzteren auch die Møllersche Formel folgt (§ 3).

Einleitung (*). Für die Wechselwirkung zweier Elektronen existieren die beiden Ansätze von Breit ⁽¹⁾ und Møller ⁽²⁾, die scheinbar von gänzlich verschiedenen Punkten ausgehen. Es erschien wünschenswert, die Beziehungen der beiden Ansätze zueinander und zur Quantenelektrodynamik zu untersuchen. Die Breitsche Differentialgleichung ist von Breit direkt aus der Quantenelektrodynamik abgeleitet worden, und Rosenfeld ⁽³⁾ hat gezeigt, dass die für die Breitsche Ableitung notwendige Formel der Quantenelektrodynamik sich aus dem von Møller angewandten Heisenbergschen ⁽⁴⁾ Korrespondenzverfahren ergibt. Wir werden die Breitsche Formel *direkt* aus der Møllerschen gewinnen, und für die Ableitung aus der Quantenelektrodynamik eine Form wählen, die ganz analog ist zu unserer Ableitung der Møllerschen Theorie, so dass die verschiedenen Näherungsverfahren besser vergleichbar werden.

Bekanntlich kann man aus der Quantenelektrodynamik genau die Coulombsche Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Elektronen ableiten, wenn man nur die Kopplung der *longitudinalen* Wellen des elektromagnetischen Feldes mit den Elektronen berücksichtigt ⁽⁵⁾. Jede Abweichung vom Coulomb-

(*) In dieser Arbeit wurde die deutsche Vektorschreibweise des Originals beibehalten (E. A.).

(1) G. BREIT, « Phys. Rev. », 34, 553 (1929); 39, 616 (1932).

(2) C. MØLLER, « ZS. f. Phys. », 70, 786 (1931).

(3) L. ROSENFELD, ebenda 73, 253, (1931).

(4) W. HEISENBERG, « Ann. d. Phys. », 9, 338, (1931).

(5) E. FERMI, « Rev. of Mod. Phys. », 4, 87 (1932), im folgenden als l. c. zitiert.

schen Gesetz muss daher durch die Wechselwirkung mit den *transversalen* Wellen zustandekommen, die wir im folgenden kurz als *Strahlungsfeld* bezeichnen. Die Kopplung zwischen Materie und Strahlungsfeld verursacht nun in *erster* Näherung nur solche Übergänge, bei denen sich der Quantenzustand der Elektronen ändert und ein Lichtquant absorbiert oder emittiert wird. Es interessieren uns aber die Matrixelemente der Wechselwirkungsenergie der Elektronen, welche einer Änderung des Quantenzustandes der Elektronen allein, ohne Änderung des Zustandes des Strahlungsfeldes, entsprechen, wobei wir insbesondere annehmen können, dass sowohl im Anfangs- wie im Endzustand keine Strahlung vorhanden sein soll. Solche Übergänge der Elektronen allein bekommt man offenbar erst durch einen Doppelprozess, wobei zuerst ein Quant emittiert und dann dasselbe Quant wieder absorbiert wird.

Die Ableitungen der Breitschen und der Møllerschen Formel aus der Quantenelektrodynamik unterscheiden sich nun wesentlich in folgendem: Im ersten Falle hat man die Coulombsche Wechselwirkungsenergie der Elektronen bereits in die « ungestörte Hamiltonfunktion » hineinzunehmen, die Störung ist dann lediglich die Wechselwirkung der Elektronen mit den transversalen Wellen des elektromagnetischen Feldes. Die Rechnung wird nur in nichtrelativistischer Näherung, d. h. nur bis zu Gliedern der Grössenordnung v^2/c^2 , durchgeführt. Es werden ausserdem alle Übergänge des materiellen Teils des Systems vernachlässigt, mit denen eine permanente Emission von Strahlung verbunden ist. Die letzteren kann man natürlich mit der gewöhnlichen Strahlungstheorie behandeln.

Bei der Møllerschen Theorie ist dagegen die Coulombenergie ein Teil der *Störung* und tritt gleichberechtigt neben die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld, die beiden Wechselwirkungen sind nämlich im extrem relativistischen Fall von gleicher Grössenordnung. In nullter Näherung bewegen sich die Elektronen unabhängig voneinander. Die Møllersche Theorie wird relativistisch exakt durchgeführt, dafür wird nach Potenzen von e entwickelt und Glieder von höherer Ordnung als e^2 vernachlässigt. Wenn man also die Breitsche Wechselwirkung aus der Møllerschen Theorie ableitet, so lässt sich nur rechtfertigen, dass man die Coulomb-Wechselwirkung in erster Näherung behandelt, geht man aber von der Quantenelektrodynamik aus, so ist die Coulombkraft im ungestörten System berücksichtigt, so dass ihre Wirkung exakt behandelt werden kann. Es sei bemerkt, dass in der Møllerschen (zweiten) Näherung keine Strahlung auftritt, und dass eine solche erst bei Berücksichtigung der Strahlungswechselwirkung in *dritter* Näherung herauskommen würde, wenn man ausschliesst, dass die Elektronen im Endzustand negative Energie haben.

§ 1. ABLEITUNG DER BREITSCHEN WECHSELWIRKUNGSENERGIE AUS DER MÖLLERSCHEN THEORIE. – Um die Wechselwirkung zweier Elektronen zu berechnen, hat man nach Møller die retardierten Potentiale zu bilden, die

(6) Wir berücksichtigen bei dieser Ableitung die Coulombenergie *nicht* im ungestörten Problem, da sie in der Møllerschen Wechselwirkung mit enthalten ist. Wir können also von Quantenzuständen der einzelnen Elektronen sprechen.

von der Ladungsverteilung des ersten Elektrons erzeugt werden, und hat diese als Störung zu betrachten, welche auf das zweite Elektron wirkt. Wir wollen das Matrixelement der Wechselwirkungsenergie berechnen, welches einem Übergang des ersten Elektrons vom Zustand $(^{(6)}) n_1$ zum Zustand n_1' und des zweiten Elektrons von n_2 nach n_2' entspricht, wobei die Gesamtenergie im Anfangs- und Endzustand gleich sein soll:

$$(1) \quad E_1 + E_2 = E_1' + E_2'.$$

Dem Übergang $n_1 \rightarrow n_1'$ entspricht die Ladungsverteilung

$$(2) \quad \rho_{n_1 n_1'}(r_1, t) = e_1 u_1'^*(r_1) u_1(r_1) e^{\frac{2\pi i}{h}(E_1' - E_1)t},$$

wo u_1 und u_1' die Diracschen Eigenfunktionen des ersten Elektrons im Anfangs- und Endzustand sind und e_1 seine Ladung. Die Ladungsverteilung (2) erzeugt unter Berücksichtigung der Retardierung am Orte r_2 zur Zeit t das skalare Potential:

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi_{n_1 n_1'}(r_2, t) &= \int \frac{\rho_{n_1 n_1'}(r_1, t - \frac{|r_2 - r_1|}{c})}{|r_2 - r_1|} d\tau_1 \\ &= e_1 e^{\frac{2\pi i}{h}(E_1' - E_1)t} \int \frac{(u_1'^*(r_1) u_1(r_1))}{|r_2 - r_1|} e^{\frac{2\pi i}{hc}(E_1' - E_1)|r_2 - r_1|} d\tau_1. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für das Vektorpotential:

$$(4) \quad \mathfrak{A}_{n_1 n_1'}(r_2, t) = -e_1 e^{\frac{2\pi i}{h}(E_1' - E_1)t} \int \frac{(u_1'^*(r_1) \gamma_1 u_1(r_1))}{|r_2 - r_1|} e^{\frac{2\pi i}{hc}(E_1' - E_1)|r_2 - r_1|} d\tau_1.$$

$\gamma_{x_1}, \gamma_{y_1}, \gamma_{z_1}, \delta_1$ sind die Diracschen Operatoren des ersten Elektrons. γ_1 ist der Vektor mit den Komponenten $\gamma_{x_1}, \gamma_{y_1}, \gamma_{z_1}$.

Nun ist die Breitsche Formel für die Wechselwirkungsenergie, welche wir abzuleiten wünschen, nur exakt bis zu Gliedern der Ordnung $1/c^2$ einschliesslich. Es liegt daher nahe, die Exponentialfunktionen in (3), (4), welche die Retardierung des Potentials darstellen, nach $1/c$ zu entwickeln:

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi_{n_1 n_1'}(r_2, t) &= e_1 e^{\frac{2\pi i}{h}(E_1' - E_1)t} \int (u_1'^*(r_1) u_1(r_1)) \left[\frac{1}{|r_2 - r_1|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi i}{hc}(E_1 - E_1') - \frac{2\pi^2}{h^2 c^2}(E_1 - E_1')^2 |r_2 - r_1| \right] d\tau_1 \end{aligned}$$

und \mathfrak{A} entsprechend. Das zweite Glied in der eckigen Klammer in (5) verschwindet: denn entweder sind die Zustände $n_1 n_1'$ identisch, dann ist $E_1 - E_1' = 0$, oder sie sind voneinander verschieden, dann verschwindet das Volumenintegral wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen. Die Störungsenergie, die auf das zweite Elektron wirkt, ist nun:

$$V_{n_1 n_1'}(r_2, t) = e_2 \varphi_{n_1 n_1'}(r_2, t) + e_2 (\gamma_2 \cdot \mathfrak{A}_{n_1 n_1'}(r_2, t)) \dots$$

Wir bilden ihr Matrixelement, das dem Übergang $n_2 \rightarrow n'_2$ des zweiten Elektrons entspricht:

$$(6) \quad V_{n'_1 n'_2}^{n_1 n_2} = e_1 e_2 e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2) t} \int u_2^* (r_2) u_1^* (r_1) \left[\frac{1}{|r_2 - r_1|} - \frac{2\pi^2}{\hbar^2 c^2} (E_1 - E'_1)^2 |r_2 - r_1| - \frac{(\gamma_1 \cdot \gamma_2)}{|r_2 - r_1|} u_2 (r_2) u_1 (r_1) \right] d\tau_1 d\tau_2.$$

Das erste Glied in der Klammer ist hier das gewöhnliche Coulombpotential, das zweite kommt von der Retardierung des skalaren Potentials, das dritte ist der Einfluss des (unretardierte) Vektorpotentials: Da die γ -Operatoren selbst die Grössenordnung v/c haben, brauchen wir die Retardierung des Vektorpotentials in unserer Näherung nicht zu berücksichtigen. Das erste und dritte Glied sind symmetrisch in den beiden Elektronen, das zweite ist es nicht, was an der Unsymmetrie der Møllerschen Methode liegt. Da aber die Gesamtenergie im Anfangs- und Endzustand gleich sein soll (1), können wir das Glied symmetrisieren, indem wir statt $(E_1 - E'_1)^2$ schreiben: $-(E_1 - E'_1)(E_2 - E'_2)$. Damit wird (6) das Matrixelement von

$$(7) \quad V = e_1 e_2 \cdot \frac{1 - (\gamma_1 \cdot \gamma_2)}{|r_2 - r_1|} + \frac{2\pi^2 e_1 e_2}{\hbar^2 c^2} (H_2 (H_1 | r_2 - r_1 | - | r_2 - r_1 | H_1) - (H_1 | r_2 - r_1 | - | r_2 - r_1 | H_1) H_2),$$

wobei H_1 und H_2 die ungestörten Hamiltonfunktionen der beiden Elektronen ohne Wechselwirkung sind, also

$$(8) \quad H_i = -e_i \varphi_0 (r_i) - \frac{\hbar c}{2\pi i} (\gamma_i \cdot \text{grad}_i) - e_i (\gamma_i \cdot \mathcal{A}_0 (r_i)) - m_i c^2 \delta_i.$$

φ_0 und \mathcal{A}_0 sind hier skalares und Vektorpotential irgendeines äusseren statischen Feldes, in dem die beiden Elektronen sich bewegen. Alle Bestandteile von H_i sind mit $|r_2 - r_1|$ vertauschbar ausser dem Gradienten, daher ist

$$H_1 | r_2 - r_1 | - | r_2 - r_1 | H_1 = -\frac{\hbar c}{2\pi i} \left(\gamma_1 \cdot \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|} \right) = F$$

und

$$(9) \quad H_2 F - F H_2 = + \frac{\hbar^2 c^2}{4\pi^2} \left(\frac{(\gamma_1 \cdot \gamma_2)}{|r_1 - r_2|} - \frac{(\gamma_1 \cdot r_1 - r_2)(\gamma_2 \cdot r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|^3} \right).$$

Setzt man dies in (7) ein, so erhält man genau die Breitsche Formel für die Wechselwirkungsenergie:

$$(10) \quad V = \frac{e_1 e_2}{|r_1 - r_2|} \left(1 - \frac{1}{2} (\gamma_1 \cdot \gamma_2) - \frac{1}{2} \frac{(\gamma_1 \cdot r_1 - r_2)(\gamma_2 \cdot r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|^2} \right).$$

§ 2. ABLEITUNG DES BREITSCHEN WECHSELWIRKUNGSGESETZES AUS DER QUANTENELEKTRODYNAMIK. - Als Ausgangspunkt für diese Ableitung nehmen wir die Hamiltonfunktion des Systems Elektronen + elektromagnetisches Feld in der Form [l. c. (166)], die man erhält, wenn man mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung die Koordinaten des skalaren Potentials und der longitudinalen Komponente des Vektorpotentials eliminiert. In dieser Form enthält

die Hamiltonfunktion bereits die Coulombwechselwirkung der Partikeln. Indem man [l. c. (167)] beachtet, kann die Hamiltonfunktion in der Form geschrieben werden:

$$(11) \quad R = \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2 \pi^2 v_s^2 q_s^2 \right) + \sum_{i < j} \frac{e_i e_j}{r_{ij}} - \sum_i c (\gamma_i \cdot p_i) - \sum_i m_i c^2 \delta_i \\ + c \left| \frac{8 \pi}{\Omega} \sum_{is} e_i (\gamma_i \cdot A_s) q_s \sin \Gamma_{si} \right.$$

In dieser Formel sind die Bezeichnungen dieselben wie in l. c.; die Strahlungskomponenten q_s sind jedoch mit einem einzigen Index s und nicht mit zwei s_1 und s_2 numeriert; die Coulombwechselwirkung der Elektronen ist explizit geschrieben, indem von den unendlich grossen konstanten elektrostatischen Selbstenergien abgesehen ist.

Zur Ableitung der Breitschen Formel müssen wir die Coulombkraft im ungestörten System mit berücksichtigen. Wir betrachten also als ungestörte Hamiltonfunktion die Summe der Energie der Strahlung

$$(12) \quad H_s = \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2 \pi^2 v_s^2 q_s^2 \right)$$

und der Energie der materiellen Teilchen

$$(13) \quad H_M = \sum_i -c (\gamma_i \cdot p_i) - m_i c^2 \delta_i + \sum_{i < j} \frac{e_i e_j}{r_{ij}}.$$

Als Störung fassen wir die Kopplungsenergie von Partikeln und Feld auf:

$$(14) \quad H = c \left| \frac{8 \pi}{\Omega} \sum_{is} e_i (\gamma_i \cdot A_s) q_s \sin \Gamma_{si} \right.$$

Die Zustände des ungestörten Systems sind charakterisiert durch eine Quantenzahl n , welche den Zustand des materiellen Teiles des Systems mit Hamiltonfunktion H_M bestimmt, und durch die Quantenzahlen $n_1, n_2, \dots, n_s, \dots$ der Strahlungszustände. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsamplituden seien

$$(15) \quad a_{n n_1 n_2 \dots n_s \dots}$$

Durch die Wirkung der Kopplungsenergie (14) variieren die a mit der Zeit, entsprechend den bekannten Gleichungen:

$$(16) \quad a_{n' n'_1 n'_2 \dots n'_s} = - \frac{2 \pi i}{\hbar} \sum_{n n_1 n_2 \dots} H_{n' n'_1 n'_2 \dots n n_1 n_2 \dots} a_{n n_1 n_2 \dots} e^{\frac{2 \pi i}{\hbar} (E_{n' n'_1 n'_2 \dots} - E_{n n_1 n_2 \dots}) t}.$$

Bekanntlich sind die einzigen von Null verschiedenen Matrixelemente von H die folgenden:

$$(17) \quad H_{n' n'_1 n'_2 \dots n'_s \pm 1 \dots}^{n n_1 n_2 \dots n_s} = c \left| \frac{8 \pi}{\Omega} Q_{n' n} (s) \right| \sqrt{\frac{\hbar}{8 \pi^2 v_s}} \cdot \begin{cases} \sqrt{n_s + 1} \\ \sqrt{n_s} \end{cases}$$

wo $Q_{n' n} (s)$ das Matrixelement $n' n$ der Grösse

$$(18) \quad Q (s) = \sum_i e_i (\gamma_i \cdot A_s) \sin \Gamma_{si}$$

darstellt.

Wir wollen jetzt annehmen, dass am Anfang das materielle System sich in dem Zustand n befindet und kein Strahlungsozillator angeregt ist. Es ist dann

$$|a_{n\infty\cdots\infty}| = 1.$$

Wir wollen sehen, wie durch die Wirkung der Störung eine Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Zustand $n'\infty\cdots\infty$ entsteht. Nun hat die Störungsmatrix (17) kein Element, welches die beiden Zustände $n\infty\cdots\infty$ und $n'\infty\cdots\infty$ direkt koppelt. Ein solcher Übergang kann nur indirekt auf dem Umweg über ein Zwischenglied vorkommen; als solche kommen nach (17) die Zustände $m\infty\cdots\infty$ in Frage, welche mit Anfangs- und Endzustand kombinieren. Man hat zunächst durch Anwendung von (16) auf den Übergang $n\infty\cdots\infty \rightarrow m\infty\cdots\infty$:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{a}_{m\infty\cdots\infty} &= -\frac{2\pi i}{\hbar} H_{m\infty\cdots\infty}^{n\infty\cdots\infty} a_{n\infty\cdots\infty} e^{2\pi i(\nu_{mn} + \nu_s)t}, \\ \text{wo} \\ \nu_{mn} &= \frac{E_m - E_n}{\hbar}. \end{aligned} \right.$$

Da $a_{n\infty\cdots\infty}$ praktisch konstant ist, können wir integrieren und wir finden:

$$(20) \quad a_{m\infty\cdots\infty} = -\frac{H_{m\infty\cdots\infty}^{n\infty\cdots\infty}}{\hbar(\nu_{mn} + \nu_s)} a_{n\infty\cdots\infty} e^{2\pi i(\nu_{mn} + \nu_s)t}.$$

Wir müssen jetzt wieder Gleichung (16) auf die Übergänge $m\infty\cdots\infty \rightarrow n'\infty\cdots\infty$ anwenden. Wir finden:

$$(21) \quad \begin{aligned} \dot{a}_{n'\infty\cdots\infty} &= -\frac{2\pi i}{\hbar} \sum_{m_s} H_{n'\infty\cdots\infty}^{m\infty\cdots\infty} a_{m\infty\cdots\infty} e^{2\pi i(\nu_{n'm} - \nu_s)t} \\ &= -\frac{2\pi i}{\hbar} \sum_{m_s} \left(-\frac{1}{\hbar} \frac{H_{m\infty\cdots\infty}^{n\infty\cdots\infty} H_{n'\infty\cdots\infty}^{m\infty\cdots\infty}}{\nu_{mn} + \nu_s} \right) \cdot a_{n\infty\cdots\infty} e^{2\pi i\nu_{n'n}t}. \end{aligned}$$

Wir können die Grösse

$$(22) \quad K_{n'n} = -\frac{1}{\hbar} \sum_{m_s} \frac{H_{m\infty\cdots\infty}^{n\infty\cdots\infty} H_{n'\infty\cdots\infty}^{m\infty\cdots\infty}}{\nu_{mn} + \nu_s}$$

als ein Matrixelement auffassen, das die Übergänge zwischen den Zuständen $n\infty\cdots\infty \rightarrow n'\infty\cdots\infty$ direkt vermittelt. Die entsprechende Grösse K stellt die Korrektur dar, die man an der Coulombwechselwirkung anzubringen hat, um der Retardierung der Potentials Rechnung zu tragen.

Mit Hilfe von (17) finden wir aus (22):

$$(23) \quad K_{n'n} = -\frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_{m_s} \frac{Q_{n'm}(s) Q_{mn}(s)}{\nu_s(\nu_s + \nu_{mn})}.$$

Wir müssen jetzt die Grösse K als Funktion der Koordinaten und Momente der Partikel ausdrücken. Dies geschieht leicht, wenn wir in erster Näherung im Nenner von (23) ν_{mn} in Vergleich mit ν_s vernachlässigen. (Man beachte,

dass das Verhältnis v_{mn}/v_s von der Grössenordnung v/c ist). Wir bekommen dann:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} K_{n'n} &= -\frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_{sm} \frac{1}{v_s^2} \sum_m Q_{n'm}(s) Q_{mn}(s), \\ &= -\frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_s \frac{1}{v_s^2} [Q^2(s)]_{n'n}. \end{aligned} \right.$$

Wir haben also

$$(25) \quad K = -\frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_s \frac{1}{v_s^2} Q^2(s).$$

Es bleibt nur noch die Summe über s auszuführen, um zu beweisen, dass die gefundene Grösse K mit der Breitschen Wechselwirkungsfunktion identisch ist.

In (25) setzen wir für $Q(s)$ den Ausdruck (18) ein, und finden

$$(26) \quad K = -\sum_{ij} e_i e_j \frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_s \frac{1}{v_s^2} (\gamma_i \cdot A_s) (\gamma_j \cdot A_s) \sin \Gamma_{si} \sin \Gamma_{sj}.$$

Die Summe über s wird in bekannter Weise in ein Integral transformiert,

indem man \sum_s durch $\int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3} \Omega v_s^2 dv_s$ ersetzt und den Ausdruck

$$(\gamma_i \cdot A_s) (\gamma_j \cdot A_s) \sin \Gamma_{si} \sin \Gamma_{sj}$$

über alle Phasen, Ausbreitungs- und Polarisationsrichtungen mittelt. Wir finden also

$$(27) \quad K = -\sum_{ij} e_i e_j \cdot \frac{8}{c} \int_0^\infty \overline{(\gamma_i \cdot A_s) (\gamma_j \cdot A_s) \sin \Gamma_{si} \sin \Gamma_{sj}} dv_s.$$

Die Mittelung kann jetzt ohne weiteres ausgeführt werden. Durch eine Rechnung, die keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet, finden wir, indem wir (147) l. c. beachten,

$$(28) \quad \overline{(\gamma_i \cdot A_s) (\gamma_j \cdot A_s) \sin \Gamma_{si} \sin \Gamma_{sj}} = \frac{(\gamma_i \cdot \gamma_j)}{4} \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta} + \frac{\cos \vartheta}{\vartheta^2} - \frac{\sin \vartheta}{\vartheta^3} \right) \\ = \frac{(\gamma_i \cdot r_{ij}) (\gamma_j \cdot r_{ij})}{4 r_{ij}^2} \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta} + 3 \frac{\cos \vartheta}{\vartheta^3} - 3 \frac{\sin \vartheta}{\vartheta^3} \right).$$

wo

$$(29) \quad \vartheta = \frac{2\pi r_{ij}}{c} v_s.$$

Aus (27) finden wir also, indem wir als Integrationsvariable ϑ statt v_s einführen:

$$(30) \quad K = -\sum_{ij} \frac{e_i e_j}{\pi r_{ij}} \left\{ (\gamma_i \cdot \gamma_j) \int_0^\infty \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta} + \frac{\cos \vartheta}{\vartheta^2} - \frac{\sin \vartheta}{\vartheta^3} \right) d\vartheta \right. \\ \left. - \frac{(\gamma_i \cdot r_{ij}) (\gamma_j \cdot r_{ij})}{r_{ij}^2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta} + \frac{3 \cos \vartheta}{\vartheta^3} - 3 \frac{\sin \vartheta}{\vartheta^3} \right) d\vartheta \right\}.$$

Die beiden Integrale haben die Werte $+\pi/4$ und $-\pi/4$. Wir finden also

$$(31) \quad K = - \sum_{ij} \frac{e_i e_j}{4 r_{ij}} \left\{ (\gamma_i \cdot \gamma_j) + \frac{(\gamma_i \cdot r_{ij})(\gamma_j \cdot r_{ij})}{r_{ij}^2} \right\}.$$

In dieser Formel ist eine unendlich grosse konstante Selbstenergie der Elektronen enthalten ⁽⁷⁾. Sehen wir von dieser Konstanten ab, so finden wir als Ausdruck für die Wechselwirkung von zwei Elektronen:

$$(32) \quad - \frac{e_i e_j}{2 r_{ij}} \left\{ (\gamma_i \cdot \gamma_j) + \frac{(\gamma_i \cdot r_{ij})(\gamma_j \cdot r_{ij})}{r_{ij}^2} \right\},$$

welche mit der Breitschen Wechselwirkung identisch ist.

§ 3. ABLEITUNG DER MÖLLERSCHEN FORMEL AUS DER QUANTENELEKTRODYNAMIK. - Als Ausgangspunkt nehmen wir wieder die Hamiltonfunktion (11), wobei wir uns auf den Fall von zwei Partikeln 1 und 2 beschränken. Wir fassen aber diesmal die Coulombenergie $e_1 e_2 / r_{12}$ als Störung auf, so dass die ungestörte Hamiltonfunktion

$$(33) \quad H_0 = \sum_s \left(\frac{1}{2} \dot{p}_s^2 + 2 \pi^2 \nu_s^2 q_s^2 \right) + \sum_{i=1}^2 \left(-c (\gamma_i \cdot \dot{p}_i) - mc^2 \delta_i \right)$$

ist. Die Quantenzustände des ungestörten Systems sind durch die Quantenzahlen n_1, n_2 der Elektronen und die Quantenzahlen der Strahlungszustände definiert. Wir interessieren uns für den Übergang:

$$(34) \quad n_1 n_2 0 \dots 0 \rightarrow n'_1 n'_2 0 \dots 0$$

Dieser Übergang kann einmal auf direktem Wege durch die Coulombsche Wechselwirkung hervorgerufen werden oder aber durch den Mechanismus, den wir im vorigen Paragraphen diskutiert haben, auf dem Umweg über einen Zwischenzustand

$$(35) \quad m_1 m_2 0 \dots 1_s \dots$$

Dem ersten Prozess entsprechen die Matrixelemente

$$(36) \quad \left(\frac{e_1 e_2}{r_{12}} \right)_{n_1 n_2}^{n'_1 n'_2},$$

dem zweiten Prozess nach (23)

$$(37) \quad K_{n_1 n_2}^{n'_1 n'_2} = - \frac{c^2}{\pi \Omega} \sum_{m_1 m_2} \frac{Q_{m_1 m_2}^{n'_1 n'_2}(s) Q_{n_1 n_2}^{m_1 m_2}(s)}{\nu_s (\nu_s + \nu_{m_1 n_1} + \nu_{m_2 n_2})}.$$

Es ist konsequent, im ersten Falle sich auf die erste Näherung zu beschränken und im zweiten Falle bis zur zweiten zu gehen, weil (36) und (37) beide proportional zu $e_1 e_2$ sind.

(7) Diese hebt die elektrostatische Selbstenergie genau auf. Man muss aber nicht denken, dass dadurch die Schwierigkeiten der unendlichen Selbstenergie beseitigt wären. Man findet wieder eine unendlich grosse Selbstenergie eines freien Elektrons, wenn man die Diagonalelemente von (23) berechnet und dabei ν_{mm} nicht vernachlässigt und als Zwischenzustand m auch Zustände negativer Energie betrachtet.

Wir wollen jetzt die Matrixelemente (37) berechnen. Wir bemerken zunächst, dass $Q(s)$ [vgl. (18)] aus zwei Summanden $Q(1s)$ und $Q(2s)$ besteht, von denen jeder nur von den Koordinaten eines Elektrons abhängt. Da die ungestörten Eigenfunktionen Produkte von Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen sind, können die Matrixelemente von $Q(s)$ nur solchen Übergängen entsprechen, bei denen ein einziges Elektron springt. Dadurch reduziert sich die Summe über $m_1 m_2$ auf zwei Glieder: $m_1 m_2 = n_1 n'_1$ und $m_1 m_2 = n'_1 n_2$. (37) wird dann

$$(38) \quad K_{n_1 n_2}^{n'_1 n'_2} = -\frac{e^2}{\pi\Omega} \sum_s \frac{Q_{n'_1 n_1}(1s) Q_{n'_2 n_2}(2s)}{\nu_s} \left(\frac{1}{\nu_s + \nu_{n'_1 n_1}} + \frac{1}{\nu_s + \nu_{n'_2 n_2}} \right).$$

$Q(1s)$ hat die Form [vgl. (18) l. c. (147)]:

$$(39) \quad Q(1s) = \frac{e_1}{2i} (\gamma_1 \cdot A_s) \left[e^{\frac{2\pi i \nu_s}{c} (\alpha_s \cdot r_1) + i\beta_s} - e^{-\frac{2\pi i \nu_s}{c} (\alpha_s \cdot r_2) - i\beta_s} \right].$$

Die Eigenfunktionen der Zustände n_1 und n'_1 schreiben wir in die Form

$$(40) \quad u_1 = \frac{a_1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{2\pi i}{h} (p_1 \cdot r_1)}, \quad u'_1 = \frac{a'_1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{2\pi i}{h} (p'_1 \cdot r_1)},$$

wo die a vierkomponentige Konstanten darstellen, die auf Eins normiert sind.

Die Matrixelemente von $Q(1s)$ sind also nur dann von Null verschieden, wenn

$$(41) \quad \frac{h\nu_s}{c} \alpha_s = \pm (p_1 - p'_1).$$

Ihre Werte sind in diesem Falle

$$(42) \quad \mp \frac{e_1}{2i} (\bar{a}'_1 \gamma_1 a_1 \cdot A_s) e^{\mp i\beta_s}.$$

Für $Q(2s)$ bekommen wir einen entsprechenden Ausdruck. Da man nun eine Mittelung über die Phasen β_s vorzunehmen hat, liefern von Null verschiedene Beiträge nur die Glieder, für welche das Vorzeichen in $Q(1s)$ und $Q(2s)$ entgegengesetzt ist. Es ist also

$$(43) \quad p_1 - p'_1 = - (p_2 - p'_2) = \pm \frac{h\nu_s}{c} \vec{\alpha}_s, \quad \nu_s = \frac{c}{h} |p_1 - p'_1|,$$

$$(44) \quad K_{n_1 n_2}^{n'_1 n'_2} = -\frac{e_1 e_2 \hbar^2}{4\pi\Omega} \sum_s \frac{(\bar{a}'_1 \gamma_1 a_1 \cdot A_s) (\bar{a}'_2 \gamma_2 a_2 \cdot A_s)}{|p_1 - p'_1|} \cdot \left(\frac{1}{|p_1 - p'_1| + \frac{(E_1 - E_2)}{c}} + \frac{1}{|p_1 - p'_1| + \frac{(E'_2 - E_2)}{c}} \right).$$

Wegen (43) besteht die Summe über s nur noch aus vier Gliedern, entsprechend dem doppelten Vorzeichen in (43) und zwei zueinander senkrechten Polarisationsrichtungen. Statt über s zu summieren, können wir also über alle Richtungen des Einheitsvektors A_s senkrecht zu $p - p'$ mitteln und

mit 4 multiplizieren. Führen wir das aus und beachten wir noch, dass wegen des Energiesatzes

$$E_1 - E_1' = E_2' - E_2,$$

so finden wir:

$$(45) \quad K_{n_1 n_2}^{n_1' n_2'} = - \frac{e_1 e_2 \hbar^2}{\pi \Omega} \left[(\vec{a}_1' \gamma_1 a_1 \cdot \vec{a}_2' \gamma_2 a_2) - \frac{(\vec{a}_1' \gamma_1 a_1 \cdot (\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1')) (\vec{a}_2' \gamma_2 a_2 \cdot (\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1'))}{(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1')^2} \right] \\ \cdot \frac{1}{(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1')^2 - \left(\frac{E_1 - E_1'}{c} \right)^2}.$$

Wir müssen noch zu (45) das Matrixelement (36) addieren; dieses hat nach Møller den Wert:

$$(46) \quad \left(\frac{e_1 e_2}{r_{12}} \right)_{n_1 n_2}^{n_1' n_2'} = \frac{e_1 e_2 \hbar^2}{\pi \Omega} \frac{(\vec{a}_1' a_1) (\vec{a}_2' a_2)}{(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1')^2}.$$

Die Summe ist:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} H_{n_1 n_2}^{n_1' n_2'} &= K_{n_1 n_2}^{n_1' n_2'} + \left(\frac{e_1 e_2}{r_{12}} \right)_{n_1 n_2}^{n_1' n_2'} \\ &= \frac{e_1 e_2 \hbar^2}{\pi \Omega} \cdot \frac{(\vec{a}_1' a_1) (\vec{a}_2' a_2) - (\vec{a}_1' \gamma_1 a_1 \cdot \vec{a}_2' \gamma_2 a_2)}{(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1')^2 - \left(\frac{E_1 - E_1'}{c} \right)^2} + \frac{e_1 e_2 \hbar^2}{\pi \Omega |\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1'|^2} \\ &\quad \cdot \frac{- \left(\frac{E_1 - E_1'}{c} \right)^2 (\vec{a}_1' a_1) (\vec{a}_2' a_2) + (\vec{a}_1' \gamma_1 a_1 \cdot (\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1')) (\vec{a}_2' \gamma_2 a_2 \cdot (\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1'))}{(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1')^2 - \left(\frac{E_1 - E_1'}{c} \right)^2} \end{aligned} \right.$$

Der erste Summand der rechten Seite ist genau die Møllersche Wechselwirkungsenergie. Wir müssen also beweisen, dass der zweite Summand verschwindet. Wir schreiben zunächst diesen Summand in symmetrischer Form mit Benutzung des Energie- und Impulssatzes:

$$\text{Faktor} \cdot \left[+ \frac{E_1 - E_1'}{c} (\vec{a}_1 a_1) \frac{E_2 - E_2'}{c} (\vec{a}_2' a_2) - (\vec{a}_1' \gamma_1 a_1 \cdot (\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1')) (\vec{a}_2' \gamma_2 a_2 \cdot (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_2')) \right].$$

Um zu beweisen, dass dies verschwindet, genügt es zu zeigen, dass

$$(49) \quad (E_1 - E_1') \vec{a}_1 a_1 = -c (\vec{a}_1' \gamma_1 a_1 \cdot (\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1'))$$

und eine entsprechende Gleichung für die zweite Partikel gilt. (49) folgt aber sofort aus der Diracgleichung

$$(50) \quad E_1 a_1 = -c (\mathfrak{p}_1 \gamma_1 a_1) - m_1 c^2 \delta_1 a_1$$

und der entsprechenden Gleichung für \vec{a}_1' .

Man überzeugt sich übrigens leicht, dass die Møllersche Formel sich in genau der gleichen Weise ableiten lässt, wenn eine der Partikeln gebunden ist.

Es ist befriedigend, dass in unserer Näherung keine Strahlung emittiert wird. Man könnte an sich denken, dass Prozesse möglich sind, bei denen die beiden Elektronen ihre Zustände ändern und zwei Quanten emittiert werden.

Bei solchen Prozessen müsste man aber zweimal den Impulssatz befriedigen (der Impuls des einen Quants muss gleich der Impulsänderung des einen Elektrons sein, und dasselbe gilt für das andere Quant und das andere Elektron) und einmal den Energiesatz. Das ist aber unmöglich, sofern im Endzustand keines der Elektronen eine negative Energie hat.

Der eine von uns (H. Bethe) möchte der Rockefeller Foundation für die Gewährung eines Stipendiums danken, das ihm den Aufenthalt in Rom ermöglicht hat.

Rom, Institut für theoretische Physik.

N° 71.

In this article Fermi summarizes some of his earlier results on the theory of the Raman effect and extends it to cases not previously considered. After a brief introduction on the fundamental frequencies of molecules and their activity in the Raman effect, he expounds the theory of the CO_2 molecule essentially as given in the previous paper on the same subject (N° 68). He then remarks that an analogous effect is responsible for splitting one of the Raman lines of CCl_4 into a doublet. There follows a brief theory of the first and second-order Raman effect in crystals. The theory of the second-order spectrum of rocksalt is given, following the treatment previously published in German (N° 69). Finally, he considers the Raman spectra of calcite and sodium nitrate. The observations show one more Raman line than expected as a first-order spectrum from the knowledge of the structure of these crystals. He suggests that the line of highest frequency be attributed to the second-order spectrum, which for special reasons turns out to be concentrated into a fairly sharp line instead of the widespread continuum observed in the alkali halides. Fermi's interest in the theory of the Raman effect had been aroused mainly by Rasetti's experimental work in Pasadena and Rome.

F. RASETTI.

71.

L'EFFETTO RAMAN NELLE MOLECOLE
E NEI CRISTALLI (*)

«Memorie Accad. d'Italia», 3 (1), (Fis.) 239-256 (1932)

RIASSUNTO. — Dopo un breve riassunto dei criteri generali per la interpretazione dell'effetto Raman nelle molecole e nei cristalli, vengono studiati in questa Memoria alcuni notevoli casi di eccezione, che permettono l'interpretazione degli spettri Raman dell'anidride carbonica e del tetracloruro di carbonio; spiegano l'apparire di un debolissimo spettro continuo nel salgemma, per il quale la teoria ordinaria farebbe prevedere l'assenza di effetto Raman; e consentono di ordinare completamente gli spettri Raman della calcite e del nitrato di sodio.

1. Nello spettro Raman di una molecola, sia appartenente ad un gas che a un liquido, si osservano normalmente alcune righe corrispondenti a tutte o a parte delle frequenze di oscillazione della molecola nello stato fondamentale elettronico; assai più raramente si osservano invece righe corrispondenti a una variazione dello stato di rotazione. Queste infatti, salve pochissime eccezioni, appaiono con notevole intensità solo nell'intorno della riga eccitatrice e vengono spesso mascherate dall'alone che la circonda; inoltre le si osservano bene soltanto nei gas, poiché, essendo assai ravvicinate una dall'altra, esse normalmente si confondono tra di loro nei liquidi. È noto

(*) Presentata nell'Adunanza dell'11 marzo 1932.

infine un solo caso in cui sia stata osservata con sicurezza in effetto Raman una transizione tra due livelli elettronici. In questo lavoro ci limiteremo perciò alla discussione dell'effetto Raman di oscillazione, che rappresenta di gran lunga il caso più frequente. E particolarmente ci occuperemo qui di alcuni casi di eccezione alle normali regole di selezione per l'effetto Raman, che conviene tenere presenti tutte le volte che si debba interpretare lo spettro Raman di una molecola oppure di un cristallo. Alcuni di questi casi sono già stati pubblicati in note preliminari (1).

Alla discussione di questi casi di eccezione, premettiamo un breve riassunto dei criteri che si seguono per stabilire le ordinarie regole di selezione per l'effetto Raman.

Per descrivere le oscillazioni di una molecola, conviene riferirne le deformazioni a un sistema di coordinate normali, q_1, q_2, \dots, q_f il cui numero è eguale al numero delle vibrazioni fondamentali della molecola.

Per mezzo di queste l'energia potenziale della deformazione elastica della molecola prende in prima approssimazione la forma

$$(1) \quad \sum_i 2 \pi^2 \nu_i^2 q_i^2$$

mentre l'energia cinetica ha pure la forma ortogonale

$$(2) \quad \frac{1}{2} \sum m_i \dot{q}_i^2.$$

In seconda approssimazione compaiono nell'energia potenziale dei termini di terzo grado e di grado superiore nelle q ; questi termini hanno per conseguenza una certa anarmonicità delle oscillazioni della molecola.

Per la produzione delle righe Raman sono essenziali come è noto le pulsazioni della polarizzabilità elettrica della molecola. Per rappresentarle conviene osservare che la polarizzabilità elettrica, e quindi tutte le componenti $\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \dots$ del tensore che la rappresenta, sono funzioni delle coordinate q ; sviluppando tali funzioni in serie di potenze si trova

$$(3) \quad \alpha_{xy} = \alpha_{xy0} + \sum_i \alpha_{xyi} q_i + \sum_{ij} \alpha_{xyij} q_i q_j + \dots$$

con espressioni analoghe per le altre componenti del tensore.

Per lo studio di prima approssimazione, e cioè delle sole righe più intense, basta conservare nello sviluppo (3) i soli termini lineari e prescindere dalla anarmonicità delle oscillazioni. Siccome in un oscillatore armonico le coordinate sono rappresentate da matrici in cui sono diversi da zero solo i termini che corrispondono a transizioni di ± 1 del numero quantico di oscillazione, segue subito che, nella nostra approssimazione, potranno apparire in effetto Raman soltanto le frequenze fondamentali. Condizione necessaria poi perché una frequenza fondamentale si osservi effettivamente è che il coefficiente della corrispondente coordinata nello sviluppo (3) sia diverso da zero almeno per una delle componenti del tensore.

(1) E. FERMI, «Zs. f. Phys.», 71, 250 (1931); E. FERMI e F. RASETTI, «Zs. f. Phys.», 71, 689 (1931).

Ora accade in parecchi casi che per la simmetria particolare della molecola il coefficiente, per qualcuna delle coordinate, si annulli esattamente; la frequenza corrispondente è in questi casi proibita in effetto Raman. Senza entrare in una discussione della dipendenza di queste regole di selezione dagli elementi di simmetria della molecola ⁽²⁾, illustriamo la cosa sopra l'esempio semplice delle molecole del tipo $A B_2$ in cui, nella posizione di equilibrio, l'atomo A si trovi nel centro del segmento che congiunge i due atomi B. In una molecola di questo tipo abbiamo tre frequenze fondamentali, ν_1 , ν_2 , ν_3 , di cui una è doppia. Le forme di vibrazione corrispondenti sono illustrate nella fig. 1. La frequenza ν_2 è doppia, perché la corrispondente vibrazione

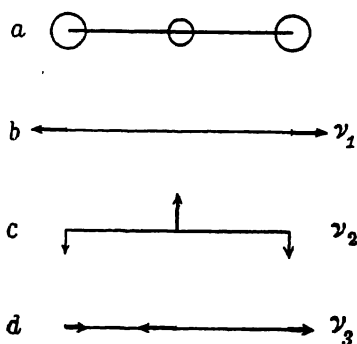


Fig. 1.

può aver luogo sia nel piano della figura, sia in un piano perpendicolare ad esso. Quando la molecola vibra secondo una delle due forme di vibrazione ν_2 o ν_3 , tutte le componenti della sua polarizzabilità sono evidentemente, per simmetria, delle funzioni pari della elongazione (infatti in posizioni di fase opposta la polarizzabilità è evidentemente la stessa). Nello sviluppo della polarizzabilità in serie di potenze delle coordinate normali, mancheranno dunque tutti i coefficienti delle potenze dispari delle coordinate normali corrispondenti a ν_2 e ν_3 ; in particolare mancheranno dunque i termini lineari in tali coordinate, e le frequenze corrispondenti saranno perciò inattive in effetto Raman. Invece la frequenza ν_1 è attiva in effetto Raman. Con considerazioni di questo stesso tipo si vedrebbe anche subito che, in infrarosso, le frequenze ν_2 e ν_3 sono attive, mentre ν_1 è inattiva.

Con considerazioni analoghe a quelle che abbiamo svolte per questo esempio semplice, è effettivamente possibile in molti casi rendersi conto dell'origine delle righe più intense che si osservano in effetto Raman, possibilmente integrando le osservazioni con lo studio dello spettro di assorbimento infrarosso e della polarizzazione delle righe Raman e infrarosse.

Oltre alle righe corrispondenti alle frequenze fondamentali di oscillazione, si osservano talvolta negli spettri Raman delle altre righe, in genere assai poco intense che corrispondono a frequenze armoniche e di combinazione. Il loro apparire è dovuto a due cause, cioè:

a) la presenza nello sviluppo (3) di termini quadratici e di ordine superiore, che rendono possibile la transizione di più di una unità nei numeri quantici di oscillazione;

b) la anarmonicità delle oscillazioni.

Considerazioni simili a quelle ora svolte per il caso delle molecole, possono anche servir di guida per l'interpretazione degli spettri Raman dei cristalli. Ritourneremo su questo problema in seguito, parlando dell'effetto Raman del salgemma.

(2) G. PLACZEK, in « Leipziger Vorträge », 1931, edito a cura di P. Debye, Lipsia 1931.

Le regole di selezione a cui abbiamo accennato, e quelle che studieremo in seguito per il caso dei cristalli, trovano in alcuni casi delle eccezioni che conviene tener presenti tutte le volte che si deve interpretare uno spettro Raman. Discuteremo queste eccezioni sopra alcuni esempi caratteristici.

2. SPETTRO RAMAN DELL'ANIDRIDE CARBONICA. - Un notevole caso di eccezione alle ordinarie regole di selezione per l'effetto Raman delle molecole poliatomiche si può presentare quando casualmente una delle frequenze fondamentali venga quasi a coincidere con una frequenza di combinazione. Illustreremo questo fenomeno sopra l'esempio dell'anidride carbonica.

Lo spettro Raman dell'anidride carbonica gassosa ⁽³⁾, consiste di quattro righe. Due notevolmente intense, con frequenze di 1285 e 1388 cm^{-1} ; e due assai più deboli aventi frequenze di 1265 e 1408 cm^{-1} . Siccome la molecola dell'anidride carbonica è del tipo rappresentato nella fig. 1, le ordinarie regole di selezione, che abbiamo già discusse per questo caso, farebbero prevedere l'esistenza di una sola riga Raman intensa, corrispondente all'unica frequenza fondamentale attiva ν_1 . Dall'assorbimento infrarosso sono note le frequenze fondamentali ν_2 e ν_3 , che hanno approssimativamente i valori $\nu_2 = 673$ e $\nu_3 = 2350$. Da questa ultima frequenza può anche grossolanamente valutarsi la frequenza ν_1 ; se infatti si ammette trascurabile l'azione esercitata dai due atomi di ossigeno uno sull'altro si dovrebbe avere, come risulta da un facile calcolo, tenendo conto che i pesi atomici del carbonio e dell'ossigeno sono 12 e 16,

$$\nu_1 \cong \nu_3 \sqrt{\frac{12}{2 \cdot 16 + 12}} \cong 1230 \text{ cm}^{-1}.$$

Effettivamente le frequenze delle quattro righe che si osservano non sono molto lontane da questo valore; occorre però cercare una spiegazione del perché si osservano quattro righe in luogo di una soltanto.

Occupiamoci dapprima delle due righe più intense; vedremo poi come si possano interpretare anche le due componenti deboli.

L'apparire di due righe intense in luogo di una sola è determinato dal fatto che casualmente la frequenza ν_1 , viene quasi esattamente a coincidere col doppio della frequenza ν_2 . Nella fig. 2, è rappresentato uno schema teorico dei livelli di oscillazione più profondi del CO_2 . Lo schema è stato semplificato trascurando provvisoriamente la degenerazione della frequenza ν_2 e considerando le due oscillazioni ν_1 e ν_2 come esattamente armoniche e non accoppiate in alcun modo tra di loro. La frequenza ν_3 , assai più elevata dalle altre due, non interviene nei livelli energetici più profondi. I numeri scritti accanto ai livelli nella figura sono i numeri quantici di oscillazione per le frequenze ν_1 e ν_2 . Secondo le ordinarie regole di selezione ci si attenderebbe solo una riga Raman, corrispondente alla transizione (1,0)-(0,0).

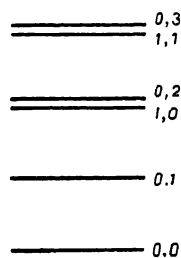


Fig. 2.

(3) F. RASSETTI, « Nature », 123, 205 (1929).

Il fatto che si osservano invece due righe intense, dipende dalla circostanza che i due livelli energetici $(1, 0)$ e $(0, 2)$ sono casualmente assai prossimi uno all'altro e, in conseguenza, si perturbano molto intensamente. Per modo che le autofunzioni ad essi corrispondenti vengono in realtà ad essere date da combinazioni lineari delle autofunzioni imperturbate dei due stati con coefficienti che, per entrambi le autofunzioni, sono dell'ordine di grandezza dell'unità. Segue da ciò che tutti e due gli stati si possono combinare intensamente in effetto Raman collo stato fondamentale $(0, 0)$, poiché entrambi contengono una elevata percentuale dell'autofunzione imperturbata $(1, 0)$ che si combina intensamente con lo stato fondamentale.

In realtà la situazione è un po' più complicata per il fatto che la frequenza ν_2 , come già si è osservato, è degenera. Occorre perciò numerare le autofunzioni con tre numeri quantici (anche quando si prescinda dalla considerazione della frequenza ν_3 , ciò che naturalmente può farsi nel nostro caso). Per la determinazione delle oscillazioni della molecola scegliamo le seguenti coordinate:

x = proiezione dello spostamento degli atomi di ossigeno sulla direzione dell'asse molecolare.

ξ ed η , proiezioni del segmento che congiunge l'atomo C con uno

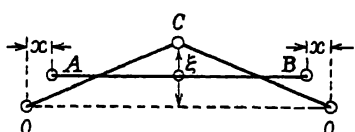


Fig. 3.

dei due atomi O, su due direzioni perpendicolari tra di loro e all'asse della molecola. Nella fig. 3, AB rappresenta la posizione di equilibrio della molecola; C, O, O sono le posizioni istantanee del carbonio e dei due ossigeni; la figura è proiettata su un piano parallelo all'asse della molecola e a ξ .

La coordinata x corrisponde alla frequenza ν_1 ; la massa vibrante ad essa relativa è

$$m_1 = 2m$$

dove m rappresenta la massa dell'atomo di ossigeno.

Le altre due coordinate ξ ed η corrispondono alla frequenza degenera ν_2 ; esse hanno una massa vibrante

$$m_2 = \frac{2mM}{2m + M}$$

dove M è la massa dell'atomo di carbonio.

Per caratterizzare uno stato quantico del sistema imperturbato occorre dare tre numeri quantici (n_1, n_2, n_2'') relativi alle tre coordinate x, ξ, η . E l'energia imperturbata, a meno dell'energia di zero, è data da

$$E_{n_1, n_2, n_2''} = h\nu_1 n_1 + h\nu_2 (n_2 + n_2'')$$

Siccome si ha $\nu_1 \cong 2\nu_2$, vengono a coincidere quasi esattamente tra di loro i quattro autovalori imperturbati $(1, 0, 0)$ $(0, 2, 0)$ $(0, 1, 1)$ $(0, 0, 2)$.

Nel sistema imperturbato l'energia potenziale ha la forma

$$kx^2 + \alpha(\xi^2 + \eta^2)$$

in cui h ed α rappresentano delle costanti i cui valori possono determinarsi immediatamente conoscendo le frequenze ν_1 e ν_2 .

Come perturbazione considereremo le deviazioni dell'energia potenziale dalla forma quadratica; e in primo luogo considereremo l'effetto dei termini di terzo grado nelle coordinate. Si riconosce subito che, per ragione di simmetria, i termini di terzo grado si riducono ai due soli tipi

$$x^3 \text{ e } x(\xi^2 + \eta^2).$$

Il primo termine, dipendendo dalla sola coordinata x , non rappresenta un accoppiamento tra diverse oscillazioni, ma semplicemente una anarmonicità della oscillazione ν_1 ; non ci occorre quindi tenerne conto, e potremmo eventualmente conglobarlo nell'energia potenziale imperturbata. Come energia potenziale perturbatrice abbiamo dunque solo da considerare un termine della forma

$$U = \beta x (\xi^2 + \eta^2)$$

in cui β rappresenta una costante.

Dobbiamo calcolarci gli elementi della matrice di perturbazione relativi all'incrocio dei quattro termini $(1, 0, 0)$ $(0, 2, 0)$ $(0, 1, 1)$ $(0, 0, 2)$. Ciò si fa immediatamente con le note formule, per rappresentare gli elementi di matrice della coordinata q di un oscillatore di massa m .

$$q_{n+1, n} = q_{n, n+1} = \sqrt{\frac{h}{8\pi^2 m}} \sqrt{n+1}.$$

Da questa formula si deduce

$$x_{10} = x_{01} = \sqrt{\frac{h}{8\pi^2 \nu_1 m_1}}, \quad (\xi^2)_{02} = \xi_{01} \xi_{12} = \frac{h}{8\pi^2 \nu_2 m_2} \sqrt{2}.$$

Da cui si ottengono immediatamente gli elementi di matrice desiderati

$$U(100, 020) = U(100, 002) = P, \quad U(100, 011) = 0$$

dove si è posto

$$P = \frac{\beta h^{3/2}}{16\pi^3 \nu_1 m_1 \nu_2 m_2}.$$

Si riconosce dunque che l'autofunzione $(0, 1, 1)$ non è accoppiata alle altre dalla perturbazione; e siccome essa, nel problema imperturbato, è inattiva per l'effetto Raman, possiamo non considerarla. Il pezzo della matrice rappresentante l'energia, che corrisponde all'incrocio delle altre tre autofunzioni è dunque

$$\begin{vmatrix} A & P & P \\ P & B & 0 \\ P & 0 & B \end{vmatrix}.$$

in cui A rappresenta l'autovalore imperturbato $(1, 0, 0)$ e B l'autovalore imperturbato delle due autofunzioni degeneri $(0, 2, 0)$ $(0, 0, 2)$.

La matrice precedente ha gli autovalori

$$B, \quad \frac{A+B}{2} \pm \sqrt{2P^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2}.$$

i quali corrispondono ad autofunzioni che sono combinazioni lineari delle autofunzioni imperturbate $(1, 0, 0)$ $(0, 2, 0)$ $(0, 0, 2)$. L'autovalore B corrisponde alla combinazione lineare

$$(002) - (020)$$

che non contiene la autofunzione « attiva » $(1, 0, 0)$; la riga corrispondente alla transizione da questo livello al livello fondamentale non viene perciò osservata in effetto Raman. Restano così gli altri due autovalori

$$(4) \quad \frac{A+B}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}P^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2}$$

le cui autofunzioni sono le combinazioni lineari

$$(5) \quad \frac{1}{P} \left[\frac{A-B}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}P^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2} \right] (100) + (020) + (002)$$

che, contenendo l'autofunzione attiva $(1, 0, 0)$, sono tutte e due attive in effetto Raman.

Resta con ciò spiegato l'apparire di due righe Raman intense. L'effetto Raman che si osserva può spiegarsi ammettendo che i due livelli energetici imperturbati A e B coincidano quasi esattamente. Ponendo nella (4) $A = B$ si trovano i due livelli energetici

$$(6) \quad A \pm \sqrt{2} P$$

che combinandosi con lo stato fondamentale $(0, 0, 0)$ danno luogo alle due righe Raman intense; la loro differenza di frequenza risulta dunque

$$(7) \quad \Delta\nu = 2\sqrt{2} P.$$

Dalla separazione sperimentale $\Delta\nu = 103 \text{ cm}^{-1}$ si dedurrebbe dunque $P = 36 \text{ cm}^{-1}$; questo valore di P è plausibilissimo e conduce ad un valore per la costante B di un giusto ordine di grandezza. Nell'ipotesi $A = B$ le combinazioni lineari (5) diventano

$$\pm \sqrt{2} (100) + (020) + (002).$$

La percentuale dell'autofunzione attiva $(1, 0, 0)$ in queste due autofunzioni è del 50%, ciò condurrebbe ad attendersi eguale intensità per le due righe Raman. Siccome sperimentalmente si trova che la riga 1388 è un pò più intensa della 1285, si conclude che B deve essere leggermente minore di A.

Resta ancora da discutere l'origine delle due righe deboli. Esse debbono ricondursi all'azione delle molecole nelle quali è eccitato per agitazione termica un quanto della frequenza $\nu_2 = 673$, che si trovano cioè nello stato $(0, 1)$ dello schema semplificato della fig. 2. A temperatura ordinaria il fattore di Boltzmann ha per questo stato il valore $1/28$; siccome il peso statistico è 2, vi è circa $1/14$ delle molecole che si trovano in questo stato. Lo stato $(0, 1)$ si combina in effetto Raman con lo stato $(1, 1)$; e siccome questo viene a giacere assai prossimo al livello $(0, 3)$ (cfr. fig. 2) troviamo nuovamente, con lo stesso meccanismo di prima, due righe Raman in luogo di una sola.

Per il calcolo quantitativo si deve naturalmente tener conto della degenerazione della frequenza ν_2 . Si deve precisamente considerare la matrice dell'energia corrispondente all'intersezione dei sei stati quantici (1, 1, 0) (1, 0, 1) (0, 3, 0) (0, 2, 1) (0, 1, 2) (0, 0, 3). Con le stesse notazioni di prima si trova indicando con A' e B' i livelli energetici imperturbati, la seguente matrice

$$\begin{vmatrix} A' & 0 & \sqrt{3} P & 0 & P & 0 \\ 0 & A' & 0 & P & 0 & \sqrt{3} P \\ \sqrt{3} P & 0 & B' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & B' & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & B' & 0 \\ 0 & \sqrt{3} P & 0 & 0 & 0 & B' \end{vmatrix}$$

La matrice precedente si spezza in due matrici eguali del terzo ordine che accoppiano le autofunzioni (1, 1, 0) (0, 3, 0) (0, 1, 2) oppure le altre (1, 0, 1) (0, 0, 3) (0, 2, 1). Tali matrici sono

$$\begin{vmatrix} A' & \sqrt{3} P & P \\ \sqrt{3} P & B' & 0 \\ P & 0 & B' \end{vmatrix}$$

ed hanno gli autovalori

$$(8) \quad B', \quad \frac{A' + B'}{2} \pm \sqrt{4 P^2 + \left(\frac{A' - B'}{2}\right)^2}.$$

L'autovalore B' non viene osservato in effetto Raman, perché la corrispondente autofunzione

$$(030) - \sqrt{3} (012)$$

non contiene l'autofunzione attiva (1, 1, 0). Gli altri due autovalori corrispondono alle due autofunzioni

$$\frac{1}{P} \left\{ \frac{A' - B'}{2} \pm \sqrt{4 P^2 + \left(\frac{A' - B'}{2}\right)^2} \right\} \{ (110) + \sqrt{3} (030) + (012) \}$$

che contengono l'autofunzione (1, 1, 0), che rende possibili le transizioni Raman. Se facciamo anche in questo caso l'ipotesi $A' = B'$, troviamo i due autovalori $A' \pm 2 P$. La separazione delle due righe Raman deboli risulta dunque

$$(9) \quad \Delta\nu' = 4 P.$$

Dal confronto con la (6) si ricava dunque

$$\frac{\Delta\nu'}{\Delta\nu} = \sqrt{2}$$

in ottimo accordo con il rapporto 1,4 che si osserva sperimentalmente tra le separazioni delle righe deboli e di quelle intense.

Fenomeni analoghi a quello che abbiamo qui discusso per il caso dell'anidride carbonica si presentano anche in altre molecole. Così se ne ha un nuovo esempio per il tetracloruro di carbonio. In questa molecola si hanno quattro frequenze fondamentali, tutte attive in effetto Raman.

Sperimentalmente si trova che la più alta di queste frequenze è scissa in due componenti con frequenza di 758 e 789 cm^{-1} . Questo fatto si spiega osservando che due altre frequenze fondamentali che si osservano in effetto Raman a 314 e 459 cm^{-1} hanno per somma 773. Questa somma giace quasi esattamente in mezzo alle due frequenze 758 e 789. Ci troviamo dunque di nuovo in presenza di una quasi degenerazione accidentale che determina la scissione in due della frequenza Raman indicata. Il tetracloruro di carbonio presenta anche un interessante esempio di una armonica che compare in effetto Raman. Si osserva infatti una debole riga Raman a 1540 cm^{-1} ; essa corrisponde al doppio della frequenza spezzata in due dalla degenerazione accidentale.

3. EFFETTO RAMAN NEI CRISTALLI-SALGEMMA. - Le regole generali per determinare quali righe debbano apparire nello spettro Raman di un cristallo si possono dedurre in modo simile a quanto si fa per il caso delle molecole.

Naturalmente in un cristallo, dato che esso è sempre costituito da un numero enormemente grande di atomi, si ha sempre un numero enormemente grande di frequenze caratteristiche, disposte in modo da formare uno spettro continuo. Tuttavia in effetto Raman si osservano normalmente degli spettri costituiti da righe discrete; ciò dipende dal fatto che, come ora diremo, si osservano nello spettro Raman di un cristallo, almeno in prima approssimazione, solo quelle frequenze elastiche che corrispondono a vibrazioni elastiche del cristallo con lunghezza d'onda infinita.

In un cristallo costituito da un insieme di n reticoli atomici semplici le vibrazioni elastiche possono, come è noto, caratterizzarsi per mezzo della lunghezza d'onda e della direzione di propagazione di onde elastiche; per ogni lunghezza d'onda e direzione di propagazione, si hanno in genere $3n$ frequenze elastiche, di cui tre, per lunghezza d'onda infinita, tendono a zero; mentre le altre $3n - 3$ tendono a valori di frequenze infrarosse.

Per studiare nel modo più semplice come queste diverse frequenze elastiche agiscono in effetto Raman, considereremo un pezzetto di cristallo, che abbia dimensioni piccole in confronto alla lunghezza d'onda della luce e grande in confronto alle dimensioni interatomiche. Se nel cristallo è eccitata una vibrazione elastica, essa determinerà delle pulsazioni della polarizzabilità elettrica del cristallo, che determinano l'effetto Raman. Ora può ammettersi che in prima approssimazione la variazione della polarizzabilità elettrica in una certa posizione del cristallo sia proporzionale alla deformazione elastica del cristallo in quella particolare regione. Se quindi la lunghezza d'onda della vibrazione elastica che determina le variazioni della polarizzabilità è piccola in confronto alle dimensioni del pezzetto di cristallo, avremo che in punti di fase opposta rispetto alla vibrazione elastica, la variazione della polarizzabilità elettrica sarà opposta, così che in media l'effetto sopra tutto il cristallo

verrà ad essere nullo. Un effetto non nullo si potrà avere in questa approssimazione solo dalle vibrazioni elastiche che hanno lunghezza d'onda comparabile con le dimensioni del cristallo, e cioè praticamente infinita. Una analisi più accurata dimostra che sono attive in effetto Raman vibrazioni che hanno lunghezza d'onda elastica dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda della luce, e quindi enormemente grande in confronto delle distanze interatomiche.

Ciò spiega come si osservino normalmente nell'effetto Raman dei cristalli delle frequenze discrete invece di uno spettro continuo; le frequenze che si osservano corrispondono infatti alle vibrazioni in cui i singoli reticoli semplici che costituiscono il reticolo cristallino si mantengono rigidi e vibrano uno contro l'altro. Naturalmente anche per queste vibrazioni si hanno delle ulteriori regole di selezione, in tutto analoghe a quelle che valgono per il caso delle molecole, determinate da particolari simmetrie dell'aggregato atomico del cristallo. In particolare la simmetria del cristallo può esser tale che tutte le frequenze siano proibite in effetto Raman, per modo che il cristallo non ha in prima approssimazione, alcun effetto Raman.

Un caso di questo genere si presenta nel salgemma. Il reticolo di questo cristallo è costituito come è ben noto da due reticoli cubici a facce centrate, uno occupato dagli atomi di cloro e l'altro dagli atomi di sodio. Le vibrazioni di lunghezza d'onda elastica infinita si ottengono facendo vibrare, uno contro l'altro, questi due reticoli. Si ha così una sola frequenza triplamente degenera. È facile convincersi che essa è inattiva in effetto Raman, poiché le variazioni della polarizzabilità del cristallo determinate da uno spostamento relativo dei due reticoli di cloro e di sodio sono evidentemente di ordine superiore al primo.

Segue che nel salgemma non si deve avere alcun effetto Raman, quando almeno ci si limiti alla osservazione del fenomeno intenso del primo ordine: e questa conclusione è completamente confermata dalla esperienza. È riuscito tuttavia a Rasetti, servendosi di un dispositivo assai luminoso e con esposizioni molto lunghe, di mettere in evidenza uno spettro Raman anche nel salgemma.

Lo spettro che così si osserva ha tuttavia un aspetto molto differente dagli spettri che comunemente si osservano nei cristalli. Mentre questi infatti sono per solito costituiti da righe discrete, lo spettro Raman del salgemma consiste in uno spettro continuo che, partendo dalla riga eccitatrice (nelle osservazioni di Rasetti la 2537 del mercurio) si estende con varie oscillazioni di intensità, fino a una distanza da essa di circa 365 cm^{-1} .

L'interpretazione teorica di questo effetto Raman si ottiene facilmente ammettendo che esso sia da interpretarsi come un effetto Raman del secondo ordine. Per riconoscere in modo facile che uno spettro Raman del secondo ordine deve essere continuo, invece che costituito da righe staccate, si osservi che le variazioni locali della polarizzabilità elettrica in un cristallo dipendono dalla deformazione locale del cristallo. Se in prima approssimazione si considera la variazione della polarizzabilità proporzionale alla deformazione, l'effetto si annulla in media nell'intero cristallo, salvo che per le vibrazioni elastiche di lunghezza d'onda infinita, e si hanno dunque, come già si è discusso, delle righe Raman discrete, corrispondenti appunto alle frequenze di oscilla-

zione elastica del cristallo aventi lunghezza d'onda infinita; quando però, come nel salgemma, sono nulli i termini lineari nella variazione della polarizzabilità elettrica, si deve passare alla considerazione dei termini quadratici; e questi non sono più nulli nemmeno per onde elastiche di piccola lunghezza d'onda. Poiché, anche in punti di fase opposta, hanno lo stesso segno e quindi non si eliminano nella media su tutto il cristallo. Concludiamo dunque che mentre nell'effetto Raman di primo ordine sono attive soltanto le frequenze di lunghezza d'onda elastica infinita, nell'effetto del secondo ordine sono attive frequenze di tutte le lunghezze d'onda, per modo che lo spettro del secondo ordine viene ad essere uno spettro continuo, come effettivamente si osserva.

Per studiare la cosa un po' più precisamente per il caso del salgemma, introduciamo un sistema di coordinate x, y, z con origine in uno degli atomi di Cl. Se con a si indica la distanza tra atomi contigui di Cl e di Na, le coordinate delle posizioni di equilibrio degli atomi saranno $x = n_1 a, y = n_2 a, z = n_3 a$, dove n_1, n_2, n_3 sono numeri interi. Si ha precisamente un atomo di Cl o di Na a seconda che la somma $n_1 + n_2 + n_3$ è pari o dispari.

Per ogni numero d'onde elastico vettoriale $f \equiv (f_1, f_2, f_3)$ il reticolo cristallino ha sei vibrazioni caratteristiche con sei frequenze proprie

$$\omega_i(f) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

e a ciascuna di queste vibrazioni corrisponde una coordinata normale q_{if} . Lo spostamento di un atomo del reticolo, espresso in funzione delle coordinate normali, è

$$(10) \quad \xi_n = \sum_f \sum_{i=1}^6 q_{if} \left| \frac{A_{if}}{B_{if}} \right| \cos \left[2\pi a (n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3) + \frac{\varphi_{if}}{\psi_{if}} \right]$$

dove si debbono prendere le espressioni superiori (A, φ) o quelle inferiori (B, ψ) a seconda che $n_1 + n_2 + n_3$ è pari o dispari, e cioè a seconda che si tratta di un atomo di cloro o di sodio. Si deve sommare sopra tutti i numeri d'onde dello spettro di Debye.

La polarizzabilità k di un atomo (n) dipende evidentemente dal suo spostamento relativo agli atomi circostanti; essa è dunque una funzione delle grandezze $\xi_{n+l} - \xi_n$, in cui n ed l sono abbreviazioni per le terne di numeri n_1, n_2, n_3 ed l_1, l_2, l_3 . Sviluppando questa funzione in serie di potenze fino ai termini di secondo ordine si trova

$$(11) \quad k = k_0 + \sum_l \alpha_l (\xi_{n+l} - \xi_n) + \sum_{jl} \beta_{jl} (\xi_{n+j} - \xi_n) (\xi_{n+l} - \xi_n).$$

Per la simmetria particolare del nostro reticolo (in cui ogni atomo si trova in un centro di simmetria) si avrà poi evidentemente $\alpha_l = -\alpha_{-l}$. L'espressione precedente diventa dunque

$$(12) \quad k = k_0 + \frac{1}{2} \sum_l \alpha_l (\xi_{n+l} - \xi_{n-l}) + \sum_{jl} \beta_{jl} (\xi_{n+j} - \xi_n) (\xi_{n+l} - \xi_n).$$

La polarizzabilità media in tutto il cristallo si otterrà sostituendo per le ξ le loro espressioni (10) e mediando su tutto il reticolo, osservando che gli

atomi $n + l$ ed $n - l$ sono dello stesso tipo. Si trova così senza difficoltà una espressione della forma

$$(13) \quad \bar{k} = k_0 + \sum_f \sum_{r,s=1}^6 A_{rsf} q_{rf} q_{sf}$$

poiché tutti gli altri termini si eliminano nella media.

A questa espressione delle variazioni della polarizzazione elettrica del cristallo corrispondono evidentemente in effetto Raman le frequenze

$$(14) \quad \omega_i(f) + \omega_k(f) \quad , \quad \omega_i(f) - \omega_k(f) \quad , \quad 2\omega_i(f)$$

e cioè le frequenze di combinazione che si ottengono sommando o sottraendo due frequenze elastiche dello stesso numero d'onde f (vettoriale).

Lo spettro Raman di secondo ordine si estenderà dunque attraverso ad oscillazioni di intensità, che sarebbero assai difficili a calcolare quantitativamente, dalla frequenza zero fino a una frequenza eguale al doppio della frequenza massima. Il valore di questa, noto dalle osservazioni infrarosse, si aggira intorno ai 60μ ; mentre dallo spettro Raman si calcolerebbe una frequenza, abbastanza prossima ad essa, di circa 55μ .

4. LO SPETTRO RAMAN DELLA CALCITE. - Nello spettro Raman della calcite⁽⁴⁾ si osservano sei frequenze: 155, 282, 714, 1088, 1438, 1741 cm^{-1} . L'interpretazione delle cinque frequenze più basse non presenta nessuna particolarità interessante e ci dedicheremo in questo paragrafo allo studio della frequenza 1741, che, come vedremo, presenta invece un certo interesse.

Nella calcite, come del resto in tutti i cristalli contenenti degli ioni complessi, CO_3 , NO_3 , SO_4 , NH_4 ecc. le frequenze possono classificarsi in frequenze interne e frequenze esterne. Le prime, che sono in genere le frequenze più elevate, corrispondono a oscillazioni in cui le varie parti dello ione complesso vibrano le une contro le altre. Le altre invece corrispondono a vibrazioni degli ioni in cui questi vibrano gli uni contro gli altri senza subire deformazioni interne considerevoli. Le frequenze interne si riconoscono facilmente dalle esterne, sia perché sono più grandi, sia anche perché esse sono poco modificate dall'influenza del reticolo cristallino, e quindi si ritrovano, più o meno spostate, in tutti i cristalli che contengono uno stesso ione complesso, o anche in soluzioni contenenti lo stesso ione. Nella calcite dovremo dunque attenderci alcune frequenze interne corrispondenti alle vibrazioni dello ione CO_3 , e alcune frequenze esterne.

Lo ione CO_3 ha una struttura piana, in cui l'atomo di carbonio si trova nel centro di un triangolo equilatero i cui vertici sono occupati dai tre atomi di ossigeno. Una semplice analisi delle frequenze elastiche di un siffatto sistema, dimostra che esse sono in numero di quattro, e cioè:

una frequenza ν_1 in cui il carbonio resta fermo mentre il triangolo dei tre atomi di ossigeno alternativamente si contrae e si allarga conservando la propria simmetria;

(4) Questi dati sono citati da K. W. F. KOHLRAUSCH, *Der Smekal-Raman-Effekt*, Berlino 1931. Altre righe, indicate da Kohlrausch come incerte, debbono ritenersi dovute a impurità.

due frequenze ν_2 e ν_3 doppiamente degeneri consistenti in vibrazioni dei quattro atomi nel piano in cui essi sono contenuti;

una frequenza ν_4 consistente in una vibrazione dell'atomo di carbonio perpendicolarmente al piano dei tre atomi di ossigeno, i quali, conservando distanze inalterate tra di loro, eseguono una vibrazione complementare a quella dell'atomo di ossigeno, in modo che il centro di gravità del sistema resti fisso.

Si riconosce facilmente che se si considera lo ione CO_3 libero, debbono essere attive in effetto Raman le frequenze ν_1, ν_2, ν_3 , mentre in infrarosso sono attive le frequenze ν_2, ν_3, ν_4 .

I valori di queste quattro frequenze subiscono dei lievi cambiamenti quando lo ione CO_3 entra a far parte del legame cristallino. Così nel caso della calcite le tre frequenze attive in effetto Raman dello ione CO_3 si possono identificare al modo seguente $\nu_1 = 1088, \nu_2 = 714, \nu_3 = 1438$. La frequenza inattiva ν_4 , che non si osserva in effetto Raman, è nota tuttavia dalle misure dell'assorbimento infrarosso ed è prossima a 870 cm^{-1} . La stessa frequenza si osserva del resto anche come riga Raman debolissima in altri cristalli contenenti lo ione CO_3 , per esempio nell'aragonite, in cui la posizione dello ione nel reticolo cristallino ne determina delle lievi deformazioni, che hanno per effetto di rendere attiva in effetto Raman la frequenza ν_4 che, come si è detto, è inattiva nello ione libero, come lo è anche quando lo ione si trova incorporato nel reticolo cristallino della calcite. Le due frequenze 155 e 282 dello spettro Raman della calcite si interpretano senza difficoltà come dovute a vibrazioni esterne del reticolo; resta dunque solo da interpretare la frequenza più elevata 1741.

Il fatto che questa frequenza coincida abbastanza approssimativamente col doppio della frequenza inattiva ν_4 dello ione CO_3 , rende plausibile ammettere che essa sia in qualche modo connessa con la armonica di ν_4 . Vi è tuttavia una caratteristica difficoltà per una tale interpretazione; abbiamo visto infatti che in un cristallo ci si deve attendere nel secondo ordine uno spettro Raman continuo e non uno spettro di righe. Le considerazioni che ora faremo hanno lo scopo di dimostrare che può accadere che, in determinate circostanze, si osservino anche nell'effetto Raman dei cristalli delle righe corrispondenti ad armoniche superiori.

Cerchiamo di renderci conto del come dovrà presentarsi l'effetto Raman del secondo ordine di una frequenza interna del gruppo CO_3 della calcite.

Osserviamo prima di tutto che nel reticolo della calcite ogni cella cristallina contiene due molecole CaCO_3 . Abbiamo quindi due reticoli semplici di ioni CO_3 . I gruppi CO_3 appartenenti a questi due reticoli semplici sono situati in piani paralleli tra di loro (perpendicolari all'asse ternario), e differiscono perché rotati uno rispetto all'altro di un angolo di 60° nel loro piano. Quando nel reticolo cristallino si ha un'onda elastica che deformi gli ioni CO_3 , le forze elastiche di richiamo che tendono a riportare gli ioni alla loro configurazione normale sono in prima approssimazione forze che si esercitano tra gli atomi appartenenti allo stesso ione e solo in ulteriore approssimazione debbono considerarsi anche delle forze dovute all'effetto della deformazione degli ioni circostanti, essi pure deformati.

In conseguenza la frequenza della vibrazione viene a dipendere poco dalla lunghezza d'onda della deformazione elastica; le differenze di frequenza che si hanno per una stessa vibrazione interna, corrispondentemente a differenti lunghezze d'onda elastiche sono dello stesso ordine di grandezza delle differenze di frequenza della stessa vibrazione interna, quando lo ione appartiene a reticoli cristallini differenti, e cioè di alcune decine di numeri d'onde.

Già questo fatto ha per conseguenza che gli spettri continui che, nell'effetto Raman di seconda approssimazione, corrispondono alle armoniche superiori di una vibrazione interna, debbono in realtà ridursi a strisce di abbastanza piccola larghezza. In determinate circostanze può poi accadere che questa larghezza si riduca ancora di molto, fino a che lo spettro continuo finisca per diventare una vera e propria riga per il motivo seguente.

Siccome nella cella del reticolo della calcite sono contenuti due ioni CO_3 , ad ogni frequenza propria dello ione CO_3 corrisponderanno, per ogni numero d'onde elastico (vettoriale), due frequenze, non molto lontane dalla frequenza della corrispondente vibrazione nello ione libero. In determinate circostanze può avvenire, come mostreremo ora sopra un esempio, che mentre queste due frequenze dipendono, se pure non molto, dalla lunghezza d'onda elastica, la loro somma ne sia invece indipendente. In queste circostanze lo spettro continuo che normalmente corrisponde nell'effetto Raman del secondo ordine alla somma delle due frequenze indicate, viene evidentemente a ridursi ad una riga.

Un esempio molto semplice delle circostanze in cui può accadere che la somma di due frequenze risulti indipendente dalla lunghezza d'onda elastica è il seguente: consideriamo una fila di atomi (reticolo unidimensionale) equidistanti. Supponiamo che ogni atomo sia soggetto ad una forza elastica, abbastanza intensa, che tende a mantenerlo nella sua posizione di equilibrio, forza che, in questo modello, corrisponde alle forze di richiamo *interne* dello ione; supporremo poi che sopra l'atomo si esercitino anche delle forze proporzionali alle variazioni della sua distanza dai due atomi attigui; queste siano però piccole in confronto alle precedenti, in modo da produrre solo delle lievi variazioni della frequenza di oscillazione degli atomi. Per rappresentare in qualche modo nel nostro modello unidimensionale la circostanza, che il reticolo della calcite contiene in ogni cella due ioni CO_3 , ammetteremo che nella fila si debba considerare ogni cella come composta dall'insieme di due atomi, per il che gli atomi della fila debbono essere alternativamente distinguibili, benché essi abbiano la stessa massa (si osservi che, nel reticolo della calcite, la differenza tra due ioni CO_3 appartenenti a reticoli semplici diversi, consiste nella diversa orientazione del triangolo formato dai tre ossigeni).

Indichiamo con a la distanza tra due atomi successivi della fila, per modo che la periodicità del reticolo lineare sia $2a$. Siano poi: k il coefficiente della forza elastica che richiama ogni atomo verso la sua posizione di equilibrio e r il coefficiente della forza che lo collega ai due atomi circostanti; per le nostre ipotesi si avrà $k \gg r$. Le equazioni del movimento dei nostri atomi si scrivono senza difficoltà: indicando con x_n lo spostamento dell' n^{esimo} atomo della fila si avrà

$$(15) \quad m\ddot{x}_n = -kx_n + r(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n).$$

Questo sistema di equazioni si integra subito ponendo

$$(16) \quad x_n = A e^{2\pi i(\omega t - g^n)}$$

in cui A rappresenta una ampiezza costante. Sostituendo nella (15) si trova

$$(17) \quad -4\pi^2 m \omega^2 = -k + 2r(\cos 2\pi g - 1).$$

e cioè

$$(18) \quad \omega^2 = \frac{k}{4\pi^2 m} + \frac{r}{2\pi^2 m} (1 - \cos 2\pi g).$$

Ricordando che per ipotesi $k \gg r$, possiamo estrarre la radice quadrata dalla (18) sviluppando rispetto a r e trascurando i termini in r^2 . Si trova così l'espressione della frequenza ω di oscillazione in funzione di g :

$$(19) \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{r}{2\pi \sqrt{km}} (1 - \cos 2\pi g).$$

Osserviamo ora che, siccome il periodo del nostro reticolo è $2a$, onde elastiche per le quali i due g differiscano di $1/2$ hanno la stessa lunghezza d'onda. Consideriamo dunque due onde elastiche, i cui g abbiano i valori

$$(20) \quad g_1 = \frac{f}{2} \quad ; \quad g_2 = \frac{f+1}{2}$$

e che cioè corrispondano tutte e due allo stesso numero d'onde elastico $f/2a$. Le frequenze corrispondenti a queste due onde sono, secondo la (19)

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{r}{2\pi \sqrt{km}} (1 - \cos \pi f) \\ \omega_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{r}{2\pi \sqrt{km}} (1 + \cos \pi f) \end{array} \right.$$

Nell'effetto Raman di secondo ordine si può osservare la somma di due frequenze che hanno lo stesso numero d'onde elastico. Tale somma nel caso nostro è

$$(21) \quad \omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{r}{\pi \sqrt{mk}}$$

e non dipende dunque dal numero d'onde elastico. Per modo che in queste circostanze si osserverà, in secondo ordine, una riga Raman ben definita invece che, come accade normalmente, uno spettro continuo.

Queste considerazioni rendono assai probabile che la riga 1741 della calcite debba interpretarsi come armonica superiore della frequenza inattiva dello ione CO_3 . Del resto le considerazioni che nell'esempio precedente abbiamo svolto per il caso di un reticolo ad una sola dimensione possono facilmente generalizzarsi anche al caso di un reticolo di tre dimensioni. Senza entrare in dettaglio in questo calcolo accenno al suo risultato che è il seguente. Per ogni numero d'onde elastico (vettoriale) esistono due frequenze che derivano da ogni frequenza elastica interna; esse corrispondono alle due frequenze (20) dell'esempio precedentemente trattato e differiscono di poco dalla corrispondente frequenza che si avrebbe nello ione libero. La somma di queste due

frequenze resta poi indipendente dal numero d'onde elastico quando possa ritenersi che sopra gli ioni di un dato reticolo semplice si esercitino forze elastiche dovute alla deformazione dei soli ioni dell'altro reticolo semplice. Ora nel caso della calcite gli ioni CO_3 più vicini a uno ione CO_3 determinato, appartengono all'altro reticolo semplice; a distanza poco maggiore ci sono tuttavia già degli ioni dello stesso reticolo semplice. Bisogna perciò ammettere che l'azione di questi ultimi, per qualche ragione che non conosciamo, venga ad essere piuttosto piccola.

Uno spettro sostanzialmente simile a quello della calcite si osserva anche nel nitrato di sodio, che ha una struttura cristallina del tutto analoga a quella della calcite. Anche in questo cristallo si osserva una riga Raman della frequenza di 1670 cm^{-1} che deve verosimilmente interpretarsi come una armonica della frequenza inattiva dello ione NO_3 .

N° 72 b.

There were three important international conferences on nuclear physics between 1931 and 1933. The first "Convegno di fisica nucleare", in Rome was held in October 11-18, 1931 and attended by about forty-five physicists. This conference was held under the auspices of the Accademia d'Italia at the instigation of Fermi and Corbino. Its proceedings are published under the title, "Fondazione Alessandro Volta, Convegno di fisica nucleare" (Reale Accademia d'Italia, Roma, 1932).

They contain only the reports, but no minutes of the discussions. No mention of the neutron or the neutrino is to be found in them. We know, however, that on that occasion there were conversations between Pauli and Fermi on the neutrino. (See the introduction to papers N° 76, 80).

The second conference was held in Paris July, 1932 in the larger frame of the Fifth International Conference on Electricity.

Fermi was invited to give a report and he chose as a subject the nucleus, reading paper N° 72 on July 7, 1932.

The neutron had barely been observed and while there was still uncertainty on the interpretations of the experiments of Bothe and Curie and Joliot, Ettore Majorana in the Institute in Rome had immediately understood that there was what he called "a neutral proton". Majorana proceeded then to develop a model of a nucleus built of protons and "neutral protons" only, and proceeded considerably far in the description of the forces between these particles. He told Fermi and several of his friends of this work. Fermi immediately grasped its importance and urged Majorana to publish it. Majorana demurred because he thought that the results acquired thus far by him were too incomplete. He said that he did not want to write a paper on the subject yet. Fermi asked for permission to report Majorana's results at the Paris Conference, naturally giving him credit for the new ideas. Majorana answered that he would give permission only if the ideas were attributed to an old professor of Electrical Engineering who, incidentally, was supposed to be present at the Conference. This was obviously impossible and for these reasons Majorana's ideas were made known only much later, when they had been discovered independently by other physicists.

In the Fermi report we see the uncertainty still prevailing on the subject of the neutron.

In the discussion following Fermi's communication, according to the "Comptes Rendus de la première section du Congrès International d'Electricité" (Gauthier-Villars, Paris, 1932), there was the following exchange with the polish physicist, Wertenstein:

"M. Wertenstein demande des explications au sujet d'une émission possible de rayonnement accompagnant les rayons β naturels des corps radioactifs et rétablissant la conservation de l'énergie; il ne conçoit pas que ce puissent être des neutrons pour des raisons de masse.

"M. Fermi répond que de tels neutrons ne sont pas ceux que l'on a découverts mais auraient une masse très inférieure".

This exchange shows that the neutrino hypothesis by then had become known to physicists interested in beta decay.

Madame P. Curie presented also a report in which she described new experiments on the neutron and in the discussion following her report we find remarks by Fermi.

Finally, in 1933, there was a Solvay Conference at Bruxelles, from October 22 to the 29th. It was attended by about forty scientists. By that time nuclear physics had made gigantic strides, the neutron was well established, and the accelerating machines were beginning to give important results. Fermi participated in this conference and intervened repeatedly in the discussions. The name "neutrino" appears in remarks by Pauli.

The proceedings of this conference are published as "Institut International de Physique Solvay, Structure et propriétés des noyaux atomiques" (Gauthier-Villars, Paris, 1934).

72 b.

LO STATO ATTUALE DELLA FISICA
DEL NUCLEO ATOMICO

« Ric. Scientifica », 3 (2) 101-113 (1932)

Lo stato attuale della fisica del nucleo atomico può paragonarsi, sotto diversi aspetti, allo stato della fisica dell'atomo, trent'anni fa. A quell'epoca, infatti, nello studio delle proprietà dell'atomo ci si trovava dinanzi a una serie di fenomeni che non sembravano interpretabili colle teorie di allora, teorie basate essenzialmente sulla dinamica e sull'elettrodinamica classica, che hanno trovato il loro inquadramento naturale nella teoria dei quanti, prima sotto forma quasi esclusivamente qualitativa e oggi anche quantitativa, almeno nella maggior parte dei casi. Naturalmente le leggi quantiche non sono solamente vevoli per i fenomeni della scala atomica, ma anche per i fenomeni del mondo macroscopico; solamente, per questi ultimi, la loro importanza finisce col diminuire e le leggi classiche danno una approssimazione perfettamente sufficiente. Ciò che determina la necessità di sostituire le leggi quantiche alle leggi classiche, è il cambiamento di dimensioni degli oggetti studiati quando si passa dalle dimensioni ordinarie alle dimensioni atomiche.

Passando dallo studio della fisica atomica a quello della fisica nucleare, noi ci troviamo dinanzi a un nuovo cambiamento della scala dei fenomeni: si discende infatti dalle dimensioni atomiche, dell'ordine di grandezze di 10^{-8} cm alle dimensioni nucleari dell'ordine di 10^{-13} cm e cioè si passa allo studio di oggetti che hanno all'incirca dimensioni 100.000 volte più piccole di quelle degli atomi. La natura dei fenomeni atomici ci fa supporre che leggi, che regolano il comportamento dei corpuscoli costituenti l'atomo, non siano più applicabili senza modificazioni profonde, allo studio del comportamento dei corpuscoli costituenti il nucleo atomico. Questa ipotesi, specialmente per ciò che riguarda il comportamento degli elettroni facenti parte dei nuclei atomici, sembra in realtà confermata dall'insieme delle conoscenze attuali sui fenomeni dei nuclei atomici. È per questo motivo che io cercherò, in questo rapporto, di fissare l'attenzione specialmente sui fenomeni che si interpretano difficilmente colla meccanica corpuscolare attuale.

I. - PESI ATOMICI E DIFETTO DI MASSA.

La scoperta degli isotopi e il risultato fondamentale che il peso atomico di tutti gli atomi è, con una grande approssimazione, un numero intero, hanno permesso di avanzare l'ipotesi che tutti i nuclei atomici siano costituiti da due tipi fondamentali di corpuscoli, gli elettroni e i nuclei atomici dell'idrogeno o protoni. Ammessa questa ipotesi, il numero dei protoni e degli elettroni costituenti un nucleo dato si ottiene immediatamente, cono-

scendo il peso atomico M e la carica elettrica del nucleo, che è uguale al numero atomico Z dell'elemento e prendendo per unità il valore assoluto della carica elettronica. Chiamando N_p e N_e il numero dei protoni e degli elettroni contenuti in un nucleo atomico, si ha:

$$(1) \quad N_p = M \quad N_e = M - Z.$$

Per M si deve prendere naturalmente il peso atomico dell'atomo, arrotondandolo al numero intero più vicino. Ci si può chiedere se, oltre agli argomenti esposti, ce ne sono degli altri a fondamento dell'ipotesi che tutti i nuclei atomici siano costituiti da protoni e da elettroni. Ora che i nuclei atomici, o almeno qualche nucleo atomico, contengano effettivamente degli elettroni, è dimostrato dal fatto che noi osserviamo questi elettroni di origine nucleare nella radiazione β delle sostanze radioattive, e anche, al di fuori delle sostanze radioattive propriamente dette, nelle deboli radiazioni β emesse dal potassio e dal rubidio. La presenza di elettroni negli altri nuclei, benché sia molto probabile per ragioni di analogia, non è stata finora confermata direttamente. Una prova diretta dell'esistenza dei protoni nei nuclei atomici è data dalla disintegrazione artificiale: bombardando infatti un nucleo atomico di azoto, o di un altro elemento leggero, con particelle α dotate di grande velocità, si osservano dei protoni proiettati con una grande velocità, che debbono essere considerati come un prodotto di disintegrazione espulso dai nuclei di azoto sotto l'azione dell'urto con una particella α .

Determinata così l'esistenza dei protoni e degli elettroni nel nucleo atomico, o almeno in qualche nucleo, ci si può chiedere se questi sono veramente i soli corpuscoli elementari che intervengono nella struttura nucleare. È naturalmente impossibile di dare oggi a questa domanda una risposta sicura; e d'altra parte non ci si può dissimulare che l'interpretazione del nucleo atomico come un aggregato di protoni e di elettroni soli, incontra delle serie difficoltà, che indicheremo più innanzi.

Sovente si formano all'interno dei nuclei degli aggregati stabili di 4 protoni e di due elettroni, le particelle α o nuclei di elio, che conservano una certa individualità. Per quanto riguarda l'esistenza delle particelle α nell'interno dei nuclei atomici, noi ne abbiamo una prova diretta nelle radiazioni α delle sostanze radioattive; e ne troviamo una conferma indiretta nello studio dei pesi atomici dei diversi isotopi. Per lo studio della proprietà di un nucleo atomico, è importante di conoscere la sua massa con grande esattezza. Si chiama « difetto di massa » di un nucleo, la differenza fra la massa degli elettroni e dei protoni che lo costituiscono (calcolata prendendo come base il numero dei protoni e degli elettroni dato dalla formula (1)) e la massa effettiva del nucleo atomico. Se si ammette che il nucleo atomico è costituito da protoni e da elettroni, questa differenza di massa deve essere considerata come la massa equivalente, secondo la teoria della relatività, all'energia liberata, nella sintesi del nucleo atomico, dai protoni e dagli elettroni che lo costituiscono. Se si portano, su un grafico, in ascisse i pesi atomici e in ordinate i difetti di massa, si trova che il difetto di massa dipende regolarmente dal peso atomico e, in prima approssimazione, si può dire che gli sia proporzionale.

Questo fatto si può facilmente interpretare colla seguente ipotesi: ammettiamo che gli elettroni e i protoni, contenuti in un nucleo atomico, siano associati in gruppi di quattro protoni e due elettroni, riuniti nella configurazione di una particella α e formanti quindi un insieme stabile; il nucleo atomico nel suo insieme potrà quindi essere considerato come costituito da un insieme di particelle α , oltre a qualche protone ed elettrone in più, in numero insufficiente per poter formare altre particelle α . L'energia di formazione del nucleo atomico per opera di protoni e di elettroni consta quindi di due parti: una prima parte, la più grande, dovuta all'energia di formazione del numero massimo di particelle α che si possono formare coi protoni e cogli elettroni che costituiscono il nucleo; e una seconda parte, più piccola, che rappresenta l'energia di formazione del nucleo atomico dall'unione di particelle α e di protoni ed elettroni in più. Da questo punto di vista è interessante tracciare la curva dei difetti di massa, non rispetto alla massa totale degli elettroni e dei protoni che costituiscono il nucleo, ma rispetto alla massa delle particelle α e dei protoni ed elettroni eventualmente in più: si trovano in questo modo dei difetti di massa molto più piccoli, che si possono interpretare come energie di formazione del nucleo atomico pensato formato dall'unione delle particelle α e dei protoni ed elettroni in più. Fra tutti i tentativi d'interpretazione teorica della curva dei difetti di massa, si deve ricordare in primo luogo quello di Gamow: si tratta tuttavia di tentativi necessariamente basati su ipotesi alquanto primitive.

La relazione tra l'energia di formazione dei differenti nuclei atomici e le loro masse si potrebbe verificare, almeno in principio, per i nuclei di ogni famiglia radioattiva: infatti si conosce, con sufficiente approssimazione, l'energia liberata nei successivi processi di disintegrazione e si ha dunque un mezzo di costruire teoricamente la curva dei difetti di massa per gli elementi di ogni sostanza radioattiva; tuttavia la precisione colla quale si conosce il peso atomico non è sufficiente per poter fare una verifica di questo genere. Una tale precisione è ugualmente insufficiente per poter constatare le variazioni di peso atomico che si verificano nella formazione dell'isotopo dell'ossigeno O^{17} per disintegrazione artificiale dell'azoto.

II. - MOMENTI MECCANICI DEI NUCLEI ATOMICI E STATISTICHE DEI NUCLEI.

Una proprietà notevole di qualche nucleo atomico è quella di possedere un momento meccanico intrinseco. Quando si esprime questo momento, prendendo come unità $\hbar/2\pi$, questo momento ha, come per le masse atomiche, un valore uguale a un numero intero o a un numero intero diviso per due.

L'esistenza del momento nucleare si manifesta in diversi fenomeni che, almeno in certi casi, permettono di misurarlo. I fenomeni principali nei quali si manifesta l'esistenza del momento nucleare, sono:

- a) le intensità alternate negli spettri di bande;
- b) la struttura iperfina delle righe spettrali degli atomi.

Le intensità alternate si osservano negli spettri delle molecole biatomiche, costituite dall'unione di due atomi uguali, per esempio nelle bande dell' N_2 . Le successive righe di rotazione di queste bande appaiono con una intensità alternativamente debole e forte. Questa alternanza dell'intensità è stata spiegata da Heisenberg come dovuta al fenomeno quantico dello «scambio» tra i due nuclei atomici della molecola. Risulta dalla teoria che se i nuclei atomici di una molecola biatomica omonucleare non hanno un momento intrinseco, metà delle righe deve mancare nello spettro della molecola, il che si constata effettivamente, per esempio, nelle bande dell'elio e dell'ossigeno.

Se al contrario, il nucleo atomico ha un momento differente dallo zero, le righe che altrimenti mancherebbero, compaiono invece con intensità ridotta, dando così luogo all'alternanza caratteristica dell'intensità. Si può anche trovare facilmente una relazione fra il rapporto d'intensità delle linee forti e deboli successive e il valore J del momento nucleare (misurato di solito in unità $\hbar/2\pi$). Il rapporto di intensità è infatti

$$(2) \quad \frac{J+1}{J}.$$

Da questa formula risulta, in particolare, che l'alternanza di intensità è tanto più forte quanto più piccolo è il momento del nucleo; per esempio per $J = 1/2$, il rapporto di intensità tra le linee successive è uguale 3, se al contrario $J = 1$, il rapporto di intensità è uguale a 2, ecc. Si comprende dunque facilmente come, misurando il rapporto tra le intensità delle righe alternate di una banda spettrale, si possa, per mezzo della formula (2), trovare il valore del momento del nucleo. Misure di questo genere sono state eseguite per parecchi nuclei atomici; esse sono praticamente possibili soltanto per nuclei atomici, non troppo pesanti, altrimenti le bande spettrali diventano troppo ridotte e non si può più misurare il rapporto delle intensità.

Con questo metodo si è potuto, per esempio, riconoscere che un protone è dotato di un momento meccanico uguale a $1/2$, eguale di conseguenza al momento meccanico intrinseco dell'elettrone: il che si può interpretare se si ammette che il protone sia, come l'elettrone, un corpuscolo elementare che obbedisce a una meccanica regolata da una equazione d'onde analoga a quella stabilita da Dirac nella sua teoria relativistica dell'elettrone. In modo analogo si può determinare, per esempio, che la particella α e il nucleo atomico dell'ossigeno hanno un momento meccanico nullo e che il nucleo atomico dell'azoto ha un momento meccanico uguale a 1: noi ritorneremo più innanzi sulle difficoltà caratteristiche dell'interpretazione teorica di quest'ultimo risultato.

Prima di passare alla discussione della determinazione dei momenti meccanici nucleari, che si può ottenere dalle osservazioni sulla struttura iperfina, indichiamo un'altra proprietà importante del nucleo che si può determinare attraverso l'osservazione dell'intensità alternata degli spettri. Le linee dello spettro trovano la loro origine nei passaggi da alcuni termini della molecola ad altri termini della molecola; le alternanze dell'intensità provengono, dal fatto che i termini della molecola, hanno delle funzioni

d'onda alternativamente simmetriche e antisimmetriche rispetto allo scambio delle coordinate dei centri di gravità dei due nuclei atomici. Nel caso nel quale il nucleo atomico non ha un momento intrinseco, il suo stato è caratterizzato dalla semplice indicazione delle coordinate del centro di gravità e di conseguenza i termini simmetrici o antisimmetrici mancano alternativamente a seconda che per il tipo di nucleo considerato vale il principio di Pauli o la statistica di Bose-Einstein. La presenza del momento nucleare ha per effetto di far apparire i termini che altrimenti mancherebbero totalmente: questi hanno però una probabilità di esistenza più piccola degli altri, in modo che le righe corrispondenti sono meno intense e danno origine così al fenomeno delle intensità alternate. Si può dedurre il tipo di statistica alla quale obbediscono i nuclei atomici, quando si conosce il carattere di simmetria dei termini che danno luogo alle righe intense: ma per conoscerlo, è necessaria una analisi dei termini elettronici della molecola. Per esempio si è potuto dimostrare che il protone si comporta come l'elettrone e obbedisce al principio di Pauli, mentre invece i nuclei atomici dell'elio, dell'ossigeno e dell'azoto soddisfano alla statistica di Bose-Einstein.

Un secondo metodo molto importante per l'osservazione dei momenti meccanici dei nuclei atomici si ottiene dallo studio della struttura iperfina. Le righe spettrali emesse da qualche atomo, osservate con un alto potere risolutivo, appaiono divise in parecchie componenti molto vicine le une alle altre. Si è potuto trovare che questa divisione in più componenti è determinata dall'azione del momento meccanico del nucleo sulle orbite degli elettroni dell'atomo.

Questo fenomeno si può rappresentare nel modo seguente: gli elettroni dell'atomo nella loro rotazione attorno al nucleo atomico danno origine a un campo magnetico H , nel quale il nucleo atomico si trova immerso. Ora è logico ammettere che sia nel nucleo che negli elettroni, il momento meccanico intrinseco è associato a un momento magnetico: nei nuclei il momento magnetico sarebbe molto più piccolo di un magnetone di Bohr. Secondo le diverse orientazioni dell'asse nucleare rispetto al campo H , si avranno diverse energie di accoppiamento tra il nucleo atomico e il sistema di elettroni e quindi una scissione dei termini, e quindi delle righe, in componenti molto vicine tra loro. Il numero delle componenti dipende oltreché dal termine dell'atomo che si considera, dal valore del momento meccanico del nucleo e può quindi, almeno in certi casi, servire per la sua determinazione. In particolare questa determinazione può farsi con certezza, quando è possibile l'osservazione dell'effetto Zeeman delle righe. Questo metodo di determinazione dei momenti meccanici dei nuclei è applicabile specialmente nel caso degli elementi molto pesanti, giacché in questi la struttura iperfina è generalmente più larga e, di conseguenza, più facilmente osservabile: ed inoltre le righe di questi elementi sono più fini e definite ed è quindi minore il loro allargamento per effetto Doppler. Con questo metodo si sono potuti misurare, per esempio, i momenti meccanici dei nuclei di bismuto, di tallio, di manganese e di molti altri elementi: e si è potuto così constatare che negli elementi con differenti isotopi, molto spesso questi vari isotopi hanno dei momenti meccanici nucleari differenti fra loro. È ciò che si verifica per

il cadmio, per il quale qualche isotopo ha un momento uguale a uno, mentre altri hanno un momento uguale a $1/2$. La discussione quantitativa della struttura iperfina permette anche di ottenere delle indicazioni sul momento magnetico che è associato al momento meccanico del nucleo. Se si potesse fare l'ipotesi che la sola causa di accoppiamento tra l'orientazione dell'asse nucleare e il sistema degli elettroni fosse l'energia del momento magnetico nucleare rispetto al campo magnetico generato dalla rotazione degli elettroni intorno al nucleo, si potrebbe anche, senza difficoltà di calcolo, dedurre direttamente il valore del momento magnetico del nucleo dalla larghezza di separazione della struttura iperfina. In realtà non è possibile di far dei calcoli di questo genere con grande precisione, a causa della conoscenza imperfetta delle autofunzioni delle diverse orbite elettroniche, che di solito si valutano con dei metodi numerici non molto precisi: inoltre si ha ragione di credere che il momento magnetico del nucleo atomico non è la sola causa dell'accoppiamento che determina la struttura iperfina: per conseguenza calcoli di questo genere non possono sinora che dare delle indicazioni sull'ordine di grandezza del momento magnetico del nucleo atomico. Questo ordine di grandezza è di circa 1 millesimo del magnetone di Bohr: esso è dunque paragonabile al momento magnetico che si dovrebbe attribuire a un protone se si ammettesse che esso è dato dalla stessa formula che dà il magnetone di Bohr, ove si sostituisca la massa elettronica colla massa protonica.

Prima di terminare questo argomento, noi dobbiamo ancora ricordare le difficoltà che si presentano nell'interpretazione teorica dei momenti e delle statistiche nucleari, quando si ammette che tutti i nuclei atomici siano costituiti dall'insieme di protoni e di elettroni. Siccome i protoni obbediscono, come gli elettroni, al principio di Pauli e hanno un momento meccanico intrinseco uguale a $1/2$, si può dedurre, con considerazioni indipendenti da ipotesi particolari sulla struttura del sistema, che ogni insieme di protoni e di elettroni deve:

- a) seguire la statistica di Bose-Einstein o il principio di Pauli, a seconda che il numero di corpuscoli che lo costituiscono è pari o dispari;
- b) avere un momento intrinseco intero o uguale a un intero dispari diviso per due, a seconda che il numero dei corpuscoli che lo costituiscono è pari o dispari.

Attualmente queste regole sono confermate effettivamente per qualche nucleo atomico; per esempio, la particella α che contiene quattro protoni e due elettroni e cioè, in totale, sei corpuscoli, ha un momento nullo e obbedisce alla statistica di Bose-Einstein.

Viceversa per altri nuclei atomici, queste regole sono in difetto: per esempio per il nucleo atomico dell'azoto. In questo, secondo la formula (1), si debbono avere quattordici protoni e sette elettroni e cioè, in totale, un numero dispari di corpuscoli. Secondo le regole esposte innanzi, per il nucleo atomico dell'azoto, dovrebbe valere il principio di Pauli, mentre le osservazioni di Rasetti sull'effetto Raman della molecola di azoto hanno messo fuor di dubbio che la statistica valida è quella di Bose-Einstein; inoltre si trova un momento intrinseco uguale a 1, mentre dal numero dei corpu-

scoli costituenti ci si dovrebbe attendere un momento uguale alla metà di un numero dispari. Si è concluso che questa anomalia proviene dal fatto che il nucleo atomico dell'azoto contiene un numero dispari di elettroni.

I nuclei atomici, per i quali si conoscono la statistica e il momento nucleare, sono troppo pochi, perché si possa affermare che si tratta di una regola generale. Le difficoltà dell'interpretazione della struttura nucleare sono così gravi da far dubitare dell'esattezza dell'ipotesi che i soli corpuscoli costituenti i nuclei siano i protoni e gli elettroni. D'altra parte non si deve giammai dimenticare che le idee fondamentali stesse della Meccanica quantica non sono probabilmente più applicabili allo studio dell'interno del nucleo atomico, specialmente per ciò che riguarda il modo di comportarsi degli elettroni.

Per quanto riguarda il momento magnetico nucleare, ci si può a prima vista meravigliare che un nucleo atomico, che contiene degli elettroni, che hanno un momento magnetico intrinseco di un magnetone di Bohr, abbia tuttavia un momento magnetico risultante dell'ordine di grandezza di un millesimo di magnetone di Bohr. Risulta tuttavia, anche dalla teoria ordinaria dell'elettrone, che il suo momento è uguale a un magnetone di Bohr solamente quando l'elettrone è libero, mentre per un elettrone fortemente legato, il momento è tanto più piccolo quanto meno estesa è l'orbita dell'elettrone stesso. Per questo stesso fatto l'energia dell'elettrone può crescere in modo che la sua massa può finire per non essere più trascurabile e per dare un contributo sensibile nel peso atomico dell'elemento: questo ci conferma ancora una volta che le concezioni della meccanica quantica ordinaria non sono applicabili allo studio della dinamica degli elettroni nel nucleo atomico. A proposito dei momenti e delle statistiche nucleari, ci resta ancora da indicare che per il caso del protone e della particella α è stato possibile di controllare, per mezzo di metodi indipendenti, i risultati ottenuti dall'osservazione delle bande spettrali. Per i protoni ciò è stato fatto per mezzo dell'osservazione dei calori specifici a basse temperature e in generale attraverso lo studio delle proprietà dell'orto e del para-idrogeno; per la particella α per mezzo delle esperienze di Chadwick e di Blackett sulla diffusione delle particelle α nell'elio, interpretata colla teoria di Mott sopra l'urto fra corpuscoli che obbediscono alla statistica di Bose-Einstein. Esperienze dello stesso genere sono state ripetute da Gerthsen coi raggi canali dell'idrogeno.

III. - RAGGI α .

Le manifestazioni più apparenti dei fenomeni nucleari consistono essenzialmente nelle radiazioni e nelle trasformazioni radioattive. Noi ci limiteremo soltanto a discutere i risultati più recenti e più significativi per la interpretazione teorica dei fenomeni nucleari.

Cominciamo dalla discussione della radiazione α .

La teoria della emissione delle particelle α ha compiuto in questi ultimi anni un grande progresso, grazie ai lavori di Gamow. Ridotta alle sue

caratteristiche essenziali, la teoria di Gamow si può descrivere nel modo seguente: si ammette innanzitutto che la forza esercitata da un nucleo atomico pesante su una particella α è regolata dalla legge repulsiva di Coulomb soltanto a partire da una certa distanza dal nucleo (dell'ordine di grandezza di 10^{-12} cm), e che in vicinanza del nucleo la forza diventa attrattiva, in modo da poter spiegare il fatto che le particelle α non abbandonano istantaneamente il nucleo atomico al quale esse appartengono. La curva rappresentativa dell'energia potenziale, in funzione della distanza r della particella dal centro del nucleo, ha allora l'andamento della curva indicata nella figura 1.

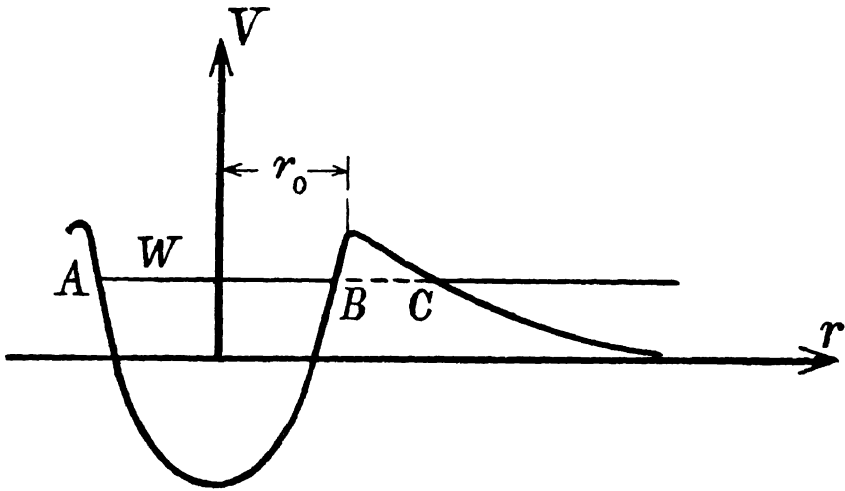


Fig. 1.

Supponiamo, con Gamow, che l'energia della particella α , contenuta all'interno di un nucleo atomico radioattivo corrisponda al livello W della figura. Secondo la meccanica classica, il movimento di una particella avente una energia W e posta all'interno del nucleo consisterebbe in una serie di oscillazioni tra i limiti A e B .

La situazione è invece differente dal punto di vista della meccanica ondulatoria: infatti, secondo la meccanica ondulatoria, tutte le volte che la particella arriva in B , essa ha una probabilità piccola, ma finita, di oltrepassare la zona BC , ove, secondo la meccanica classica, la sua energia cinetica sarebbe negativa. Essa può così raggiungere la zona al di là di C , ove la forza esercitata dal nucleo diventa repulsiva, in modo che la particella può abbandonare definitivamente il nucleo atomico. La probabilità che la particella α abbandoni il nucleo è dunque proporzionale al numero di volte che essa arriva in B nell'unità di tempo e alla probabilità che, in un urto contro B , essa sorpassi la « barriera di potenziale » tra B e C . Quest'ultima probabilità decresce assai rapidamente coll'altezza e lo spessore della barriera di potenziale. Su queste basi Gamow ha potuto calcolare le vite medie degli elementi radioattivi; facendo l'ipotesi che, per tutti gli elementi della stessa famiglia radioattiva, il raggio r_0 , al quale si arresta la validità della

legge di Coulomb, sia presso a poco costante, la teoria di Gamow dà una semplicissima interpretazione della relazione scoperta empiricamente da Geiger e Nuttall, tra la vita media di un elemento radioattivo e la velocità della particella che esso emette disintegrandosi.

Un fatto assai importante per la comprensione delle proprietà del nucleo è quello scoperto recentemente, da Rosenblum, e cioè che i raggi α emessi dai prodotti C delle tre famiglie radioattive sono costituiti da gruppi aventi delle velocità di emissione differenti. L'osservazione di questo fenomeno è stata resa possibile dall'uso del grande elettromagnete di Bellevue, che permette di deviare le traiettorie delle particelle α fino a far loro descrivere un semicerchio e per conseguenza di mettere a fuoco lo spettro delle velocità delle particelle α . I risultati di Rosenblum sono stati confermati da Lord Rutherford, per mezzo di un metodo elegante di misura della curva di distribuzione dei percorsi delle particelle α . Dei tre prodotti C, quello che è stato meglio analizzato è il Th C, nel quale sono state osservati con esattezza almeno quattro gruppi omogenei di particelle α .

Per l'interpretazione teorica di questi risultati, Gamow ha proposto la seguente spiegazione: ammettiamo che, quando la particella α lascia l'atomo C, il prodotto di disintegrazione, ossia l'atomo C'' sia in uno stato eccitato. L'energia colla quale la particella α abbandona il corpo C sarà evidentemente tanto più grande, quanto più profondo sarà il livello energetico del nucleo atomico residuo del corpo C''; e le differenze tra le energie di emissione dei differenti gruppi di particelle α del corpo C daranno direttamente le differenze tra i livelli energetici del nucleo del corpo C''. Sulla base di queste considerazioni Gamow ha costruito uno schema teorico dei livelli energetici del nucleo atomico del Th C''. Ora dovrebbe essere possibile di ritrovare le differenze tra questi livelli energetici fra le frequenze dello spettro γ del Th C''. Ma non sembra tuttavia che una tale corrispondenza tra i raggi γ del Th C'' e i raggi α del Th C sia stata sinora stabilita sperimentalmente in una maniera indiscussa. Vi è una analogia notevole tra le strutture fini dei raggi α dei corpi C e i gruppi di particelle α , di energia straordinariamente grande, che si osservano nei corpi C', particolarmente nel Th C' e nel Ra C'. Per quest'ultimo corpo (Ra C'), Lord Rutherford ha osservato nove gruppi di particelle α , aventi una energia di emissione notevolmente superiore alla normale; l'intensità di questi gruppi è estremamente piccola, corrispondente come ordine di grandezza, a circa una particella per ogni 10^5 particelle aventi una energia normale. Per la spiegazione di questi gruppi di particelle α , con una energia superiore alla normale, Gamow ha supposto che il nucleo atomico del Ra C', formantesi dalla disintegrazione del Ra C per emissione di una particella β , possa restare in uno stato eccitato, dal quale può ritornare allo stato normale, sia per emissione di un quanto di radiazione γ , sia per disintegrazione con emissione di una particella α con una velocità superiore alla normale. Naturalmente, secondo, questa interpretazione, dovrebbe esistere una corrispondenza tra le frequenze dello spettro γ del Ra C' e la differenza di energia tra i differenti gruppi di particelle α di questo elemento. Non è stato ancora possibile di stabilire una tale relazione.

IV. - RAGGI β .

I raggi β emessi dalle sostanze radioattive possono essere classificati in raggi β primari, costituiti da elettroni direttamente emessi da un nucleo atomico che si disintegra, e in raggi β secondari, costituiti da elettroni che non provengono dal nucleo atomico, ma dalle orbite dell'atomo e che sono espulsi da questo atomo per effetto fotoelettrico, attraverso un processo detto di fotoelettricità interna, sotto l'azione di un quanto di radiazione γ emesso dal nucleo atomico.

Mentre le particelle α , che abbandonano il nucleo atomico che si disintegra, hanno delle velocità molto ben definite, i raggi β primari lasciano il nucleo atomico con velocità variabili entro limiti assai vari. Per esempio si è trovato che le particelle β del Ra E escono dal nucleo atomico con energie variabili in maniera continua da un minimo di 200.000 a un massimo di un milione di volt-elettrone. Si è a lungo supposto che questo « spettro continuo dei raggi β » non fosse che una apparenza, dovuta a perdite di energia subite dalla particella β dopo aver abbandonato il nucleo atomico. Al contrario le misure calorimetriche di Ellis e Wooster, e quelle più recenti di Meitner e Orthmann, nelle quali si misura direttamente l'energia totale delle particelle β attraverso il calore che esse sviluppano nell'interno di un recipiente che le assorbe integralmente, hanno messo fuor di dubbio che l'energia colla quale un nucleo emette la particella β varia effettivamente entro limiti piuttosto estesi. Questo fatto ha una grande importanza teorica, in quanto esso sembra in contraddizione con tutte le teorie del nucleo atomico, che mantengono il principio della conservazione dell'energia; infatti si potrebbe pensare che le differenze di energia delle particelle β fossero compensate da uno spettro continuo di radiazione γ : ricerche fatte per rivelare la esistenza di questa radiazione γ hanno dato risultati negativi.

Sembra dunque che per gli elettroni nucleari l'energia non ha più un valore ben definito, a meno che non si voglia pensare a una nuova forma di energia che sfugge ai nostri mezzi attuali di osservazione.

Si potrebbe pensare per esempio, secondo un suggerimento di Pauli, che nel nucleo atomico si trovino dei neutroni che sarebbero emessi contemporaneamente alle particelle β . Questi potrebbero passare attraverso grandi spessori di materia non perdendo che una piccola parte della loro energia e, quindi, sfuggire praticamente all'osservazione. L'esistenza del neutrone potrebbe senza dubbio dare una spiegazione molto semplice di certi fenomeni attualmente poco comprensibili, come la statistica e i momenti nucleari anormali di certi nuclei, e forse anche, la natura della radiazione penetrante.

I raggi β secondari, come si è detto, sono formati da elettroni che non provengono dall'interno del nucleo atomico. Questi vengono prodotti da un vero e proprio effetto fotoelettrico determinato dall'assorbimento di un quanto di radiazione γ da parte dell'atomo della sostanza radioattiva stessa nella quale si sono prodotti i raggi γ o anche da parte di un altro atomo di specie differente esposto all'azione dei raggi γ . Se si indica con K, L, \dots i

livelli energetici dell'atomo nel quale ha luogo l'effetto fotoelettrico, l'energia dei fotoelettroni emessi sarà $h\nu - K, h\nu - L, \dots$. Ora questo processo di emissione di raggi β secondari, nel quale si ha una vera e propria emissione di un quanto γ , seguita da un riassorbimento, con effetto fotoelettrico, da parte degli anelli elettronici dell'atomo, sembra si debba oggi spiegare con un meccanismo un po' differente: gli elettroni dell'atomo e particolarmente gli elettroni K, le orbite dei quali sono le più vicine al nucleo atomico, si trovano in interazione diretta col nucleo, in modo che a rigore il nucleo e gli elettroni che lo circondano debbono essere considerati come facenti parte di un unico sistema. Nel sistema complesso unico possono avvenire naturalmente delle transizioni tra stati colla stessa energia, determinati direttamente dall'accoppiamento delle due parti (nucleo atomico e sistema di elettroni), costituenti il sistema complesso. Si può così avere una transizione da uno stato nel quale il nucleo si trova in un livello energetico eccitato e un elettrone si trova nel livello K, a uno stato nel quale il nucleo si trova nel livello fondamentale e l'elettrone si trova in un livello eccitato appartenente allo spettro continuo.

Quando il nucleo atomico si trova in un livello energetico eccitato, vi sono dunque due possibilità di ritornare allo stato fondamentale:

a) emissione vera e propria di un quanto γ , che può essere in seguito riassorbito da un altro atomo;

b) passaggio diretto dell'energia dal nucleo a un elettrone degli anelli elettronici.

Si è trovato sperimentalmente che il rapporto tra le probabilità di questi due processi può variare entro limiti piuttosto estesi. Si è tentato anche di valutare teoricamente la probabilità del processo b) e di confrontarla con quella che è stata trovata sperimentalmente. Secondo i calcoli di Fowler, Casimir, ecc. sembra tuttavia che la probabilità teorica sia più piccola di quella sperimentale, ciò che proverebbe che l'accoppiamento fra il nucleo e gli elettroni atomici è in realtà più forte di quello che lascerebbero prevedere le teorie odierne.

V. - RAGGI γ E LIVELLI ENERGETICI NUCLEARI.

La misura dell'energia cinetica dei raggi β secondari, che sono emessi per effetto fotoelettrico, o meglio, per passaggio diretto dell'energia dall'interno del nucleo all'interno del corpo elettronico che circonda il nucleo radioattivo, rappresenta il metodo di misura più conveniente dell'energia dei quanti di radiazione γ e quindi della loro frequenza. Problema importantissimo è la ricerca fino a qual punto le frequenze γ così trovate si possono disporre nello schema dei termini nucleari. Noi abbiamo già alluso alle informazioni che si possono avere sui livelli energetici dei nuclei atomici, esaminando la struttura delle particelle α e il comportamento delle particelle dotate di energia enormemente grande, almeno per quanto riguarda i corpi C' e C''.

Indipendentemente da questo, diversi tentativi sono stati fatti per stabilire degli schemi semplici di livelli energetici, rappresentanti le frequenze

degli spettri γ delle diverse sostanze: tuttavia non sembra che la precisione, colla quale sono conosciute attualmente le frequenze dei raggi γ , sia sufficiente per stabilire in modo univoco uno schema di termini: fatto dovuto essenzialmente alla mancanza di schemi teorici che possano servire di guida in tali ricerche. Va ricordato a questo proposito il tentativo di Rutherford e di Ellis che cercano di associare le diverse frequenze γ a transizioni simultanee di più di una particella α .

Particolarità importanti sull'assorbimento dei raggi γ molto duri sono state messe in evidenza in questi ultimi anni da Chao, Meitner e Hupfeld, ecc. Facendo delle esperienze coi raggi γ del Th C'', di 4,7 UX, essi hanno trovato che il coefficiente d'assorbimento delle varie sostanze, riferito a un numero fisso di elettroni, non è costante, ma cresce col peso atomico della sostanza assorbente. Per gli atomi leggeri l'assorbimento coincide con quello calcolato in base alle formule di Klein-Nishina, mentre per gli atomi pesanti esso è superiore. Sembra che questo fenomeno si debba attribuire a un assorbimento o a una diffusione dovuta al nucleo atomico, che si sovrappone alla diffusione degli elettroni atomici e che cresce in intensità coll'aumento del peso atomico del nucleo assorbente.

VI. - DISINTEGRAZIONE ED ECCITAZIONE ARTIFICIALE.

Mentre i fenomeni radioattivi ci mettono in presenza di trasformazioni del complesso nucleare, che si producono spontaneamente nei nuclei degli elementi molto pesanti e che non si è riusciti ad accelerare o a rallentare con alcun mezzo oggi conosciuto, si conosce da lungo tempo la possibilità di produrre artificialmente delle trasformazioni nei nuclei atomici degli elementi leggeri, bombardandoli con particelle α dotate di grande velocità.

Dal punto di vista teorico si comprende facilmente che questo fenomeno si presenta solo per i nuclei leggeri. Infatti quando una particella α urta un nucleo atomico pesante, la possibilità che essa entri all'interno, oltrepassando la barriera di potenziale che lo circonda, è praticamente trascurabile. Al contrario una particella che urta un nucleo atomico leggero ha una probabilità considerevole di penetrare nel suo interno, essendo qui la barriera di potenziale notevolmente più bassa.

Una particella α , urtando un nucleo atomico leggero, può produrre l'emissione di un protone o anche l'emissione di raggi γ . Siccome nei due processi la particella urtante può, o no, essere catturata dal nucleo atomico, noi dobbiamo distinguere i 4 seguenti casi:

- a) emissione di un protone colla cattura della particella α ;
- b) emissione di un protone senza cattura;
- c) emissione di un quanto γ con cattura;
- d) emissione di un quanto γ senza cattura.

Il primo di questi casi è noto da lungo tempo: recenti ricerche hanno permesso di studiarlo con dettagli ancora maggiori e di dimostrare, in particolare, che in qualche caso i protoni emessi sono costituiti da gruppi di differenti velocità.

Per esempio nel caso del boro, Bothe ha potuto riconoscere l'esistenza di tre gruppi di protoni, caratterizzati da un potere penetrante differente. Nel caso nel quale la particella α resta catturata dal nucleo atomico urtato, i principi della conservazione dell'energia e della quantità di moto permettono di vedere come deve variare la velocità dei protoni emessi nelle direzioni formanti angoli differenti colla direzione di propagazione della particella α che provoca gli urti. Questa velocità deve infatti essere indipendente dalla direzione quando essa si riferisce al baricentro del sistema formato dal nucleo atomico urtato e dalla particella α urtante. Dalla osservazione del rapporto esistente tra la velocità del protone e la direzione di emissione, si può risalire alla velocità del baricentro e di conseguenza, conoscendo la massa del nucleo atomico urtato, determinare la velocità della particella α al momento dell'urto. Misure di questo genere, eseguite da Bothe nel caso dei due gruppi di protoni che si ottengono dalla disintegrazione artificiale del boro, hanno dato come risultato per la velocità della particella α , che produce l'urto, dei valori che non coincidono esattamente con quello che ci si potrebbe attendere; tuttavia queste differenze sono forse dovute alla inesattezza delle misure.

Risultati analoghi sono stati ottenuti da Pose per l'alluminio; secondo Pose occorrerebbero delle velocità ben definite delle particelle α per produrre l'emissione di ogni gruppo di protoni; ma questi risultati non sono stati ancora confermati.

Non si conosce con certezza alcun caso nel quale la disintegrazione artificiale si produca secondo lo schema b), nel quale il nucleo atomico urtato perde un protone senza catturare la particella α . Sembra tuttavia che un caso di questo genere esista nella disintegrazione artificiale del boro, almeno per uno dei tre gruppi di protoni che sono emessi dal suo nucleo.

Ci resta infine da parlare dei processi c) e d), nei quali il nucleo urtato emette un quanto di radiazione γ . Questi processi sono stati osservati, solo di recente, da Bothe e Becker, bombardando diversi elementi leggeri coi raggi α del polonio. Risulta che diversi elementi, sotto l'azione del bombardamento, emettono una radiazione γ , l'intensità della quale è assai variabile da elemento a elemento e ha un massimo pronunciato per il berillio. Una tale radiazione si presenta sia negli elementi che, sotto l'azione del bombardamento, emettono dei protoni (per esempio nell'alluminio e nel boro), sia negli elementi che non danno luogo a emissione di protoni, come il litio e il berillio.

Questi fenomeni possono interpretarsi ammettendo che la particella α venga captata dal nucleo atomico, cedendo eventualmente la sua energia a qualche protone nucleare; e che la radiazione sia emessa durante la costituzione del nuovo nucleo così formato.

Un fatto notevolissimo che è stato messo in evidenza dalle misure di assorbimento di Bothe, di I. Curie e di Joliot, è che le radiazioni γ artificiali del berillio e del boro hanno un potere penetrante molto superiore a quello di tutte le radiazioni γ conosciute delle sostanze radioattive. Secondo le valutazioni, veramente un po' ipotetiche di I. Curie, la radiazione del berillio corrisponderebbe a una lunghezza d'onde di 0,7 UX, e cioè a una energia di circa 20 milioni di volt-elettrone.

Secondo recenti esperienze di I. Curie e Joliot, sembra che le radiazioni del berillio abbiano la proprietà di liberare dei protoni, di grande velocità, da tutte le sostanze contenenti idrogeno: fenomeno che, secondo questi autori sarebbe da interpretare come una specie di effetto Compton esercitato protoni anziché sugli elettroni liberi.

* * *

Dopo la redazione di questo manoscritto, sono state fatte importanti esperienze di fisica nucleare. Limitandomi ai lavori più caratteristici: citerò qui i seguenti:

Proseguendo le esperienze di Bothe, di I. Curie e di Joliot, Chadwick ha potuto dimostrare che le radiazioni del berillio possono mettere in movimento anche dei nuclei più pesanti dei protoni; in seguito a queste esperienze egli ha fatto l'ipotesi che le radiazioni del berillio non siano delle radiazioni γ , ma proiezioni di neutroni aventi massa uguale a quella del protone.

Un'altra esperienza interessante è quella di Cockcroft e di Walton, che hanno provocato la disintegrazione artificiale del litio, per urto con raggi canale di idrogeno di grande energia.

Infine, in un dominio parallelo a quello del quale ci siamo qui occupati, Steinke e Schindler hanno dimostrato che le radiazioni cosmiche possono staccare dal piombo delle particelle con un alto potere ionizzante, animate di una energia dell'ordine di cento milioni di volt.

N° 73.

In this paper Fermi discusses the influence of the ammonia molecule's rotation on the doubling of its levels. This doubling originates—according to Dennison and Hardy—in the oscillation by which the nitrogen atom crosses the plane determined by the three hydrogens. One observation, made by Barker a few years earlier, remained unexplained: the doubling of the levels mentioned above decreases with the increase in the rotational quantum number. Fermi, in this very simple paper, shows that the effect observed by Barker is due to the centrifugal force which acts in the sense of reducing the probability of the nitrogen crossing the plane of the hydrogen atoms, as the rotational velocity increases.

This paper, together with the articles N° 61, 62 and 64 on the accidental degeneracy of the carbon dioxide molecule's frequencies of oscillation and on the Raman effect in crystals, constitutes a series of investigations from the period 1931-33 in which Fermi attempted to explain various molecular phenomena. His interest in these studies is reflected in the book "Molecole e Cristalli", published by Casa Zanichelli in 1934.

Fermi's interest in this type of problem was always dictated by his desire to give a quantitative explanation to an experimental observation. The problems to which these researches refer were at that time at the center of the Institute's experimental activity. Papers N° 61, 62 and 64 refer especially to Rasetti's work.

The paper on the ammonia molecule is connected, instead, even if in an indirect way, to experiments conducted in Rome during that same period by G. Placzek and me, and to theoretical research by G. Placzek and E. Teller completed during that same period in Rome.

The interest in the study of complex molecules with the help of the Raman effect was stimulated by Placzek's presence at the Institute. He was attracted to Rome by the work of Fermi and Rasetti in this field and contributed a profound critical analysis of these phenomena.

It was in Rome at this time that Placzek began writing his article, which he completed shortly afterwards in Copenhagen, on "Rayleigh-Streuung und Raman-Effekt". The paper appeared in the "Handbuch der Radiologie" (Band VI-2) in 1934.

During the winter of 1931-32, Placzek and I had carried on experimental studies of the rotational spectrum of ammonia in the Raman effect, ⁽¹⁾ and verified the selection rules for a "symmetrical-top rotator" which had been established for the general case by Placzek and Teller. ⁽²⁾ Although Fermi's work at this time has no direct connection with these investigations, it is nevertheless an essential part of the overall picture of the activity at the Institute during this period.

E. AMALDI.

73.

SULLE BANDE DI OSCILLAZIONE
E ROTAZIONE DELL'AMMONIACA ^(*)

«Rend. Lincei», 16, 179-185 (1932); «Nuovo Cimento», 9, 277-283 (1932).

La molecola di ammoniaca, NH_3 , ha, come è noto, una configurazione a piramide triangolare regolare, di cui il vertice principale è occupato dall'atomo di azoto, mentre i tre vertici del triangolo base sono occupati dai tre atomi di idrogeno. Conformemente a questa struttura l'ammoniaca ha

(1) E. AMALDI and G. PLACZEK, *Ramaneffekt des gasförmigen Ammoniaks*, «Naturwissenschaften», 20, 521, (1932); «ZS. f. Phys.», 81, 259, (1932).

(2) G. PLACZEK and E. TELLER, «ZS. f. Phys.», 81, 209 (1932).

(*) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1932. [Fermi era stato eletto Socio Corrispondente dell'Accademia dei Lincei il 27 luglio 1932 (Socio Nazionale il 6 maggio 1935) Questa nota e le posteriori sono quindi presentate da lui. N.d.R.].

quattro frequenze fondamentali, di cui due sono doppiamente degeneri, mentre le altre due sono semplici. Queste due ultime corrispondono a forme di vibrazione in cui la molecola conserva sempre la simmetria di piramide regolare, mentre si hanno variazioni dell'altezza e del lato di base della piramide. Le due frequenze semplici hanno approssimativamente i valori di 950 e 3330 cm^{-1} ; e la prima di queste, di cui particolarmente ci interesseremo in questo lavoro, corrisponde a un movimento per cui, con approssimazione sufficiente, può ritenersi che vari solo l'altezza della piramide, mentre le dimensioni del triangolo di base restano invariate. Come coordinata per descrivere questa oscillazione potremo dunque prendere la distanza x dell'atomo di azoto dal triangolo dei tre idrogeni; ora è evidente che l'atomo di azoto ha due posizioni di equilibrio rispetto al triangolo degli idrogeni, situate simmetricamente rispetto al piano di questo; in conseguenza l'energia potenziale, $U(x)$ considerata come funzione di x , sarà una funzione pari

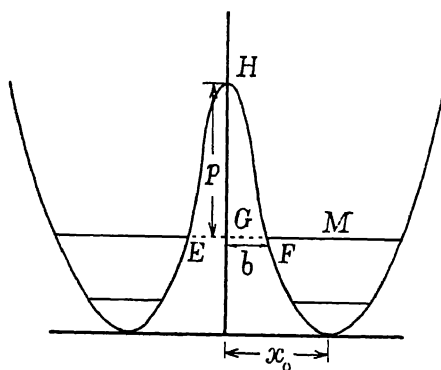


Fig. 1.

di x con due minimi corrispondenti alle due posizioni di equilibrio, per $x = \pm x_0$ (fig. 1). Ciò ha per conseguenza ⁽³⁾ che i livelli di oscillazione della molecola vengono ad essere doppi; lo sdoppiamento è dovuto alla possibilità che ha l'atomo di azoto di attraversare il piano occupato dagli idrogeni passando dall'intorno di una delle due posizioni di equilibrio all'intorno dell'altra. Per questo l'atomo deve oltrepassare una barriera di potenziale il cui culmine si trova in corrispondenza di $x = 0$; la separazione di due livelli è poi data, come è noto, dalla frequenza con cui avviene il passaggio dell'atomo attraverso alla barriera di potenziale. Essa andrà perciò aumentando nei successivi livelli di oscillazione, poiché la loro energia andrà sempre più approssimandosi alla sommità della barriera di potenziale.

In conseguenza di questa struttura dei livelli di oscillazione, tutte le righe di oscillazione e di rotazione vengono ad essere doppie; come si osserva effettivamente per esempio nella banda situata a circa 950 cm^{-1} , in cui le righe di rotazione presentano uno sdoppiamento di circa 30 cm^{-1} .

Lo scopo di questo lavoro è di studiare quale effetto sia esercitato dalla rotazione della molecola sopra lo sdoppiamento; sperimentalmente si osserva

(3) D. M. DENNISON e J. D. HARDY, « Phys. Rev. », 39, p. 938 (1932).

infatti che esso non è costante nei diversi termini di rotazione, ma va decrescendo col crescere del numero quantico di rotazione riducendosi dal valore iniziale di circa 33 cm^{-1} fino al valore di circa 23 cm^{-1} corrispondente all'undicesimo livello di rotazione (4).

L'effetto della rotazione sopra lo sdoppiamento può qualitativamente interpretarsi osservando che, quando la molecola ruota, la forza centrifuga tende ad allontanare l'atomo di azoto del triangolo dei tre idrogeni; per modo che essa viene ad ostacolare il passaggio dell'atomo di azoto attraverso al triangolo dei tre idrogeni, agendo come una elevazione supplementare della barriera di potenziale che separa le due posizioni di equilibrio simmetriche. Ne risulta un abbassamento della probabilità di scambio tra le due posizioni di equilibrio, e quindi una diminuzione dello sdoppiamento, tanto maggiore quanto più rapida è la rotazione.

Questo modello schematico del fenomeno è dunque qualitativamente in accordo con quanto si osserva sperimentalmente. Ci proponiamo ora di far vedere che anche l'ordine di grandezza previsto dalla teoria per l'entità dell'effetto corrisponde bene a quanto si osserva.

Per determinare completamente la forma e le dimensioni della piramide triangolare che rappresenta la molecola di ammoniaca, occorrerebbe conoscerne i momenti principali di inerzia. Questi, per simmetria, si riducono a due soli: A e B, dove con B si è indicato il momento relativo all'asse di figura e con A il momento relativo a una retta passante per il centro di gravità e perpendicolare all'asse di simmetria. Di questi due momenti uno solo è noto dallo spettro di bande: da esso risulta $A = 2,80 \cdot 10^{-40}$. L'altro momento B può soltanto valutarsi con considerazioni indirette e, secondo Dennison, si deve prendere all'incirca $B = 4,76 \cdot 10^{-40}$. Nei calcoli seguenti, nei quali del resto ci interessano soltanto gli ordini di grandezza, ci appoggeremo sopra questi dati. Da essi risulta il lato del triangolo base della piramide

$$a = 1,69 \cdot 10^{-8}$$

e l'altezza della piramide

$$x_0 = 0,32 \cdot 10^{-8}.$$

Se supponiamo che la molecola si deformi, conservando la base invariata mentre varia l'altezza x , il momento di inerzia B non varierà; mentre il momento A sarà una funzione di x . Con considerazioni elementarissime si trova

$$(1) \quad A = 2,38 \cdot 10^{-40} + 4,10 \cdot 10^{-24} x^2 = A_0 + mx^2$$

dove $m = 4,10 \cdot 10^{-24}$ è la massa ridotta dall'azoto rispetto al triangolo dei tre idrogeni.

Siccome la molecola ha ellisse d'inerzia di rotazione, la sua energia di rotazione sarà data, come è noto, da

$$(2) \quad W_R = \frac{\hbar^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{J(J+1)}{A} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \Omega^2 \right\}$$

(4) E. F. BARKER, «Phys. Rev.», 33, p. 684 (1929); i risultati sperimentali di Barker sono stati riordinati da P. M. BADGER, «Phys. Rev.», 35, p. 1038 (1930).

dove J ed $\Omega \leq J$ sono numeri interi che rappresentano il momento totale della molecola e il momento di rotazione rispetto all'asse di figura, misurati in unità $\hbar/2\pi$.

Per valori fissati di J e Ω , l'energia di rotazione viene dunque ad essere, secondo (1) e (2), una funzione della x . Ora si trova facilmente che, in prima approssimazione, la forza che si esercita tra il piano dei tre idrogeni e l'atomo di azoto, mentre la molecola è in rotazione, può considerarsi derivata da una energia potenziale:

$$(3) \quad V(x) = U(x) + W_R(x) + \text{costante}$$

ottenuta aggiungendo all'energia potenziale $U(x)$ che si ha nella molecola ferma, l'energia (2) della rotazione; ciò equivale sostanzialmente a tener conto della forza centrifuga. Come massa vibrante dovremo poi prendere la massa ridotta m tra la massa dell'azoto e quella dei tre idrogeni.

Consideriamo dapprima l'oscillazione della molecola quando essa non ruota. Se come valor medio della frequenza di oscillazione prendiamo 950 cm^{-1} , il primo livello eccitato di oscillazione avrà una energia di $\frac{3}{2} 950 = 1425 \text{ cm}^{-1}$, pari a $2,8 \cdot 10^{-13}$ erg, superiore all'energia che avrebbe la molecola se i suoi nuclei fossero fermi nella posizione di equilibrio. D'altra parte l'energia, potenziale della forza di richiamo, per oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio x_0 , può mettersi nella forma

$$(4) \quad U = 2\pi^2 m\nu^2 (x - x_0)^2 = 65700 (x - x_0)^2.$$

Segue dunque che l'ampiezza M della vibrazione che si avrebbe secondo la teoria classica per il primo livello di oscillazione è

$$\sqrt{\frac{2,8 \cdot 10^{-13}}{65700}} = 0,206 \cdot 10^{-8}.$$

Secondo la teoria classica si potrebbero avere due vibrazioni perfettamente equivalenti attorno alle due posizioni di equilibrio simmetriche rispetto al piano dei tre idrogeni; secondo la meccanica ondulatoria esiste invece una probabilità finita per il passaggio tra queste due forme di oscillazione attraversando la barriera di potenziale EHF che le separa. La semilarghezza $GF = b$ della barriera di potenziale è data evidentemente dalla semi distanza x_0 delle due posizioni di equilibrio, diminuita della ampiezza dell'oscillazione classica. Essa è cioè nel caso nostro

$$(5) \quad b = 0,32 \cdot 10^{-8} - 0,206 \cdot 10^{-8} = 0,114 \cdot 10^{-8}.$$

Per valutare anche l'altezza $p = GH$ della barriera di potenziale, possiamo utilizzare il dato che la separazione dovuta alla possibilità dell'azoto di attraversare la barriera di potenziale, quando $J = 0$, è di circa 33 cm^{-1} ; ciò vuol dire che i passaggi dell'azoto da uno all'altro degli intorni delle due posizioni di equilibrio simmetriche avvengono con una frequenza di 33 cm^{-1} . Naturalmente, per un calcolo teorico di questa frequenza, sarebbe necessario conoscere esattamente la forma della barriera di potenziale; per

una semplice valutazione dell'ordine di grandezza, quale è quella che qui ci interessa, ci basterà invece supporre arbitrariamente che la barriera di potenziale abbia forma di parabola dato che essa certamente non si discosterà di molto da tale configurazione. Prenderemo dunque come forma della barriera la seguente:

$$(6) \quad g(x) = p - \frac{p}{b^2} x^2, \quad |x| \leq b.$$

Per il nostro calcolo grossolano, possiamo calcolare la frequenza $\delta\nu$ con cui avvengono i passaggi attraverso alla barriera di potenziale con la formula

$$(7) \quad \delta\nu = \nu e^{-\sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}} \int_{-b}^b \sqrt{g(x)} dx} \quad (\hbar = \text{costante di Planck});$$

né d'altra parte avrebbe molto scopo fare il calcolo con maggiore esattezza data l'incertezza sopra la forma effettiva della barriera di potenziale. Tenendo presente la (6) ed effettuando l'integrale si trova

$$(8) \quad \frac{\delta\nu}{\nu} = e^{-\frac{\pi^2 b}{h} \sqrt{2mp}}$$

ponendo in questa formula $\delta\nu = 33 \text{ cm}^{-1}$, $\nu = 950 \text{ cm}^{-1}$ e ponendo per b , m ed h i loro valori numerici si ricava l'altezza p della barriera di potenziale. Essa risulta

$$p = 4,6 \cdot 10^{-13} \text{ erg} = 2350 \text{ cm}^{-1}.$$

Per calcolare l'effetto della rotazione della molecola, sostituiamo in (2) l'espressione (1) del momento di inerzia A , e sviluppiamo rispetto alle potenze di x , arrendoci ai termini in x^2 . Troviamo allora

$$(9) \quad W_R = \frac{\hbar^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{J(J+1)}{A_0} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A_0} \right) \Omega^2 \right\} - \frac{\hbar^2 m [J(J+1) - \Omega^2]}{8\pi^2 A_0^2} x^2.$$

Sostituiamo questa espressione nella (3), e disponiamo della costante arbitraria in modo che nelle due posizioni di equilibrio U e V siano eguali tra di loro, in modo che, in prima approssimazione, non vari il livello energetico. Poniamo dunque:

$$(10) \quad V(x) = U(x) + \frac{\hbar^2 m [J(J+1) - \Omega^2]}{8\pi^2 A_0^2} (x_0^2 - x^2);$$

l'ultimo termine di questa formula rappresenta l'elevazione della barriera di potenziale dovuta all'effetto della rotazione. Per calcolare la separazione $\delta\nu_R$ dei termini dovuta all'attraversamento della barriera di potenziale, potremo applicare ancora una formula analoga alla (7) dove però sotto il radicale si dovrà porre la somma di $g(x)$ e dell'ultimo termine di (10). Troviamo cioè

$$(11) \quad \delta\nu_R = \nu e^{-\sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}} \int \sqrt{g(x) + \frac{\hbar^2 m [J(J+1) - \Omega^2]}{8\pi^2 A_0^2} (x_0^2 - x^2)} dx}$$

e sviluppando il radicale col trascurare i quadrati del termine aggiunto a $g(x)$ troviamo infine, tenendo presente la (7) e la (6)

$$(12) \quad \delta v_R = \delta v_e - \frac{hm^{3/2}}{4\pi\sqrt{2}A_0^2} \frac{b}{\sqrt{p}} \int_{-b}^b \frac{x_0^2 - x^2}{\sqrt{b^2 - x^2}} dx \cdot [J(J+1) - \Omega^2]$$

da cui, effettuando la quadratura.

$$(13) \quad \delta v_R = \delta v_e - \frac{hm^{3/2}}{4\sqrt{2}A_0^2} \frac{b}{\sqrt{p}} \left(x_0^2 - \frac{b^2}{2}\right) [J(J+1) - \Omega^2]$$

Possiamo infine, nella nostra approssimazione, sviluppare l'esponenziale scrivendo

$$(14) \quad \delta v_R = \delta v - \delta v \frac{hm^{3/2}}{4\sqrt{2}A_0^2} \frac{b}{\sqrt{p}} \left(x_0^2 - \frac{b^2}{2}\right) [J(J+1) - \Omega^2].$$

Ponendo per le varie grandezze i loro valori numerici ed esprimendo le frequenze in cm^{-1} , si trova

$$(15) \quad \delta v_R = 33 - 0,083 [J(J+1) - \Omega^2]$$

che ci esprime la separazione del termine con i numeri quantici di rotazione J ed Ω .

Per quanto si riferisce al confronto con l'esperienza, si osservi che, finché si prescinda dalla separazione qui discussa, dovuta alla possibilità di oltrepassare la barriera di potenziale, termini che differiscono soltanto per il valore di Ω vengono a dar luogo a righe coincidenti, poiché vale la regola di selezione $\Delta\Omega = 0$. Risulta invece da (15) che le righe corrispondenti a termini che differiscono soltanto per il valore di Ω sono un po' spostate le une rispetto alle altre. In pratica il potere risolutivo non è però sufficiente per osservare queste separazioni, e si osservano solamente gli addensamenti di queste righe che, come facilmente si vede, hanno luogo in corrispondenza di $\Omega = 0$. Ciò che in pratica si può vedere è dunque soltanto la separazione che si ottiene ponendo nella (15) $\Omega = 0$. Cioè

$$(16) \quad \delta v_J = 33 - 0,083 J(J+1).$$

La separazione calcolata con questa formula per i successivi termini di rotazione coincide molto bene con quella che si osserva sperimentalmente. Per esempio per $J = 11$, che è il massimo numero quantico per cui si hanno osservazioni, risulta dalla (16) $\delta v_{11} = 22$ mentre sperimentalmente si trova una separazione di 23 cm^{-1} .

Naturalmente fenomeni del tipo di quello qui studiato per il primo termine eccitato della frequenza 950, si hanno anche negli altri termini, ma essi sono meno bene studiati, parte per la loro piccolezza e parte per la debole intensità delle bande ad essi corrispondenti. In particolare anche il termine fondamentale deve presentare una separazione analoga. Anzi la determinazione che abbiamo fatta della altezza della barriera di potenziale che separa le due posizioni di equilibrio, permette di fare una valutazione dell'ordine di grandezza di questa separazione: esso risulta all'incirca di 1 cm^{-1} .

N° 74.

This is my recollection of the circumstances that led to the paper "L'effetto del campo magnetico terrestre sulla radiazione penetrante".

During one of my frequent visits to Rome, Enrico Fermi and I had a discussion concerning the influence of the earth's magnetic field on the intensity distribution of cosmic rays. I was very much interested in this effect whose study offered the possibility of determining the sign of the charge of primary cosmic ray particles. Sometime before, starting from a first integral of the equations of motion established by Störmer, I had predicted the existence of an east-west asymmetry in the distribution of the cosmic-ray intensity. Experiments performed at Florence had failed to reveal the expected asymmetry. I was aware of the fact that this negative result might be ascribed to atmospheric absorption, if the energy losses of cosmic-ray particles in air were much greater than those due to ionization alone. However, before reaching any definite conclusion, it was necessary to improve the theory of geomagnetic effects. In my previous work I had only investigated the question as to whether cosmic ray particles of a given momentum could reach a given point of the earth's surface in a given direction. In order to make qualitative predictions it was also necessary to evaluate the relative intensities of the radiation in the various allowed directions. When I presented this problem to Fermi, he pointed out that Liouville's theorem was applicable to the case in question, and provided a very simple solution showing, in fact, that the intensity was the same in all allowed directions.

On the basis of this result, we re-examined the data obtained in the Florence experiment, as well as the results of the experiments of Clay and others on the latitude effect, and came to the conclusion that an abnormally large atmospheric absorption provided indeed the most likely interpretation of all available data. This interpretation was later to be proved correct when it was found that primary cosmic rays are for the most part protons which lose most of their energy by nuclear collisions. Assuming the numerical value of the atmospheric losses indicated by our analysis, we then concluded that in the vicinity of the equator the east-west effect should have been clearly observable. On the strength of this prediction I decided to organize a cosmic-ray expedition to Africa, which was carried out shortly thereafter and provided valuable data on the east-west effect whose existence had been in the meantime announced by Johnson and by Alvarez and Compton.

B. ROSSI.

74.

AZIONE DEL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE SULLA RADIAZIONE PENETRANTE (*)

E. FERMI e B. ROSSI, « Rend. Lincei », 17, 346-350 (1933).

Risultati sperimentali acquisiti in questi ultimi anni hanno dimostrato che la radiazione penetrante consiste di corpuscoli carichi elettricamente. Ancora discussa è invece la questione se questi corpuscoli rappresentino il fenomeno primario oppure si generino essi stessi nell'alta atmosfera per effetto di una radiazione di altra natura; l'argomento principale che può indurre a sospettare una tale natura secondaria della radiazione corpuscolare consiste nel fatto che la radiazione penetrante ha valore presso che indi-

(*) Presentata nella seduta del 5 febbraio 1933.

pendente dalla latitudine, tanto che una leggera diminuzione dell'intensità del fenomeno a basse latitudini è stata messa in evidenza solo negli ultimi tempi con esperienze di notevole accuratezza.

Ci proponiamo di discutere in questa Nota l'effetto del campo magnetico terrestre alle varie latitudini e alle varie altezze, nell'ipotesi che la radiazione sia dovuta primariamente all'effetto di corpuscoli elettrici (elettroni o protoni) provenienti dagli spazi cosmici, e distribuiti a grande distanza dai corpi celesti isotropicamente e uniformemente; e di confrontare i risultati teorici con quelli sperimentali.

Il movimento di un corpuscolo elettrizzato nel campo magnetico terrestre è stato studiato da C. Stoermer in connessione coi problemi delle aurore boreali. La sua teoria, applicata ai problemi della radiazione penetrante, nell'ipotesi che i corpuscoli che arrivano sulla Terra siano elettroni ⁽¹⁾ porta ai risultati seguenti:

Quando la loro energia supera $61,5 \cdot 10^9$ volt-e essi possono giungere su qualsiasi punto della Terra e da qualsiasi direzione; se la loro energia è più piccola, in un punto della Terra di latitudine magnetica λ , essi possono giungere soltanto da quelle direzioni il cui angolo col piano del meridiano magnetico (positivo verso oriente) supera il valore ϑ definito da

$$(1) \quad \sin \vartheta = \frac{K^2}{R^2} \cos \lambda - \frac{2K}{R \cos \lambda}$$

$\left(K^2 = \frac{300M}{V} \right)$; $M =$ momento magnetico della terra $= 8,33 \cdot 10^{25}$; C. G. S.; $R =$ raggio della Terra $= 6,38 \cdot 10^8$ cm; $V =$ energia in volt-e ⁽²⁾.

Dal calcolo risulta che questa condizione è necessaria; ammetteremo che essa sia anche, in generale, sufficiente (come lo è certamente in alcuni casi particolari), ossia che gli elettroni possano effettivamente giungere da tutte le direzioni, il cui angolo col meridiano magnetico è maggiore di ϑ ⁽³⁾.

La dipendenza dell'angolo limite ϑ da V per diverse latitudini magnetiche è la seguente

$\lambda = 0^\circ$	$V = 10,3 \cdot 10^9$	$\vartheta = 90^\circ$
	12,7	25°
	15,4	0°
	25	— 43°
	39,1	— 69° 30'
	61,5	— 90°

(1) Risultati sostanzialmente eguali (salvo il segno, quando v'è luogo di considerarlo) si otterrebbero nell'ipotesi che i corpuscoli della radiazione penetrante fossero protoni; ciò almeno finché le energie considerate sono superiori a qualche miliardo di volt-e, poiché in questo caso, per effetto delle correzioni relativistiche, la differenza tra le masse di quiete del protone e dell'elettrone determina solo una lieve differenza nelle equazioni del loro movimento.

(2) B. ROSSI, «Nuovo Cim.», 8, 8 (1931).

(3) Da un calcolo pubblicato da LEMAITRE e VALLARTA, «Phys. Rev.», 43, 87 (1933), mentre la presente Nota era già in corso di stampa risulterebbe che in realtà questo non è sempre vero; che esistono cioè «direzioni proibite» il cui angolo col piano del meridiano magnetico è maggiore di ϑ . Questo però non modifica sostanzialmente i risultati della nostra analisi.

$\lambda = 15^\circ$	$V = 9,45 \cdot 10^9$	$\vartheta = 90^\circ$
	11,1	28°
	13,4	0°
	18,9	- 36° 30'
	25	- 60° 30'
	31	- 90°
$\lambda = 30^\circ$	$V = 6,6 \cdot 10^9$	$\vartheta = 90^\circ$
	7,5	30°
	8,6	0°
	10,3	- 30°
	12,5	- 60°
	13,6	- 90°
$\lambda = 45^\circ$	$V = 3,27 \cdot 10^9$	$\vartheta = 90^\circ$
	3,53	30°
	3,85	0°
	4,24	- 30°
	4,6	- 60°
	4,75	- 90°

D'altra parte si dimostra facilmente che se consideriamo uno sciame di elettroni (o protoni) aventi tutti la stessa energia, che si muovono in un campo magnetico qualsiasi, e seguiamo nel loro movimento quelli che all'istante iniziale si trovano in un dato elemento di volume e hanno velocità appartenenti a un dato elemento di angolo solido, il prodotto dell'elemento di volume nel quale essi sono contenuti, per l'elemento di angolo solido a cui appartengono le loro velocità resta costante durante il movimento dello sciame di corpuscoli. Da questa proprietà, analoga al teorema di Liouville, e dall'ipotesi che la distribuzione degli elettroni a distanza infinita dalla Terra sia uniforme ed isotropa segue immediatamente che l'intensità specifica della radiazione penetrante (numero di corpuscoli, per intervallo unitario di energia e per angolo solido unitario, che attraversano normalmente una superficie unitaria nell'unità di tempo) è per ogni punto (prescindendo dall'assorbimento atmosferico) la stessa in tutte le direzioni, da cui i corpuscoli possono effettivamente giungere.

Se non vi fosse l'atmosfera, l'intensità, sulla superficie della Terra di ciascuna componente monoenergetica della radiazione penetrante (di energia inferiore a $6,15 \cdot 10^{20}$ volt-e) dovrebbe, procedendo dal polo magnetico verso l'equatore, rimanere costante fino ad una determinata distanza dal polo (tanto più grande quanto maggiore è la sua energia); poi diminuire gradualmente (pel fatto che un cono di apertura via via crescente rimane « in ombra ») fino, eventualmente, ad annullarsi. L'intensità *totale* della radiazione penetrante, ammesso che lo spettro d'energia di questa radiazione si estenda con continuità da zero fino ad un massimo, dovrebbe quindi presentare una diminuzione continua dal polo verso l'equatore.

Questo risultato si modifica quando si tenga conto dell'assorbimento atmosferico.

In prima approssimazione (valida nel caso in cui lo spessore della atmosfera sia da considerarsi infinitamente piccolo rispetto al raggio di curvatura delle traiettorie) possiamo trattare separatamente l'azione del campo magnetico terrestre e dell'assorbimento atmosferico. La distribuzione di intensità della radiazione penetrante, quale si produce per l'azione combinata di questi due fattori, resta così determinata nel seguente modo: in un dato punto ed in una data direzione possono giungere soltanto quei corpuscoli, la cui energia è ad un tempo maggiore di quella definita dall'equazione (1) e maggiore di quella necessaria per attraversare, nella direzione data, lo strato di atmosfera sovrastante; e tali corpuscoli giungono colla medesima intensità con cui giungerebbero in assenza sia dell'atmosfera che del campo magnetico terrestre.

Si riconosce immediatamente quale dev'essere la dipendenza della distribuzione così definita dall'altezza sul livello del mare, dalla latitudine magnetica e, per un dato luogo di osservazione, dalla direzione di provenienza (4):

a) procedendo dal polo magnetico verso l'equatore, l'intensità totale della radiazione penetrante osservata ad una determinata altitudine deve rimanere costante fino a quella distanza dall'equatore, dove il campo magnetico terrestre comincia ad impedire l'arrivo di alcuni dei corpuscoli, che potrebbero attraversare lo strato di atmosfera sovrastante. A partire da questo punto, l'intensità deve diminuire gradatamente verso l'equatore;

b) ad una data latitudine magnetica, l'intensità della radiazione penetrante, misurata, *in una determinata direzione*, a partire dal limite della atmosfera verso il basso, deve mantenersi costante fino a quella distanza dal limite dell'atmosfera, dove cominciano a rimanere assorbiti i più lenti fra i corpuscoli ai quali il campo magnetico terrestre permette di raggiungere nella direzione data, il limite dell'atmosfera. Da questo punto deve cominciare una graduale diminuzione di intensità; e ad una distanza dal limite dell'atmosfera sufficientemente grande (tale cioè che possano raggiungerla soltanto corpuscoli così rapidi da non essere ostacolati dal campo magnetico terrestre) questa intensità deve coincidere con quella che si osserverebbe in assenza del campo magnetico.

Se, come generalmente avviene, si misura l'intensità *complessiva* in tutte le direzioni (e non l'intensità in una direzione data) la curva dell'intensità in funzione della distanza dal limite dell'atmosfera deve inizialmente presentare un decremento assai lento (anziché un tratto esattamente orizzontale) e raccordarsi attraverso ad un flesso con la curva normale di assorbimento (quella cioè che si osserverebbe in assenza del campo magnetico terrestre);

c) in tutti i punti nei quali l'intensità complessiva della radiazione penetrante è minore di quella che si osserverebbe in assenza del campo magnetico terrestre, il numero dei corpuscoli, che giungono da occidente del meridiano magnetico, deve essere minore del numero di quelli che giungono da oriente del meridiano stesso giacché, per quanto abbiamo veduto, le direzioni occidentali « entrano in ombra » prima di quelli orientali.

(4) Cfr. anche la recente Nota di E. REGENER, « Naturwiss. », 21, 43 (1933) (nota aggiunta alla correzione delle bozze).

In realtà, una dipendenza dell'intensità dalla latitudine magnetica, del tipo di quella descritta in *a*) è stata effettivamente osservata da Clay ⁽⁵⁾, da Clay e Berlage ⁽⁶⁾ e da Compton ⁽⁷⁾; e una curva di intensità in funzione dell'altezza, del tipo di quella descritta in *b*) è stata effettivamente osservata da Regener ⁽⁸⁾.

L'accordo dei risultati sperimentali colle previsioni teoriche è anche quantitativo se ammettiamo che le perdite di energia dei corpuscoli della radiazione penetrante nella materia siano di circa $13 \cdot 10^6$ volt-e per gr/cm^2 . Con questa ipotesi si spiega anche perché nessuna dissimetria del tipo di quella descritta in *c*) sia stata osservata a Firenze ⁽⁹⁾; alle nostre latitudini infatti ed in vicinanza al livello del mare l'atmosfera assorbe tutti i raggi sui quali si potrebbe far sentire l'effetto del campo magnetico terrestre.

Il valore, che siamo stati condotti ad attribuire alla perdita di energia dei corpuscoli della radiazione penetrante nella materia, è circa triplo di quello calcolato da Heisenberg ⁽¹⁰⁾ per elettroni di corrispondente energia. Data però l'incertezza delle valutazioni teoriche in questo campo, riteniamo di dover forse attribuire maggior peso all'accordo qualitativo che al disaccordo quantitativo e di essere quindi autorizzati a concludere che i risultati delle esperienze finora eseguite sono conformi, anche per quel che riguarda l'influenza del campo magnetico terrestre, all'ipotesi che la radiazione penetrante primaria sia una radiazione corpuscolare.

Per l'ulteriore controllo di questa ipotesi sono in programma le seguenti esperienze:

1° determinazione della dipendenza dell'intensità dall'altezza a diverse latitudini magnetiche. Il flesso dovrebbe presentarsi ad una quota tanto più bassa quanto più bassa è la latitudine magnetica;

2° misura della dipendenza dell'intensità dall'azimut eseguita ad una altezza sul livello del mare sufficientemente grande e ad una latitudine magnetica sufficientemente bassa perché sia sensibile l'azione del campo magnetico terrestre. Si dovrebbe trovare una dissimetria dell'intensità rispetto al piano del meridiano magnetico, dal cui senso si potrebbe dedurre il segno della carica dei corpuscoli della radiazione penetrante.

(5) J. CLAY, «Amsterd. Proc.», 33, 711 (1930).

(6) J. CLAY e H. P. BERLAGE, «Naturwiss.», 20, 687 (1932).

(7) A. H. COMPTON, «Phys. Rev.», 41, 111 (1932).

(8) E. REGENER, «Naturwiss.», 30, 69 (1932).

(9) B. ROSSI, loc. cit.

(10) W. HEISENBERG, «Ann. d. Phys.», 13, 430 (1932)

N° 75 b.

For the introduction to this paper see N° 57.

75 b.

SULLA TEORIA DELLE STRUTTURE IPERFINI (*)

E. FERMI ed E. SEGRÈ, «Mem. Accad. d'Italia», 4 (Fis.), 131-158 (1933).

RIASSUNTO. — In questo lavoro si studiano le strutture iperfini degli elementi: Li, Na, Cu, Ga, Rb, In, Cs, Ba, Au, Hg, Tl, Pb, Bi che sono ben conosciute sperimentalmente e relativamente accessibili alla teoria. Si discute in particolare fino a che punto le strutture iperfini osservate si possano interpretare teoricamente colla sola ipotesi di un momento magnetico nucleare. Si riconosce che, ove si tenga conto delle numerose perturbazioni anche tra configurazioni elettroniche diverse, l'ipotesi di un accoppiamento magnetico non è in alcun caso in contrasto coi risultati sperimentali, e che anzi essa basta a render conto, almeno nelle linee generali, di tutto il materiale osservato: pur non potendosi escludere che altre cause intervengano a portare delle piccole perturbazioni. Infine sono esaminate le conclusioni che si possono trarre dai dati sperimentali riguardo ai momenti magnetici nucleari.

§ 1. — INTRODUZIONE.

Le strutture iperfini (sif) delle righe spettrali, sono state già da tempo attribuite all'interazione tra il nucleo e il sistema degli elettroni [1]. L'ipotesi più spontanea per rappresentare questa interazione è di attribuire al nucleo un momento magnetico intrinseco associato al suo momento meccanico. Gli elettroni muovendosi intorno al nucleo determinano su questo, un campo magnetico rispetto al quale il nucleo può orientarsi in diversi modi acquistando diverse energie magnetiche. Ciò dà luogo ad uno spezzamento dei livelli energetici. In tal guisa si ottiene da ogni termine elettronico un multipletto di sif del tutto analogo ad un multipletto ordinario in perfetto accoppiamento di Russell-Saunders, purché tra i vettori che rappresentano i momenti della quantità di moto delle diverse parti dell'atomo si stabilisca la corrispondenza seguente:

Multipletto ordinario		Multipletto di sif
L	Corrisponde a	J
S	» »	I
J	» »	F

(*) Presentata nell'Adunanza del 10 marzo 1933.

Secondo le convenzioni ordinarie con I e con F indichiamo rispettivamente il momento meccanico intrinseco nucleare e il momento totale dell'atomo (risultante di J e di I).

In particolare per il multipletto di *sif* valgono la regola degli intervalli e le regole ordinarie per il calcolo degli effetti Zeeman come è stato dimostrato sperimentalmente per la prima volta da Goudsmit e Back [2]. Ciò permette di caratterizzare tutto un multipletto di *sif* con una sola costante A . Le posizioni dei singoli livelli di *sif* rispetto al centro di gravità del multipletto si ottengono dalla formula

$$(1) \quad A(J, I) = \frac{1}{2} A [F(F + 1) - J(J + 1) - I(I + 1)]$$

con $I + J \geq F \geq |I - J|$.

Se si ammette che la *sif* sia dovuta esclusivamente a un momento magnetico nucleare, la costante A prende, classicamente, il valore

$$(2) \quad A = \frac{\mu H}{IJ}$$

μ essendo il momento magnetico nucleare ed H il campo magnetico medio determinato dai moti elettronici nel nucleo. Quantisticamente possiamo usare ancora la stessa formula (2) purché il significato di μ e di H sia precisato come segue: μ è il valore della componente x del momento magnetico nucleare quando sia $I_x = I$ ciò che classicamente corrisponde ad essere il momento nucleare parallelo all'asse x ; H è similmente il valor medio della componente H_x del campo magnetico determinato dagli elettroni sul nucleo per lo stato in cui $M = J$.

Il campo H può esser calcolato qualora siano note le autofunzioni elettroniche. Si può risalire quindi per mezzo della (2), dai dati sperimentali su A ai valori del momento magnetico nucleare. La teoria potrà considerarsi soddisfacente se calcolando μ da diversi termini di atomi neutri o ionizzati contenenti lo stesso nucleo, si otterrà lo stesso risultato.

Vari Autori [3] hanno eseguito calcoli di tal genere per un elettrone in campo centrale in approssimazione non relativistica. Successivamente sono state apportate le dovute correzioni relativistiche [4] le quali specialmente per elementi pesanti producono un effetto cospicuo, infine Goudsmit ed altri [5] hanno discusso anche il caso di più elettroni. Il confronto quantitativo dei risultati di questi calcoli con l'esperienza, ha dato luogo a serie difficoltà [6] in quanto che calcolando il momento magnetico nucleare dalle *sif* di vari termini sembrava che risultassero valori di μ considerevolmente differenti tra di loro. Si era così venuta formando l'opinione che accanto ad un eventuale momento magnetico nucleare dovessero sussistere altre cause atte a produrre effetti dello stesso ordine di grandezza sulla struttura dei termini.

In questo lavoro ci siamo proposti di riprendere in esame integralmente la questione cercando di eliminare le varie cause di incertezza dovute ad approssimazioni insufficienti. Abbiamo così potuto constatare che le pretese discrepanze possono trovare una naturale giustificazione in perturbazioni

trascurate nei calcoli finora compiuti. Tali perturbazioni non sono di solito valutabili quantitativamente con esattezza; tuttavia esse hanno ordini di grandezza perfettamente confrontabili con quelli delle divergenze tra la teoria elementare e i dati sperimentali, e provengono generalmente da configurazioni elettroniche diverse da quella a cui appartiene il termine in questione. I loro effetti sono notevoli o perché i livelli perturbatori sono molto prossimi o perché essi hanno costanti di accoppiamento A assai grandi rispetto a quelle dei termini perturbati.

Nel § 2 studieremo i problemi di calcolo numerico delle autofunzioni individuali degli elettroni per ciò che interessa le *sif*. Per i termini s importa solo il valore di $\psi(0)$ e mostreremo che questo è dato con approssimazione sufficiente da una formula semi-empirica di Landé-Goudsmit perfezionata con alcune correzioni in buona parte relativistiche, in parte anche di altra natura, che verranno indicate in particolare. Con ciò si eliminano molte delle incertezze dovute a metodi numerici non sufficientemente esatti, che finora esistevano nella valutazione delle *sif* derivanti da elettroni s .

Per elettroni p e d l'accoppiamento col nucleo è determinato dal valor medio di $1/r^3$; per calcolare questa grandezza non è necessaria una conoscenza esatta dell'autofunzione poiché essa è deducibile dalle separazioni del multipletto ordinario con l'applicazione di fattori di correzione, per tener conto del fatto che la separazione del multipletto ordinario, a differenza di quella del multipletto di *sif*, è determinata da $\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$ e non da $1/r^3$.

Queste correzioni in qualche caso sono considerevoli (30 %) ma la loro valutazione numerica non presenta notevole incertezza poiché esse sono precipuamente determinate dalla parte interna dell'autofunzione in cui il metodo statistico dà una sufficiente approssimazione.

Nei §§ 3 e 4 discuteremo le possibili perturbazioni e mostreremo in alcuni esempi tipici i loro effetti, sia nel caso che i termini che si perturbano appartengano alla stessa configurazione che a configurazioni diverse. Infine diamo dei criteri per riconoscere quando è lecito ammettere che un termine sia poco perturbato per modo che la sua costante di *sif* possa essere utilizzata per dedurre un valore attendibile del momento magnetico nucleare.

Il § 5 è dedicato all'esame sommario delle *sif* di tutti quegli elementi su cui si hanno dati sperimentali attendibili e che sono ancora dal punto di vista teorico abbastanza semplici per esser trattati con sufficiente approssimazione.

§ 2. - METODI NUMERICI PER IL CALCOLO DELLE COSTANTI DI ACCOPIAMENTO DEI SINGOLI ELETTRONI.

a) *Caso di un solo elettrone s*. - La costante di accoppiamento di un solo elettrone s col nucleo in campo centrale è data in approssimazione non relativistica da:

$$(3) \quad a = \frac{16\pi}{3} \frac{1}{J} \mu\mu_0 \psi^2(0)$$

dove μ_0 è il magnetone di Bohr.

Essa del resto non può evidentemente applicarsi nel caso relativistico. Secondo la teoria di Dirac dell'elettrone infatti, l'ampiezza di probabilità per l'elettrone nell'origine tende all'infinito. Si trova in questo caso che $\psi^2(0)$ va sostituito in (3) coll'espressione

$$(4) \quad \frac{8\pi mc}{h} \int_0^{\infty} FG dr = \psi_{\text{eff}}^2(0)$$

in cui F e G sono le autofunzioni di Darwin [7] collegate alla 4ψ di Dirac dalle relazioni

$$(5) \quad \begin{cases} \psi_1 = i \cos \theta F(r) & \psi_1 = i \sin \theta e^{-i\varphi} F(r) \\ \psi_2 = i \sin \theta e^{i\varphi} F(r) & \psi_2 = -i \cos \theta F(r) \\ \psi_3 = G(r) & \psi_3 = 0 \\ \psi_4 = 0 & \psi_4 = G(r) \end{cases}$$

dove si deve prendere l'una o l'altra quaterna a seconda dell'orientazione dello spin.

Pel calcolo dell'integrale (4) non è sufficiente conoscere le autofunzioni nelle sole vicinanze dell'origine, perché anche le parti esterne delle autofunzioni hanno importanza decisiva pel tramite del fattore di normalizzazione. Ora ciò che conta maggiormente per la valutazione di detto fattore, è proprio l'ultima arcata dell'autofunzione, quella cioè in cui più particolarmente si fanno sentire le incertezze della valutazione numerica. Ne consegue una notevole imprecisione nei computi fatti applicando direttamente il metodo statistico.

Vari Autori [8] hanno usato una formula semiempirica:

$$(6) \quad \psi^2(0) = \frac{1}{\pi a^3} \frac{Z(1+z)^2}{n_{\text{eff}}^3}$$

(a = raggio di Bohr; z = grado di ionizzazione; n_{eff} = numero quantico efficace) perfezionata eventualmente con un fattore di correzione relativistica.

Ci siamo proposti di fare un'indagine sistematica sulla applicabilità della [6] che, oltre alla sua notevole semplicità, presenta altresì il vantaggio di essere indipendente dagli errori che possono derivare dal calcolo statistico della parte esterna dell'autofunzione in luogo della quale si usa n_{eff} ricavabile direttamente dai dati spettroscopici empirici.

Abbiamo potuto dimostrare che la formula (6) dà risultati corretti per elementi leggeri e per termini ben rappresentabili con una formula di Rydberg.

Più in generale, tenendo conto anche delle correzioni relativistiche $\psi^2(0)$ si può esprimere colla formula empirica

$$(7) \quad \psi_{\text{eff}}^2(0) = \frac{1}{\pi a^3 (1 - \beta^2 Z^2)^2} \frac{Z}{2R\hbar} \frac{dE}{dn}$$

in cui $\beta = 1/139$ (*) ed E è l'energia espressa in funzione del numero quantico n . La giustificazione di questa formula si trova nell'appendice I. La funzione $E(n)$ è definita naturalmente solo per valori interi dell'argomento; essa tuttavia può essere interpolata con una funzione derivabile usando per esempio della formula di Rydberg od altre analoghe. La correzione relativistica, rappresentata dal fattore $\frac{1}{(1 - \beta^2 Z^2)^2}$ ha carattere di interpolazione e il suo valore numerico è quasi eguale a quello dato da Racah e Breit [4]. Salvo questo fattore la (7) coincide colla (6) se i termini sono rappresentabili con una formula di Rydberg $E = -\frac{R\hbar}{(n-s)^2}$. Se la correzione di Rydberg s non è costante la (7) assume la forma

$$(8) \quad \psi_{\text{eff}}^2(0) = \frac{2,16 \cdot 10^{24}}{(1 - \beta^2 Z^2)^2} \frac{Z(1+z)^2}{n_{\text{eff}}^3} \left(1 - \frac{ds}{dn}\right).$$

Oltre al fattore relativistico vi è questa formula l'ulteriore fattore correttivo $\left(1 - \frac{ds}{dn}\right)$ che può in vari casi determinare correzioni del 10%. Introducendo il valore di $\psi_{\text{eff}}^2(0)$ dato dalla (8) nella (3) ed esprimendo la costante di *sif* in numeri d'onde si ottiene la seguente formula

$$(9) \quad a = 15,5 \frac{\mu}{\mu_0 I} \frac{1}{(1 - \beta^2 Z^2)^2} \frac{Z(1+z)^2}{n_{\text{eff}}^3} \left(1 - \frac{ds}{dn}\right)$$

che serve praticamente per i calcoli, nei quali, dove si hanno dati sufficienti, abbiamo posto ds/dn eguale alla differenza delle correzioni di Rydberg per il termine considerato e quello successivo.

b) *Caso di un elettrone p. o d.* - Per un elettrone *p* o *d* la costante di *sif* è data da (9)

$$(10) \quad a = \frac{2l(l+1)}{lj(j+1)} \mu \mu_0 \frac{1}{r^3}$$

e dipende quindi sostanzialmente da $\frac{1}{r^3}$. Per valutare questa grandezza conviene giovarsi dei dati sulla struttura grossa, la cui separazione totale è data da:

$$(11) \quad \delta = \frac{\mu_0^2}{hce} (2l+1) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

in cm^{-1} .

Conoscendo δ si ricava immediatamente il valor medio di $\frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$. Nell'integrale che determina questo valor medio preponderano i termini provenienti da regioni prossimi al nucleo (r piccolo) in cui V è computabile assai esattamente col metodo statistico. Al solito però le parti esterne dell'auto-funzione sono essenziali per la loro influenza sul fattore di normalizzazione, e quindi fanno pesare la loro imprecisione su tutto il calcolo. Eseguendo il rapporto tra $\frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$ e $\frac{1}{r^3}$ si può, invece, far sparire dai calcoli tale fattore di normalizzazione con evidente notevole vantaggio.

(*) La costante β è $2\pi e^2/hc$ il cui valore numerico è assai prossimo a $1/137$ (Nota d. Red.).

A tal uopo in una prima grossolana approssimazione si può porre, trascurando per la parte centrale dell'atomo l'azione di schermo degli elettroni,

$$(12) \quad V = \frac{Ze}{r},$$

risulta allora

$$(13) \quad \eta = -\frac{\frac{1}{r} \frac{dV}{dr}}{1/r^3} = Ze.$$

Questa approssimazione dà in qualche caso risultati buoni; in altri è necessario usare per V l'espressione statistica più esatta

$$(14) \quad V = \frac{e}{r} [(Z-1) \varphi(r/\mu) + 1]$$

da cui si ricava

$$(15) \quad -\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{e}{r^3} [(Z-1) (\varphi - x\varphi') + 1]$$

in cui x è eguale ad r diviso per l'unità di lunghezza propria del metodo statistico μ .

Il rapporto η è dato da

$$(16) \quad \eta = e \left[(Z-1) \frac{\int (\varphi - x\varphi') \frac{\psi^2}{r^3} d\tau}{\int \frac{\psi^2}{r^3} d\tau} + 1 \right].$$

La valutazione numerica degli integrali che compaiono nella (16) può farsi con notevole precisione col metodo statistico, poiché a causa del fattore $1/r^3$ i termini preponderanti negli integrali provengono dalle parti interne dell'atomo. Si ottiene così rispetto alla (13) una correzione che è in generale piccola per gli elettroni p , maggiore per quelli d , dato che le loro orbite sono meno penetranti.

Eseguito i calcoli si ha per esempio per un elettrone $3d$ del rame

$$(17) \quad \eta = 19,6 e = Z^* e$$

anziché $\eta = 29 e$ come risulterebbe dalla formula approssimata (13); la correzione è quindi in questo caso del 30% rispetto alla formula approssimata.

A questa correzione bisogna, secondo Breit [9], aggiungerne un'altra, sensibile specialmente per elettroni p di atomi pesanti, per tener conto che l'energia delle due orbite $p_{1/2}$ e $p_{3/2}$ è differente e quindi anche il loro fattore di normalizzazione non è lo stesso.

Da (10), (11), e (17) si ricava, per il calcolo pratico,

$$(10 bis) \quad A = \frac{2l(l+1)}{1j(j+1)(2l+1)} \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\delta}{Z^*}.$$

§ 3. - EFFETTO DELLE PERTURBAZIONI.

Se si usano i procedimenti di calcolo indicati nel paragrafo precedente, si trova in parecchi casi che i valori di μ calcolati da diversi termini, per lo stesso nucleo concordano discretamente tra di loro. Altri termini invece danno valori di μ in completo disaccordo coi precedenti.

Come abbiamo già accennato, discrepanze di questo genere, erano state rilevate varie volte tanto che avevano fatto mettere seriamente in dubbio l'ipotesi che le sif fossero, almeno nelle loro linee generali, spiegabili come effetto di un momento magnetico nucleare. Noi cercheremo di mostrare invece che le divergenze indicate sono attribuibili ad effetti di perturbazioni fra i termini elettronici.

Quando i termini che si perturbano sono energeticamente prossimi, l'effetto è assai appariscente e senz'altro individuabile; tuttavia anche quando i termini perturbatori sono lontani, la perturbazione percentuale può essere grande; ciò avviene in particolare quando il termine perturbato ha una costante di sif piccola rispetto a quella del termine perturbatore.

Si debbono considerare due tipi di perturbazioni: a) tra termini della stessa configurazione; b) tra termini di configurazioni diverse.

Quelle del primo tipo sono già state considerate da altri Autori [10] ed hanno luogo nei numerosi casi di accoppiamento intermedio fra quello di Russell-Saunders e quello (J, J). Non ci soffermiamo quindi su questo, genere di perturbazioni; e del resto nel caso del Tl II ne troveremo un esempio tipico.

Più interessanti si presentano le perturbazioni fra termini di configurazioni elettroniche differenti, che passiamo adesso a trattare.

L'autofunzione di un atomo con più elettroni si suole scrivere approssimativamente come prodotto antisimmetrizzato delle autofunzioni individuali dei singoli elettroni. In questo senso si suole parlare per esempio di una configurazione $6s^2 7p$ intendendosi con ciò che si hanno due elettroni $6s$ ed uno $7p$. Gli anelli chiusi vengono generalmente tralasciati nella scrittura. In realtà le vere autofunzioni sono combinazioni lineari di quelle di approssimazione zero. Sia ψ_i l'autofunzione imperturbata di un termine di una data configurazione elettronica e sia ψ_j l'autofunzione di un altro termine della stessa o di un'altra configurazione elettronica. Secondo la teoria delle perturbazioni l'autofunzione di prima approssimazione sarà

$$(18) \quad \Psi_i = \psi_i + \sum_j' \frac{V_{ij}}{E_i - E_j} \psi_j$$

dove E_i ed E_j sono le energie imperturbate e V_{ij} l'elemento della matrice di perturbazione che connette gli stati i ed j . Nel caso nostro come perturbazione è da considerarsi essenzialmente l'energia elettrostatica. Per gli elementi di matrice che la rappresentano valgono delle semplici regole di selezione:

a) sono eguali a zero tutti gli elementi di matrice che connettono stati con J differente;

b) sono eguali a zero elementi di matrice che connettono termini con parità diversa rispetto alla regola di Laporte (e cioè per i quali la somma algebrica dei numeri quantici azimutali per i singoli elettroni ha parità diversa).

Quando i due termini i e j hanno lo stesso J e la stessa parità, V_{ij} , è, almeno in generale, diverso da zero. Siccome esso rappresenta una energia elettrostatica, il suo ordine di grandezza è poi confrontabile con le separa-

zioni che si hanno tra termini di molteplicità differente della stessa configurazione, cioè circa 1 volt per termini profondi di atomi neutri.

Dal punto di vista della teoria delle sif le contaminazioni tra configurazioni diverse hanno importanza per il fatto che esistono configurazioni, anche energeticamente elevate, che sono fortemente accoppiate col nucleo; tali sono particolarmente quelle che contengono un elettrone relativamente profondo isolato in una orbita s . Se una autofunzione ψ_2 di questo tipo si mescola secondo la [18] con un'altra ψ_1 che abbia una piccola sif, essa può produrre una perturbazione percentuale assai rilevante della costante di sif, anche se $\frac{V_{12}}{E_1 - E_2}$ è piuttosto piccolo.

Supponiamo per esempio che la configurazione perturbatrice abbia una differenza di energia di 5 volt da quella perturbata, e appartenga quindi a una regione spettrale totalmente diversa. Se l'elemento di matrice V_{12} ha valore di 1 volt, l'autofunzione perturbata sarà, secondo la (18)

$$\Psi_1 = \psi_1 + 0,2 \psi_2$$

così che lo stato 1 viene a contenere una contaminazione di $(0,2)^2$ pari al 4% dello stato 2. Se ammettiamo, ciò che può verificarsi in parecchi casi, che la struttura della configurazione 2, contenente un elettrone s profondo, sia per esempio 50 volte maggiore di quella dello stato 1, una perturbazione del 4% potrà triplicare o cambiar di segno la costante di accoppiamento dello stato 1; anche prescindendo dalla azione di termini non diagonali dell'accoppiamento col nucleo, che possono in qualche caso determinare un effetto dell'ordine di grandezza o anche maggiore del precedente.

Esaminando il materiale empirico sulle sif si trovano numerosi esempi di perturbazioni del tipo illustrato; ad esse sono secondo noi da attribuirsi per la massima parte quelle discrepanze, a cui abbiamo accennato, che avevano fatto mettere in dubbio la correttezza delle basi stesse della teoria.

Un esempio assai appariscente dell'effetto di perturbazioni tra configurazioni diverse, si trova nello spettro del Pb II. L'isotopo 207 del Pb ha $I = 1/2$, ed i termini del suo spettro, secondo Kopfermann e Schüler e Jones, presentano le seguenti separazioni di sif:

Termine	$\Delta v, \text{cm}^{-1}$
$6s^2 \ 7s \quad {}^2S_{1/2}$	0,352
$6s^2 \ 7p \quad {}^2P_{1/2}$	0,077
$6s^2 \ 7p \quad {}^2P_{3/2}$	0,022
$6s^2 \ 6d \quad {}^2D_{5/2}$	0,713
$6s \ 6p^2 \quad {}^2D_{5/2}$	0,856

Dall'esame di questa tabella si rileva un valore abbastanza grande della separazione del termine $7^2S_{1/2}$ ciò che è naturale per la presenza in questo termine di un elettrone $7s$ non saturo. Più piccole, in accordo qualitativo con la teoria, sono le separazioni dei due termini 7^2P . Il termine

$6s^2 6d \ ^2D_{5/2}$ ha invece una separazione assai grande, che a prima vista sorprende, essendo i due elettroni $6s$ compensati tra di loro, e l'altro elettrone, $6d$, in una orbita molto esterna. La ragione del comportamento assai anomalo di questo termine è da ricercarsi nel fatto che esso è fortemente perturbato dall'altro termine $6s 6p^2 \ ^2D_{5/2}$ che trae la sua grossa separazione dalla presenza dell'elettrone $6s$ non saturo. I due termini distano di circa 0,6 volt, ed avendo lo stesso J e la stessa parità, a norma delle regole di selezione, possono perturbarci. Data la loro lieve differenza di energia si può anzi valutare che le autofunzioni di prima approssimazione sono combinazioni lineari delle due autofunzioni imperturbate ψ_1 e ψ_2 (corrispondenti alle configurazioni $6s^2 6d$ e $6s 6p^2$) i cui coefficienti sono, in valore assoluto, approssimativamente eguali; si ha cioè

$$(19) \quad \begin{cases} \Psi_1 = \alpha' \psi_1 + \beta' \psi_2 \\ \Psi_2 = \alpha'' \psi_1 + \beta'' \psi_2 \end{cases}$$

dove le α e le β hanno lo stesso ordine di grandezza. Se si ammette, come corrisponde al nostro caso, che l'accoppiamento dello stato ψ_1 col nucleo sia trascurabile, si riconosce facilmente che le α e β dei due termini sono rispettivamente date da β'^2 e β''^2 moltiplicate per la α che avrebbe il termine ψ_2 se esistesse allo stato puro. Deve notarsi tuttavia che la situazione è in realtà un po' più complicata, per l'esistenza, nella stessa configurazione $6s 6p^2$ del termine $\ ^4P_{5/2}$ la cui posizione non è conosciuta, ma che verosimilmente si trova non lontano dai due termini considerati, e può quindi anche esso perturbarli notevolmente.

Nello spettro del Tl neutro si trova invece un esempio tipico di una configurazione energeticamente lontana che, pur entrando in piccola misura nelle autofunzioni di prima approssimazione, altera profondamente le α . È stata rilevata più volte una notevole discrepanza tra la teoria elementare delle α e i risultati sperimentali per il doppietto fondamentale $6 \ ^2P_{1/2,3/2}$ del tallio. I due termini $\ ^2P_{1/2}$ e $\ ^2P_{3/2}$ che lo costituiscono, hanno separazioni iperfina di 0,707 e 0,008 cm rispettivamente. Secondo la teoria elementare la struttura del termine con $J = 3/2$ dovrebbe essere bensì più piccola di quella del termine con $J = 1/2$; il rapporto tuttavia, anche tenuto conto di tutte le possibili correzioni relativistiche, non dovrebbe eccedere 10. Quindi il termine $\ ^2P_{3/2}$, per essere d'accordo col $\ ^2P_{1/2}$ dovrebbe avere una separazione iperfina dell'ordine di grandezza di 0,070, in contrasto col valore sperimentale 8 o 9 volte più piccolo. Per ristabilire l'accordo occorre dimostrare l'esistenza di una perturbazione, capace di alterare di circa 0,060 la α del termine $\ ^2P_{3/2}$.

Esamineremo dunque se esiste qualche configurazione capace di produrre una perturbazione di questo genere. Essa dovrà avere una α grossa e quindi contenere un elettrone $6s$ non saturo (se si pensasse di intaccare le configurazioni $5s$ molto stabili, l'energia salirebbe a valori inammissibili), e inoltre dovrà essere dispari come la configurazione perturbata $6s^2 6p$. Si riconosce così che le due uniche configurazioni da considerare sono la $6s 6p 7s$ e la $6s 6p 6d$. Di queste due energeticamente più bassa

è la prima i cui termini possono essere localizzati verso il limite di ionizzazione dell'atomo o poco al di sopra e cioè circa 6 o 7 volt al di sopra del termine fondamentale; l'altra potrà essere ancora un paio di volt più elevata. Entrambe contengono termini con $J = 3/2$ i quali possono produrre perturbazioni. L'effetto maggiore però deriverà dalla configurazione $6s\ 6p\ 7s$ che ha un'azione preponderante sia perché energeticamente più vicina, sia perché gli elementi di matrice V_{ik} , dipendenti dagli integrali elettrostatici, sono per essa più grandi. Una valutazione precisa della perturbazione prodotta da questa configurazione non sembra possibile coi metodi numerici oggi conosciuti, i quali sono in grado di farne prevedere solo l'ordine di grandezza. Rimandando all'appendice II qualche considerazione più precisa su questo argomento, ci limitiamo qui ad osservare che nella configurazione $6s\ 6p\ 7s$ esistono termini la cui azione tende a impicciolire la *sif* del termine $^2P_{3/2}$ e che calcolando numericamente gli integrali di perturbazione risulta plausibile che quest'azione prevalga su quella degli altri termini in modo da produrre in definitiva una diminuzione delle *sif* di una novantina di millesimi di cm^{-1} che è appunto l'ordine di grandezza di quanto occorre a ristabilire l'accordo fra teoria ed esperienza.

Nella discussione delle *sif* elemento per elemento troveremo altri esempi di perturbazioni di tal genere a cui accenneremo via via.

Per il calcolo dei momenti magnetici nucleari è naturalmente essenziale che i termini su cui tale calcolo si basa, siano poco perturbati.

Il riconoscimento di questo fatto presenta spesso delle incertezze. Come regola generale i termini che hanno una perturbazione relativa più piccola, sono quelli che hanno di loro una grossa costante di *sif* e quindi particolarmente i termini provenienti da una configurazione con un elettrone s non saturo. In tutti gli esempi studiati non si è mai presentato il caso che due termini che sembravano a priori poco perturbati, abbiano dato valori del momento magnetico in discordanza considerevole.

Negli spettri in cui vari termini che si presentano a priori come attendibili danno, con discreta approssimazione, lo stesso valore del momento magnetico nucleare, questo raggiunge un considerevole grado di sicurezza. Con più riserve sono da prendere i risultati per quegli spettri in cui, per mancanza di dati sperimentali, bisogna fondare il calcolo su un solo termine come per esempio nei metalli alcalini in cui il solo termine poco perturbato conosciuto è quello fondamentale dell'atomo neutro e quindi non sono possibili controlli.

§ 4. - DISCUSSIONE DEI DATI SPERIMENTALI.

Passiamo ora in rivista vari elementi per esaminare le particolarità che presentano le loro *sif* e per dedurne il valore del momento magnetico nucleare che indicheremo dando il rapporto μ_0/μ tra il magnetone di Bohr e il momento magnetico nucleare.

Li $Z = 3$. - L'isotopo 7 ha $I = 3/2$. Esso è stato trattato esaurientemente da Breit [11], Güttinger e Pauli [12]. Secondo Breit $\mu_0/\mu = 575$.

Na $Z = 11$. - Esiste un solo isotopo di peso 23. Le sif consistono [13] in una separazione di $0,061 \text{ cm}^{-1}$ nel termine fondamentale $3^2S_{1/2}$. Il momento meccanico nucleare I non è conosciuto con sicurezza. Schüler dà come probabili i valori $5/2$ e $3/2$. Applicando la [9] si trova

$$\frac{2I}{2I+1} \frac{\mu_0}{\mu} = 660$$

da cui, se si prende

$$I = 3/2$$

risulta

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 880,$$

se invece si prende

$$I = 5/2$$

risulta

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 790.$$

Cu $Z = 29$. - Le sif di questo spettro provengono in parte da uno spostamento da isotopia e in parte da un momento magnetico nucleare. Ritschl [14] che ha studiato parecchi termini del Cu I ha trovato per entrambi gli isotopi 63, 65 $I = 3/2$. I termini del Cu I sono di due differenti sistemi: un sistema di doppietti normali $3d^{10}ms$, $3d^{10}mp$, $3d^{10}md$, ecc. e un sistema di termini in cui uno dei 10 elettroni $3d$ viene allontanato da questo anello e portato in altri stati quantici; i termini più profondi di questo tipo sono $3d^9 4s^2$. Altri termini profondi in cui è intaccato l'anello $3d$ appartengono alla configurazione a ($3d^9 4s 4p$).

I termini profondi $3d^{10} 4s^2 S_{1/2}$ e $3d^9 4s^2 D$ hanno costanti di sif abbastanza grandi e non sono verosimilmente molto perturbati. Da essi si può calcolare μ_0/μ colle (9) e (10 bis), ponendo $Z^* = 19,6$.

Si ottiene:

dal termine	$4^2S_{1/2}$	$A = 0,195 \text{ cm}^{-1}$	$\mu_0/\mu = 760$
	$3^2D_{3/2}$	$A = 0,060$	$\mu_0/\mu = 740$
	$3^2D_{5/2}$	$A = 0,022$	$\mu_0/\mu = 870.$

Non abbiamo considerato i termini $3d^{10} 4p^2P$ perché essi sono senza dubbio perturbati dalla configurazione a . I tre valori precedenti sono in discreto accordo fra di loro, accordo che sarebbe forse migliorato se si tenesse conto delle correzioni relativistiche per i termini D. Come valore probabile di μ_0/μ per i due isotopi del Cu riteniamo 780.

Ga $Z = 31$. - Isotopi 69 e 71; $I = 3/2$. Lo spettro del Ga I è stato studiato da Jackson [15]. Le misure non sono molto precise. Per i termini $5^2S_{1/2}$ e $4^2P_{1/2}$ egli trova separazioni di 0,09 e 0,10 rispettivamente. Jackson non trova differenza tra le strutture dei due isotopi. Dai suoi dati risulta $\mu_0/\mu =$ circa 800.

Campbell [16] ha studiato le sif del Ga II che sono considerevolmente più grosse di quelle del Ga I; tanto che egli osserva una differenza tra le sif

dei due isotopi sfuggita a Jackson. I dati di Campbell si riferiscono al termine 5^3S_1 . La costante di sif di questo termine, per l'isotopo 69 è $A = 0,259$ per l'isotopo 71 si ha invece $A = 0,331$. La valutazione di μ_0/μ da questi dati si fa con i metodi che saranno illustrati a proposito dello spettro analogo del Tl II. Si trova per l'isotopo 69, $\mu_0/\mu = 860$; per l'isotopo 71, $\mu_0/\mu = 670$. Questi risultati sono alquanto imprecisi per l'incertezza nell'attribuzione del numero quantico efficace dell'elettrone 4 s; tuttavia essi coincidono discretamente col risultato precedente.

Rb $Z = 37$. - Ha due isotopi con massa 85 e $I = 5/2$ e con massa 87 e $I = 3/2$ o $5/2$. I valori di I sono dedotti dal secondo spettro [17]. Anche per questo elemento il solo termine abbastanza attendibile per la determinazione del momento magnetico nucleare conosciuto è il termine fondamentale $5^2S_{1/2}$ del Rb I. La separazione di questo è diversa pei due isotopi. Secondo Kopfermann si ha $\Delta\nu = 0,106$ pel Rb⁸⁵ e $0,242$ pel Rb⁸⁷. Da questi dati si trova $\mu_0/\mu = 1350$ pel Rb⁸⁵ e $\frac{2I}{2I+1}\mu_0/\mu = 490$ per l'altro isotopo da cui risulta, pel Rb⁸⁷, $\mu_0/\mu = 590$ o 660 secondo che $I = 5/2$ o $3/2$.

Cd $Z = 48$. - Gli isotopi pari 110, 112, 114, 116, hanno $I = 0$; quelli dispari 111 e 113 hanno $I = 1/2$ e le sif eguali ciò che indica che il loro momento magnetico nucleare è eguale [18]. Questo tipo di spettro è analogo a quello del Hg I e del Tl II e ne parleremo diffusamente a proposito di quest'ultimo pel quale si hanno anche estesi dati sulle sif. Basti qui accennare che le separazioni osservate per termini:

	$\Delta\nu, \text{cm}^{-1}$
5s 6s 3S_1	— 0,395
5s 7s 3S_1	— 0,375
5s 8s 3S_1	— 0,365
5s 5p 3P_2	— 0,300
5s 5p 3P_1	— 0,223

sono tutte dovute per la maggior parte all'azione dell'elettrone 5 s non saturo; si noti che esse sono tutte invertite. Si può valutare che l'elettrone 5s deve avere una costante di accoppiamento individuale di circa $0,4 \text{ cm}^{-1}$ dal che si ricava $\mu_0/\mu = 3500$. Questo valore è tuttavia assai impreciso per l'incertezza nell'attribuzione di n_{eff} all'orbita 5s.

In $Z = 49$. - Isotopo 115; $I = 9/2$ secondo Jackson [19]. Sono note le sif dei termini di In I

6 $^2S_{1/2}$	$\Delta\nu = 0,28 \text{ cm}^{-1}$
5 $^2P_{1/2}$	0,38

dal primo si ricava $\mu_0/\mu = 370$, dal secondo, tenendo conto di alcune correzioni relativistiche, $\mu_0/\mu = 310$ circa. Come valore più probabile di μ/μ_0 riteniamo 350.

Cs $Z = 55$. - Isotopo 133. $I = 7/2$ secondo risultati di Kopfermann [20] dedotti dall'osservazione del Cs II. Nello spettro del Cs I è nota soltanto la sf del termine fondamentale

$$6^2S_{7/2} = 0,315 \text{ cm}^{-1}$$

per essa valgono le stesse considerazioni che per gli altri alcalini e si ha

$$\mu_0/\mu = 700.$$

Ba $Z = 56$. - Isotopi 136, 138 $I = 0$. Isotopo 137 $I = 5/2$. È conosciuta la sf del termine fondamentale del Ba II [21]. Dalle righe di risonanza risulta per il termine $6^2S_{5/2}$ la separazione di 0,272. Da questa si calcola $\mu_0/\mu = 1750$.

Le strutture dei termini $6^2P_{1/2,3/2}$, misurate con poca precisione perché non completamente risolte danno risultati compatibili col valore precedente.

Au $Z = 79$. - Isotopo 197 $I = 3/2$ (?) [22]. Dalle righe di risonanza si trova come separazione del termine fondamentale

$$6^2S_{3/2} = 0,221 \text{ e } 0,224.$$

Se ne deduce

$$\frac{2I}{2I+1} \frac{\mu_0}{\mu} = 760$$

e se

$$I = 3/2 \quad \mu_0/\mu = 1010.$$

Hg $Z = 80$. - Gli isotopi pari 198, 200, 202, 204, hanno $I = 0$; l'isotopo 199 ha $I = 1/2$, quello 201 $I = 3/2$ [23]. Le sf di quest'ultimo sono invertite indicando che per esso μ_0/μ è negativo. Per lo spettro Hg I come per quello del Cd, valgono le considerazioni che faremo a proposito del Tl II. Per Hg I isotopo 199 sono osservate le strutture dei termini:

6s	7s	3S_1	$\Delta\nu = 1,070 \text{ cm}^{-1}$
6s	8s	3S_1	1,045
6s	9s	3S_1	1,030
6s	6p	1P_1	-0,181
6s	6p	3P_1	0,727
6s	6p	3P_2	0,758
6s	6d	1D_2	0,860
6s	7d	1D_2	0,496
6s	6d	3D_2	-0,470.

Tutte queste strutture si interpretano come dovute essenzialmente all'azione del solo elettrone 6s per il quale risulterebbe una costante di accoppiamento col nucleo di circa $1,15 \text{ cm}^{-1}$. Di qui si ricaverebbe come valore probabile di μ_0/μ per Hg¹⁹⁹, 4000, valore alquanto impreciso per

le ragioni già addotte a proposito del Cd. Per l'isotopo 201 risulterebbe analogamente $\mu_0/\mu = -3600$.

Tl Z = 81. - Gli isotopi 203, 205 hanno $I = 1/2$ e quasi esattamente le stesse sif a meno di uno spostamento di isotopia. Sono conosciuti gli spettri Tl I, Tl II, Tl III [24].

Cominciando da quest'ultimo che ha la struttura dello spettro di un metallo alcalino, ossia un anello 5d completo e un elettrone di valenza, abbiamo calcolato μ_0/μ dai vari termini ottenendo i valori riportati nella seguente tabella:

Termine	$\Delta\nu \text{ cm}^{-1}$	μ_0/μ
7 s $^2S_{1/2}$	1,37	1310
8 s $^2S_{1/2}$	0,606	1210
6 p $^2P_{1/2}$	1,21	1060
7 p $^2P_{1/2}$	0,375	1310

Per i termini P è stata usata la formula (10 bis) corretta ancora per tener conto di un effetto relativistico secondo Racah. Il dato che si ricaverrebbe dal termine 7 $^2P_{3/2}$ è discordante coi precedenti, ciò che deve attribuirsi alla perturbazione su di esso esercitata dal termine 5d⁹ 6s 6p $^2P_{3/2}$ che gli è energeticamente prossimo e che ha una grossa costante di sif. Similmente non abbiamo tenuto conto dei dati sui termini F manifestamente perturbati poiché anche le loro strutture grosse sono invertite.

Pel Tl II si hanno configurazioni 6s ms, 6s mp, 6s md, ecc., le cui separazioni provengono per la massima parte dall'elettrone 6s. Ciò è confermato dal paragone dei dati sperimentali con la teoria, svolta da Goudsmit e Bacher [25], delle sif di configurazioni contenenti un solo elettrone s non saturo accoppiato con I.

In questo caso vale la formula

$$(20) \quad A = a(s) \frac{[3/4 + S(S+1) - S'(S'+1)][S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)]}{4S(S+1)J(J+1)}$$

che permette di calcolare la sif di qualsiasi termine purché in accoppiamento di Russell-Saunders, per mezzo di un solo parametro, $a(s)$ che rappresenta la costante di accoppiamento che avrebbe l'elettrone s se esistesse isolato; in questa formula S' è lo spin risultante di tutti gli elettroni meno quello che dà la sif e quindi $S' = S \pm 1/2$. Le altre lettere hanno il solito significato.

Nello spettro del Tl II si trova che le sif di numerosi termini stanno fra loro approssimativamente nei rapporti indicati dalla (20). Fanno eccezione invece i termini con $L = J$. Per questi si hanno, in ogni configurazione, un termine di singoletti ed uno di tripletti collo stesso J e che quindi si perturbano tra di loro, dando luogo ad un accoppiamento intermedio tra quello di Russell-Saunders e quello (J, J). Nell'accoppiamento di Russell-Saunders il termine di singoletti dovrebbe sempre avere secondo la (20),

una separazione di sif nulla; quella che effettivamente si osserva proviene sostanzialmente dalla perturbazione. Vale tuttavia anche in questo caso la seguente regola: la somma algebrica delle separazioni dei due termini che si perturbano è eguale a quella che risulterebbe dalla (20) per il solo termine di tripletta. Tale regola risulta effettivamente discretamente verificata dall'esperienza.

I termini con L diverso da J, danno i valori di $a(s)$ riportati nella tabella seguente:

Termine	A	$a(s)$
6s 7s 3S_1	3,32	6,64
6s 9s 3S_1	3,02	6,04
6s 6p 3P_2	1,29	5,16
6s 7p 3P_2	1,39	5,56
6s 6d 3D_1	— 1,41	5,64
6s 7d 3D_1	— 1,47	5,88
6s 8d 3D_1	— 1,50	6,00
6s 6d 3D_3	0,95	5,70
6s 7d 3D_3	0,97	5,82
6s 8d 3D_3	0,98	5,88
6s 5f 3F_2	— 0,99	5,94
6s 6f 3F_2	— 1,03	6,18
6s 5f 3F_4	0,74	5,92
6s 6f 3F_4	0,74	5,92

Come si vede questa tabella $a(s)$ pei termini non perturbati è quasi costante il che conferma che le sif provengono per la maggior parte dall'elettrone 6s. Si vede poi che la costante di accoppiamento aumenta via via che l'elettrone più esterno passa in orbite meno legate. Ciò si spiega col fatto che, allontanandosi l'elettrone luminoso dal nucleo, ne diminuisce l'azione di schermo sull'orbita 6s e questa per conseguenza si raccoglie intorno al nucleo, in modo che ne aumenta il valore di $\psi(0)$. I termini 6s 7s 3S_1 e 6s 9s 3S_1 hanno invece comportamento opposto a quello descritto ora, ma ciò è dovuto al fatto che l'elettrone 7s contribuisce esso stesso alla sif, aumentandola di circa il 20%, mentre l'elettrone 9s dà un contributo del 4% solamente, come può valutarsi mediante la (9). In genere gli $a(s)$ della tabella sono tutti superiori alla vera costante di accoppiamento dell'elettrone 6s che si avrebbe se l'elettrone 6s si muovesse nel campo corrispondente alla configurazione $6s^2$. Tale costante non è direttamente desumibile dai dati precedenti, dai quali tuttavia si può dedurre, per estrapolazione, che essa abbia il valore di circa 5 cm^{-1} . Per mezzo della (9) si può da qui calcolare μ_0/μ conoscendo n_{eff} per l'orbita in questione. Questo deve ricavarsi per estrapolazione dato che il termine $6s^2$ non esiste nel sistema

dei tripletti, si ottiene così $n_{\text{eff}} = 1,56$. Risulta allora dalla (9) $\mu_0/\mu = 1400$ in buon accordo coi valori ricavati dal Tl III.

Nel Tl I sono stati analizzati alcuni termini tra cui il fondamento $6s^2 6p^2 {}^2P_{1/2}$ e i termini $6s^2 7p^2 {}^2P_{3/2}$ e $6s 7s {}^2S_{1/2}$. Con le solite formule si può calcolare μ_0/μ dal termine $7 {}^2S_{1/2}$ e si trova 1380; del termine $6 {}^2P_{1/2}$ senza tener conto della correzione di Breit, la quale sia come ordine di grandezza che come segno è sufficiente a ristabilire l'accordo, 950. Il termine $6 {}^2P_{3/2}$ è invece fortemente perturbato come è stato rilevato nel paragrafo precedente e non è utilizzabile per il calcolo di μ_0/μ .

Dal complesso di questi dati sufficientemente concordanti tra di loro, reputiamo come valore probabile per Tl

$$(21) \quad \mu_0/\mu = 1300.$$

Pb $Z = 82$. - Gli isotopi pari 204, 206, 208, hanno $I = 0$ l'isotopo 207 ha $I = 1/2$ e le cif sono state studiate negli spettri Pb I, Pb II, Pb III [26]. Di quest'ultimo è nota solo la cif del termine $6s 7s {}^2S_1$ che ha la separazione di $2,25 \text{ cm}^{-1}$, essa è dovuta, come nel termine analogo del Tl II, in gran parte all'elettrone $6s$. L'elettrone $7s$ vi contribuisce per circa $1/5$ della cif stessa. Da questo dato si deduce $\mu_0/\mu = 3500$ circa.

Del Pb II sono stati studiati vari termini delle configurazioni $6s^2 ms$, $6s^2 mp$, $6s^2 md$ e delle configurazioni $6s 6p^2$.

Essi sono in gran parte perturbati da termini di una configurazione $6s 6p 7s$ la quale ha cif assai grandi dovute all'elettrone $6s$ e che quindi fa sentire la sua influenza anche su termini relativamente lontani, analogamente a quanto accade nel Tl I. Un calcolo esatto di tali effetti è praticamente impossibile per modo che le cif di questi termini non si prestano per una valutazione del momento magnetico nucleare.

Similmente inadatto per calcoli quantitativi è lo spettro del Pb I. In conclusione riteniamo 3500 come vale probabile di μ_0/μ pur essendo esso alquanto incerto.

Bi $Z = 83$. - Isotopo 209 $I = 9/2$. Di questo elemento sono note le strutture degli spettri Bi I, Bi II, Bi III e Bi V [27]. Quest'ultimo ha struttura analoga a quella degli alcalini ed è nota la separazione di cif del termine fondamentale $6 {}^2S_{1/2}$ che ha $\Delta\nu = 13,2 \text{ cm}^{-1}$. Prendendo secondo McLennan $n_{\text{eff}} = 2,35$ si trova da questo dato $\mu_0/\mu = 510$. Benché le cif del Bi siano tra le meglio conosciute, esse non si prestano tuttavia ad una determinazione esatta del momento magnetico nucleare perché le configurazioni elettroniche sono intrecciate tra di loro negli spettri del Bi I e Bi II. Anche lo spettro del Bi III non è adatto a considerazioni quantitative perché la configurazione $6s^2 7s$ è certamente perturbata dall'altra $6s 6p^2$ che le è energeticamente prossima e nemmeno molto attendibili sono i dati che si ricavano sull'accoppiamento dell'elettrone $6s$ dalla configurazione $6s 6p^2$ mancando conoscenze sicure sopra l'accoppiamento intermedio di questa configurazione tra gli schemi di Russel-Saunders e (J, J). Tuttavia anche le costanti di accoppiamento degli elettroni $6s$ e $7s$ sembrano confermare il valore dato testè di μ_0/μ .

Nella Tabella segue raccogliamo i dati sul valore del rapporto μ_o/μ per vari nuclei. Dove non è conosciuto con sicurezza il valore di I abbiamo indicato anche il valore di $\frac{2I}{2I+1} \frac{\mu_o}{\mu}$ che si ricava indipendentemente dalla conoscenza di I. Nella colonna intestata « Peso » è indicato il numero di termini che danno, in sufficiente concordanza tra di loro, il valore di μ_o/μ .

Elemento	Z	M	I	μ_o/μ	Peso	Osservazioni
Li	3	7	3/2	575	—	Secondo Breit [28]
Na	11	23	3/2?	880?	1	$\frac{2I}{2I+1} \frac{\mu_o}{\mu} = 660$
Cu	29	63, 65	3/2	780	3	
Ga	31	69	3/2	860	1	
Ga	31	71	3/2	670	1	
Rb	37	85	5/2	1350	1	
Rb	37	87	5/2?	590?	1	$\frac{2I}{2I+1} \frac{\mu_o}{\mu} = 490$
Cd	48	111, 113	1/2	— 3500	5	
In	49	115	9/2	350	2	
Cs	55	133	7/2	700	1	
Ba	56	137	5/2	1750	1	
Au	79	197	3/2?	1010	1	$\frac{2I}{2I+1} \frac{\mu_o}{\mu} = 760$
Hg	80	199	1/2	4000	7	
Hg	80	201	3/2	— 3600	7	
Tl	81	203, 205	1/2	1300	20	
Pb	82	207	1/2	3500	1	
Bi	83	209	9/2	510	1	

Si potrebbe esser tentati di trarre dalla tabella precedente qualche deduzione circa la struttura dei nuclei. Non ci sembra tuttavia che la scarsa precisione dei dati e le numerose lacune possano permettere di arrivare ad alcun risultato conclusivo in questo senso. Una osservazione ovvia è che nella tabella tutti i nuclei di numero atomico pari e peso atomico dispari i quali, secondo la teoria di Heisenberg, contengono un numero pari di protoni e dispari di neutroni hanno un momento magnetico nucleare nettamente più piccolo degli altri con un numero dispari di protoni e pari di neutroni. Nemmeno questa però sembra una regola assoluta perché ad essa quasi certo fa eccezione il K^{39} , non incluso nella tabella; per questo elemento dalle inten-

sità alternate negli spettri di bande [29], risulterebbe $I \neq 0$, mentre le cifre che si può supporre debbano esistere in esso, non sono mai state risolte.

APPENDICE I.

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA (7).

La determinazione di $\psi_{\text{eff}}(0)$ si riduce sostanzialmente al calcolo di

$$(22) \quad \int_0^{\infty} FG \, dr.$$

Integrando le equazioni differenziali di F e G si trova che in prossimità dell'origine F e G si comportano rispettivamente, a meno di un fattore di normalizzazione, come $r^{-\beta}$ e $\frac{Z\alpha}{2-\beta} r^{-\beta}$ dove

$$\beta = 1 - \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2} \quad \text{e} \quad \alpha = 2\pi e^2 / \hbar c.$$

Raccordandosi nell'origine ai valori sopra indicati si ottengono autofunzioni non normalizzate che chiameremo Φ e Γ . F e G sono legati a Φ e Γ dalle relazioni

$$(23) \quad F = \rho\Phi \quad G = \rho\Gamma$$

in cui ρ è scelto in modo che

$$(24) \quad \rho^2 \int_0^{\infty} (\Phi^2 + \Gamma^2) \, d\tau = 1.$$

Per calcolare l'integrale (22) occorre quindi conoscere il fattore di normalizzazione ρ . All'uopo osserviamo che a grande distanza dal nucleo G si identifica con l'autofunzione di Schrödinger poiché le correzioni relativistiche diventano trascurabili. Posto $u = \psi r$ in cui ψ è l'autofunzione di Schrödinger si ha per u l'equazione differenziale

$$(25) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E - eV) u = 0$$

che può risolversi col metodo di Wentzel-Brillouin ponendo

$$(26) \quad u = \hbar R \sin \theta$$

in cui \hbar è un fattore di normalizzazione che viene determinato in modo che la u calcolata col metodo di Wentzel-Brillouin si raccordi colla Γ calcolata a partire dallo sviluppo in serie, e R e $d\theta/dr$ sono funzioni di r che obbediscono alla condizione

$$(27) \quad R^2 \frac{d\theta}{dr} = 1.$$

Esse si calcolano col metodo di approssimazioni successive di Wentzel-Brillouin il quale non è convergente, ma solo semiconvergente; tuttavia limi-

tandosi ad un numero opportuno di approssimazioni del metodo (4 nel nostro caso) si riesce ad ottenere una precisazione nella definizione di R e $d\theta/dr$ sufficiente per questo calcolo.

Studiamo l'effetto sugli autovalori di (25) di una perturbazione del potenziale V consistente nell'aggiunta di un termine di perturbazione della forma $\lambda\delta(r-\xi)$ in cui δ è la solita funzione impropria che ha valori $\neq 0$ solo per valori nulli dell'argomento e ξ un valore della distanza dal nucleo abbastanza grande perché ivi siano già trascurabili gli effetti delle correzioni relativistiche.

L'energia di perturbazione ΔE può calcolarsi in due modi:

a) col solito metodo delle perturbazioni;

b) osservando che una discontinuità del potenziale produce un salto brusco $\Delta\theta$ nella fase della (26) e quindi sposta la posizione dei nodi di u che sono legati al numero quantico n .

Eguagliando il risultato delle due considerazioni si ottiene senza difficoltà:

$$(28) \quad \Delta E = 4\pi\lambda\rho^2 u^2(\xi) = -\frac{\Delta\theta}{\pi} \frac{dE}{dn}.$$

Perché questa formula abbia un senso occorre naturalmente che E sia una funzione regolare di n in modo che possa definirsi ragionevolmente dE/dn .

Dalla (28) si deduce il valore di ρ non appena sia noto $\Delta\theta$ che passiamo appunto a calcolare. Dalla (25) si ha, indicando con Δu e $\Delta u'$ il salto nella u e nella sua derivata prima indotti dalla perturbazione

$$(29) \quad \Delta u = 0$$

$$\Delta u' = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \lambda u(\xi)$$

e quindi tenendo presenti le [26] e [27]

$$(30) \quad \Delta\theta = -\frac{8\pi^2 m\lambda}{\hbar} \frac{\sin^2\theta}{\frac{d\theta}{dr}}$$

con questo valore del $\Delta\theta$ la [28] dà

$$(31) \quad \rho^2 = \frac{2m}{\hbar^2 k^2} \frac{dE}{dn}.$$

Il coefficiente k che compare in questa formula, è stato ottenuto da estese tabelle numeriche delle autofunzioni ∞s che nella regione interna dell'atomo coincidono sensibilmente con quelle ottiche. Esse danno direttamente il valore del coefficiente k calcolato raccordando per $x=0,3$ (x è la distanza dal nucleo misurata colla unità μ del metodo statistico) le autofunzioni ottenute con uno sviluppo in serie relativistico con quelle calcolate col metodo di Wentzel-Brillouin. Tale calcolo è stato eseguito per 15 atomi convenientemente distribuiti nel sistema periodico [30].

Conosciuto ρ l'integrale (20) può calcolarsi servendosi degli sviluppi in serie precedentemente citati per Φ e Γ .

Abbiamo eseguito questo calcolo per tre valori di Z ottenendo fattori di correzione

$$\begin{aligned} 3,30 & \text{ per } Z = 92 \\ 1,93 & \text{ » } Z = 74 \\ 1,18 & \text{ » } Z = 42 \end{aligned}$$

rispetto alla formula

$$\psi^2(0) \frac{1}{\pi a^3} \frac{Z}{2 R \hbar} \frac{dE}{dn}$$

che nel caso di termini Rydberghiani si riduce alla formula (6) di Goudsmit-Landé.

I fattori di correzione precedenti si lasciano interpolare con esattezza pari a quella del calcolo numerico dalla formula empirica

$$(32) \quad \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{Z}{139}\right)^2\right]^2}$$

Questa correzione è di origine relativistica e sparirebbe eseguendo i calcoli non relativisticamente. Essa coincide sensibilmente con quella data da Racah e Breit [4]. La nostra formula empirica presenta su quella di questi ultimi Autori il vantaggio di una maggior rapidità di calcolo.

In definitiva si trova la formula (7) del testo (*).

$$\psi_{\text{eff}}^2(0) = \frac{1}{\pi a^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{Z^2}{139^2}\right)^2} \frac{Z}{2 R \hbar} \frac{dE}{dn}$$

Ringraziamo il dott. E. Majorana per varie discussioni relative ai calcoli di questa Appendice.

APPENDICE II

ANOMALIA DEL TERMINE $6^2P_{3/2}$ DEL Tl I.

Lo scopo dei seguenti calcoli è solo di far vedere che la perturbazione della separazione di *sif* del termine $6^2P_{3/2}$ del Tl I è sufficiente per spiegare le anomalie che si osservano. Essi non hanno una pretesa quantitativa, ma sono dedicati a una sola valutazione dell'ordine di grandezza della perturbazione. In questo ordine di idee ci limitiamo qui a considerare due sole configurazioni $6s^2 6p$ a cui appartiene il termine considerato e $6s 7s 6p$ che produce la perturbazione, benché naturalmente l'intervento delle altre configurazioni possa alterare ulteriormente in maniera considerevole i risultati.

Innanzitutto osserviamo che, elettrostaticamente, si perturbano tra loro solo stati collo stesso M . Potremo quindi fare il calcolo per un valore fisso opportunamente scelto di M e il risultato è lo stesso che si otterrebbe con qualsiasi altro valore di M .

(*) Il numero 139 deve essere sostituito con 137 (n. d. Red.).

Indicheremo le autofunzioni individuali dei singoli elettroni con

$$(33) \quad \begin{cases} sa & \sigma a & p_+ a & p_0 a & p_{-1} a \\ sb & \sigma b & p_+ b & p_0 b & p_{-1} b \end{cases}$$

in cui a e b sono le autofunzioni dello spin corrispondenti ad $m_s = \pm 1/2$ rispettivamente; s e σ autofunzioni delle coordinate per l'elettrone $6s$ e $7s$ e p_+, p_0, p_{-1} le autofunzioni delle coordinate per elettroni p con $m_l = +1, 0, -1$ rispettivamente.

Se si sceglie $M = 3/2$ la configurazione $6s^2 6p$ fornisce una sola autofunzione dal simbolo

$$(34) \quad \{sa sb p_+ a\} = \psi_0$$

in cui colle graffe s'intende che il prodotto va antisimmetrizzato. Essa è l'autofunzione imperturbata $6^2 P_{3/2}$.

La configurazione $6s 7s 6p$ dà 4 autofunzioni con $M = 3/2$ e precisamente:

$$(35) \quad \begin{cases} \{sb \sigma a p_+ a\} = \psi_1 \\ \{sa \sigma b p_+ a\} = \psi_2 \\ \{sa \sigma a p_+ b\} = \psi_3 \\ \{sa \sigma a p_0 a\} = \psi_4. \end{cases}$$

L'autofunzione imperturbata si cambierà in prima approssimazione in

$$(36) \quad \Psi_0 = \psi_0 + \frac{1}{\Delta E} (V_{01} \psi_1 + V_{02} \psi_2 + V_{03} \psi_3 + V_{04} \psi_4)$$

in cui ΔE è la differenza di energia tra le configurazioni $6s^2 6p$ e $6s 7s 6p$ e coincide quindi colla differenza di energia tra l'orbita $6s$ e $7s$ ed è pertanto negativa. La sua grandezza può stimarsi in 7 volt. Le V_{oi} sono gli elementi di matrice dell'energia elettrostatica che connettono lo stato 0 collo stato i .

Posto:

$$(36) \quad \begin{cases} G = \left(s\sigma \left| \frac{e^2}{r} \right| s\sigma \right) = \int \frac{e}{r_{12}} \sigma^2(1) \sigma(2) s(2) d\tau_1 d\tau_2 \\ H = \left(sp_+ \left| \frac{e^2}{r} \right| \sigma p_+ \right) = \int \frac{e}{r_{12}} s(1) \sigma(1) |p_+(2)|^2 d\tau_1 d\tau_2 \\ K = \left(sp_+ \left| \frac{e^2}{r} \right| p_+ \sigma \right) = \int \frac{e}{r_{12}} s_+(1) p_+(2) p_+(1) \sigma(2) d\tau_1 d\tau_2 \end{cases}$$

si trova che

$$(37) \quad \begin{cases} V_{01} = -G - H + K \\ V_{02} = G + H \\ V_{03} = -K \\ V_{04} = 0 \end{cases}$$

Una valutazione numerica degli integrali elettrostatici ha dato col metodo statistico

$$G = -0,84 \text{ volt} \quad H = 0,43 \quad K = 0,24$$

da cui

$$V_{01} = 1,51 \text{ volt} \quad V_{02} = -1,27 \quad V_{03} = -0,24 \quad V_{04} = 0.$$

Questi valori sono assai imprecisi perché il metodo statistico non fornisce buoni risultati per il calcolo di integrali elettrostatici, tutta via essi danno un'indicazione circa gli ordini di grandezza e il comportamento qualitativo della perturbazione.

L'autofunzione normalizzata di prima approssimazione a norma della (36) risulta numericamente:

$$(38) \quad \Psi_0 = 0,96 \psi_0 - 0,22 \psi_1 + 0,18 \psi_2 + 0,03 \psi_3.$$

Partendo ora da questa autofunzione bisogna calcolare il valor medio del campo magnetico nel nucleo o meglio la grandezza $H_z \mu/I$ che a norma della (1) determina la *sif*. All'uopo cominciamo a valutare i suoi elementi di matrice per le autofunzioni individuali. Servendoci della stessa (1) e dei dati sperimentali che danno una costante di *sif* di $0,404 \text{ cm}^{-1}$ per l'elettrone $7s$ si può dedurre che la costante di *sif* dell'elettrone $6s$ sarà circa $3,23 \text{ cm}^{-1}$ tenendo presente che la costante di *sif* è inversamente proporzionale ai cubi dei numeri quantici efficaci. Dal dato sperimentale sull'elettrone $6p_{1/2}$ si deduce che l'elettrone $6p_{3/2}$ imperturbato avrebbe una costante di *sif* di $0,035$. Con questi dati risulta

$$(39) \quad \begin{aligned} (\sigma a \mid H_z \frac{\mu}{I} \mid \sigma a) &= 0,20 \text{ cm}^{-1} \\ (s a \mid H_z \frac{\mu}{I} \mid s a) &= 1,62 \\ (p_1 a \mid H_z \frac{\mu}{I} \mid p_1 a) &= 0,052. \end{aligned}$$

Per valutare l'elemento non diagonale $(s a \mid H_z \frac{\mu}{I} \mid \sigma a)$ si può osservare che in approssimazione non relativistica, gli elementi diagonali sono proporzionali a $s^2(0)$ e $\sigma^2(0)$; l'elemento non diagonale è invece come si verifica facilmente proporzionale a $s(0)\sigma(0)$ ed è dato, in questa approssimazione, dalla media geometrica dei due. Siccome poi nel computo degli integrali elettrostatici le autofunzioni s e σ sono state scelte con segni opposti, nella media geometrica si deve prendere il segno meno. Si ha così

$$(s a \mid H_z \frac{\mu}{I} \mid \sigma a) = -0,57.$$

Da queste formule segue che:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{I} H_z\right) s a &= 1,62 s a - 0,57 \sigma a + \dots \\ \left(\frac{\mu}{I} H_z\right) s b &= -1,62 s b + 0,57 \sigma b + \dots \\ \left(\frac{\mu}{I} H_z\right) \sigma a &= 0,20 \sigma a - 0,57 s a + \dots \\ \left(\frac{\mu}{I} H_z\right) \sigma b &= -0,20 \sigma b + 0,57 s b + \dots \\ \left(\frac{\mu}{I} H_z\right) p_1 a &= 0,052 p_1 a + \dots \end{aligned}$$

I puntini indicano ulteriori termini che non hanno importanza per il nostro calcolo perché non incrociano coi termini a cui abbiamo limitato le nostre considerazioni.

È d'uopo ora passare dalle autofunzioni individuali alle $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$. Tenendo presenti le loro espressioni (35) e che esse, ripetiamo, rappresentano prodotti antisimmetrizzati si ottiene:

$$\left(\frac{\mu}{I} H_x\right) \psi_0 = 0,052 \psi_0 + 0,57 \psi_1 + 0,57 \psi_2$$

$$\left(\frac{\mu}{I} H_x\right) \psi_1 = 0,57 \psi_0 - 1,37 \psi_1$$

$$\left(\frac{\mu}{I} H_x\right) \psi_2 = 0,57 \psi_0 + 1,47 \psi_2$$

$$\left(\frac{\mu}{I} H_x\right) \psi_3 = + 1,82 \psi_3.$$

L'ultimo coefficiente è inesatto perché è stato trascurato il termine $(\psi_1 \delta \left| \frac{\mu}{I} H_x \right| \psi_1 \delta)$ si riconosce subito però che ciò porta uno spostamento insignificante dei risultati dato che ψ_3 interviene nell'autofunzione perturbata (38) nella percentuale dell'1% circa.

Il calcolo di $(\Psi_0 \left| \frac{\mu}{I} H_x \right| \Psi_0)$ con questi dati non offre più difficoltà; si trova

$$\left(\frac{\mu}{I} H_x\right) = 0,027 \psi_0 + 0,85 \psi_1 + 0,81 \psi_2 + 0,05 \psi_3$$

e

$$\left(\Psi_0 \left| \frac{\mu}{I} H_x \right| \Psi_0\right) = - 0,013$$

ciò che darebbe secondo la (1) un Δv di $-0,017 \text{ cm}^{-1}$ cioè una perturbazione di $0,087 \text{ cm}^{-1}$ poiché abbiamo assunto $0,070 \text{ cm}^{-1}$ come Δv imperturbato, mentre per ottenere il Δv sperimentale sarebbe occorsa una correzione di $0,062 \text{ cm}^{-1}$ nello stesso senso.

Risulta chiaramente come l'ordine di grandezza delle perturbazioni sia quello delle discrepanze tra teoria elementare ed esperienza. Per le ragioni più volte addotte un calcolo quantitativo trascende le attuali possibilità, tuttavia anche i semplici computi sopra scritti levano ogni solida base alle obiezioni contro l'attribuzione delle sif all'effetto di un momento magnetico nucleare, salvo effetti di un ordine di grandezza più piccolo a cui abbiamo già accennato [31]. Allo stato attuale tutto fa ritenere che la spiegazione delle varie anomalie vada ricercata nell'effetto delle perturbazioni nell'atomo e che bisogna esser guardinghi nell'attribuire ad effetti nucleari le divergenze osservate.

Aggiunta alla correzione: È uscito nel frattempo un lavoro di S. Goudsmit, « Phys. Rev. », 43, 636 (1933), i cui risultati coincidono con una parte dei nostri. Anche la tabella dei momenti magnetici nucleari data da Goudsmit è sostanzialmente eguale alla nostra.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] Un ottimo riassunto sullo stato attuale del problema delle strutture iperfini si trova nell'articolo di H. KALLMANN e H. SCHÜLER in «*Ergeb. der Exakt. Naturw.*», *11*, 134, (1932).
- [2] S. GOUDSMIT ed E. BACK, «*Zs. f. Phys.*», *43*, 321 (1927); P. ZEEMAN, E. BACK, S. GOUDSMIT, *ibid.*, *66*, 1 (1930).
- [3] E. FERMI, «*Zs. f. Phys.*», *60*, 320 (1930); J. HARGREAVES, «*Proc. Roy. Soc.*», *127*, 141, 407 (1930); H. CASIMIR, non pubblicato.
- [4] G. RACAH, «*Zs. f. Phys.*», *71*, 431 (1931); G. BREIT, «*Phys. Rev.*», *38*, 463 (1931).
- [5] S. GOUDSMIT, «*Phys. Rev.*», *37*, 663, 1931; S. GOUDSMIT e R. BACHER, «*Phys. Rev.*», *34*, 1500 (1929).
- [6] Un riassunto si trova in S. GOUDSMIT, *Rendiconto del Convegno di fisica nucleare del Convegno Volta*, Roma, 1931.
- [7] G. C. DARWIN, «*Proc. Roy. Soc.*», *118*, 654 (1928).
- [8] L. PAULING e S. GOUDSMIT, *Structure of Line Spectra* vedi anche J. C. MCLENNAN, A. B. MCLAY, M. F. CRAWFORD, «*Proc. Roy. Soc.*», *133*, 652 (1931).
- [9] G. BREIT, «*Phys. Rev.*», *37*, 51 (1931).
- [10] S. GOUDSMIT, «*Phys. Rev.*», *34*, 1500 (1929); G. RACAH, «*Zs. f. Phys.*», *71*, 431 (1931).
- [11] G. BREIT, «*Phys. Rev.*», *36*, 1732 (1930).
- [12] P. GÜTTINGER, «*Zs. f. Phys.*», *64*, 749 (1930); P. GÜTTINGER e W. PAULI, *ibid.*, *67*, 743 (1931).
- [13] H. SCHÜLER, «*Naturw.*», *16*, 512 (1928); H. SCHÜLER ed H. BRÜCK, «*Zs. f. Phys.*», *58*, 735 (1929).
- [14] R. RITSCHL, «*Zs. f. Phys.*», *79*, 1 (1932).
- [15] D. A. JACKSON, «*Zs. f. Phys.*», *75*, 229 (1932) (Ga I).
- [16] J. S. CAMPBELL, «*Nature*», *131*, 204 (1933) (Ga II).
- [17] H. KOPFERMANN, «*Naturw.*», *21*, 24 (1933).
- [18] H. SCHÜLER e J. E. KEYSTON, «*Zs. f. Phys.*», *71*, 413 (1931).
- [19] D. A. JACKSON, «*Zs. f. Phys.*», *80*, 59 (1933).
- [20] H. KOPFERMANN, «*Zs. f. Phys.*», *73*, 437 (1931).
- [21] P. GERALD KRUGER, R. C. GIBBS, R. C. WILLIAMS, «*Phys. Rev.*», *41*, 322 (1932).
- [22] R. RITSCHL, «*Naturw.*», *19*, 690 (1931).
- [23] H. SCHÜLER e E. KEYSTON, «*Zs. f. Phys.*», *72*, 423 (1931).
- [24] H. SCHÜLER, J. E. KEYSTON, «*Zs. f. Phys.*», *70*, 1 (1931) (Tl I e Tl II); J. C. MCLENNAN, F. CRAWFORD, «*Proc. Roy. Soc.*», *132*, 10 (1931) (Tl II); J. C. MCLENNAN, E. J. ALLIN, «*Proc. Roy. Soc.*», *129*, 43 (1930) (Tl III).
- [25] S. GOUDSMIT e R. BACHER, «*Phys. Rev.*», *34*, 1500 (1929).
- [26] H. KOPFERMANN, «*Zs. f. Phys.*», *75*, 363 (1932); H. SCHÜLER ed E. G. JONES, «*Zs. f. Phys.*», *75*, 563 (1932) (Pb I e Pb II); vedi anche J. L. ROSE, L. P. GRANATH, «*Phys. Rev.*», *40*, 760 (1932); J. C. MCLENNAN, M. F. CRAWFORD, L. B. LEPPARD, «*Nature*», *128*, 301 (1931) (Pb III).
- [27] E. BACK, S. GOUDSMIT, «*Zs. f. Phys.*», *47*, 174 (1928); P. ZEEMAN, E. BACK, S. GOUDSMIT, «*Zs. f. Phys.*», *66*, 1, (1930) (Bi I); R. FISHER, S. GOUDSMIT, «*Phys. Rev.*», *37*, 1057, 1674 (1931) (Bi II e III); ARVIDSSON, «*Nature*», *126*, 565 (1930) (Bi V).
- [28] G. BREIT, «*Phys. Rev.*», *36*, 1732 (1930).
- [29] F. W. LOOMIS, R. W. WOOD, «*Phys. Rev.*», *38*, 854 (1931).
- [30] Cfr. un lavoro di prossima pubblicazione di E. AMALDI ed E. FERMI.
- [31] Tali potrebbero essere per esempio le anomalie rilevate da H. CASIMIR «*Zs. f. Phys.*», *77*, 811 (1932) nello spettro del Hg.

N° 76, 80 a, 80 b, 80 c.

The better to appreciate the contribution brought by Fermi with his beta-decay theory, it is necessary to recapitulate the history of ideas on the subject.

Until the neutron was discovered in early 1932, it was assumed that nuclei consisted of protons and electrons, although speculations about the existence of a heavy neutral particle were advanced as early as 1920⁽¹⁾. Even the name "neutron" had already been used in this sense⁽²⁾.

The quantum-mechanical difficulties stemming from the confinement of electrons within a volume of nuclear dimensions and the continuous beta-ray spectra were the two great stumbling blocks of nuclear theory. Two possible alternatives were suggested. Bohr⁽³⁾ assumed that electrons in the nucleus could not be described within the framework of quantum mechanics, that they lost their property of determining the statistics and spin of the nucleus as a whole (it was known that Li^6 and N^{14} nuclei, against expectation, were bosons and had integral spins) and that energy was not conserved when electrons were involved in nuclear processes. On the other hand, Pauli was unwilling to abandon energy conservation and proposed the simultaneous emission of the electron and one (or more) neutral particles in beta-decay. This suggestion was first made informally in a letter addressed by Pauli on December 4, 1930 to the group of nuclear physicists at the University of Tübingen, chiefly H. Geiger and Lise Meitner. It was next mentioned in the discussions at a physics meeting in Pasadena in the spring of 1931, and again at Ann Arbor the following summer, but the author considered the proposal too tentative to justify its appearance in published records⁽⁴⁾.

Nevertheless, the idea soon spread among the community of theoretical physicists, and although Pauli had given no name to his hypothetical neutral particle, it became known among them as the "neutron". The use of the same word for a heavy particle was mainly confined to the Rutherford school. In October of the same year (1931), the *Convegno di Fisica nucleare* sponsored by the *Fondazione Volta* of the *Reale Accademia d'Italia* took place in Rome. The meeting was attended by most of the active experimental and theoretical workers in nuclear physics, such as Blackett, Bothe, Bohr, Marie Curie, Ehrenfest, Ellis, Fermi, Geiger, Goudsmit, Heisenberg, Lise Meitner, Pauli, Sommerfeld, and others. Here the beta-decay process was discussed and while Bohr suggested energy non-conservation⁽³⁾, Fermi was favorably impressed by the Pauli hypothesis. At this time the word "neutron" was being used more and more often for the heavy neutral particle, whose discovery was impending, and it was felt that another term should designate the "Pauli particle" in order to avoid confusion. The name "neutrino" was jokingly suggested by Fermi in a conversation with the other Rome physicists. It must be explained that the endings *-one* and *-ino* can be appended to many Italian nouns and adjectives to denote bigness and smallness, respectively. The Italian word for the neutron, *neutrone*, suggests a compound of *neutro*, neutral, and *-one*, meaning "a large neutral object"; correspondingly *neutrino* would mean "a small neutral object". The word was mentioned at the meeting and soon became the official name for the neutral beta-decay particle.

The next important nuclear conference was the *Septième Conseil de Physique* of the *Institut International de Physique Solway*, which met in Brussels in October 1933. This was another plenary meeting of the theoretical and experimental authorities on nuclei. Bohr, Blackett, Bothe, Chadwick, Cockcroft, Marie Curie, L. De Broglie, Dirac, Ellis, Fermi, Ga-

(1) E. RUTHERFORD, « Proc. Roy. Soc. », A-97, 324 (1920).

(2) J. CHADWICK, « Proc. Roy. Soc. », A-136, 692 (1932).

(3) N. BOHR, *Convegno di Fisica Nucleare*, « R. Accad. d'Italia », p. 119. Roma 1932.

(4) The writer is indebted for these and other details of the history of beta-decay theories to a correspondence with the late Professor Wolfgang Pauli.

mow, Heisenberg, Irène Joliot-Curie, F. Joliot, Lawrence, Meitner, Pauli, and Rutherford were present among others. By that time, the neutron had been discovered and the model of the nucleus composed of protons and neutrons had been reasonably well established through the work of Heisenberg, Ivanenko and Majorana. In the proceedings of that meeting for the first time the neutrino hypothesis appears in print, in a comment by Pauli (5) to the report of Heisenberg. He leaves the question open whether the neutrino should be attributed a finite rest mass; but definitely suggests a spin $1/2$ and Fermi statistics, in order to allow spin and statistics conservation in beta-decay; of course, energy and momentum conservation is also assumed. Thus Fermi was present at these historic discussions on nuclear structure and beta-decay, and although his role at the time was mainly confined to comments on problems of nuclear forces, it is certain that he had given deep thought to beta-decay theory. In fact, a paper (N° 76) announcing his complete results on beta-spectra already appeared in the December 1933 issue of "Ricerca Scientifica" (there is no indication of the date on which the article was submitted to that journal). This was only 2 months after the Solvay conference.

To understand the fundamental contribution brought by Fermi with his beta-decay theory, it must be emphasized that the idea of the neutrino had remained up to that time a rather vague hypothesis, while the construction of a formal theory had never been attempted. When Pauli first made his suggestion in 1930, electrons were believed to exist in the nucleus, and the hypothetical neutral particle was by analogy considered as another nuclear constituent (with small but finite rest mass). Only vague hints at the possible creation of the electron (and the neutrino) in the beta-decay process are found in the proceedings of the 1933 Solvay conference.

While thus well acquainted with the problem, Fermi at the same time acquired the theoretical tools that would lead him to the solution. He had been thoroughly studying the Dirac radiation theory, as evidenced by the celebrated summary of that subject (N° 67) published in 1932. Apparently he had some difficulty with the Dirac-Jordan-Klein method of the second quantization of fields, but eventually also mastered that technique and considered a beta-decay theory as a good exercise on the use of creation and destruction operators. He also made use of the isotopic spin formalism, recently invented by Heisenberg and later to prove of great usefulness in view of the charge independence of the strong interactions.

The theory that he built on these foundations is remarkable for its ability to withstand almost unchanged two and a half decades of revolutionary advances in nuclear physics. One might say that seldom was a physical theory born in such definitive form.

Fermi explicitly pointed out that there were many possible forms of an interaction Hamiltonian that would lead to beta-decay processes. His choice was dictated by simplicity and by analogy with the interaction of charges and currents with the electromagnetic field. Accordingly he chose the (polar) vector interaction. It was later shown by Wigner that the possible relativistically invariant interactions bilinear in the electron and neutrino wave functions (and not containing the gradients of these functions) are of five types (or any linear combination thereof). The particular choice did not affect the main results of Fermi's calculations, the shape of the allowed spectra (entirely determined by the "statistical factor" and Coulomb effects) and the ft -values for these same transitions. However, the selection rules obtained were too restrictive. Gamow and Teller later showed that other interaction forms (axial vector and tensor) produce different selection rules for allowed transitions. The experimental evidence has proved that the beta-decay interaction must be a mixture, in about equal parts, of a Fermi (scalar or vector) and a Gamow-Teller term. At present (1959) it seems fairly well established that the Fermi interaction is of vector type (as he originally assumed) and the Gamow-Teller term is axial vector. With this extension, the Fermi theory successfully explains quantitatively a number of phenomena well beyond those calculated in the original papers. One may mention the spectral shapes and lifetimes for transitions of various order of forbiddenness, positron

(5) W. PAULI, *Structure et Propriétés des Noyaux Atomiques*, p. 324, Rapports et discussions du Septième Conseil de Physique, Institut International de Physique Solvay. Gauthier-Villars, Paris 1934.

decay and orbital electron capture, and also processes other than beta-decay of nucleons, but all having the common characteristic of being due to "weak interactions" between four fermions. Among such processes are the decay of the muon and the reaction of a negative muon with a proton. It appears compatible with the present experimental evidence to describe all these processes by the same "universal Fermi interaction". One modification of the beta-decay theory that recent evidence made necessary is the addition of parity-non-conserving terms.

Fermi intended to announce the results of his beta-decay theory in a letter to "Nature", but the manuscript was rejected by the Editor of that journal as containing abstract speculations too remote from physical reality to be of interest to the readers. He then sent a somewhat longer paper (N° 76) to "Ricerca Scientifica" where it was promptly published. This article includes all the essential results, showing that the calculations (including the numerical value of $f\beta$) had been completed. The longer papers in "Nuovo Cimento" and "Zeitschrift für Physik" were sent to the respective journals very early in 1934.

F. RASETTI.

76.

TENTATIVO DI UNA TEORIA DELL'EMISSIONE DEI RAGGI « BETA »

« Ric. Scientifica », 4 (2), 491-495 (1933).

RIASSUNTO. — Teoria della emissione dei raggi β delle sostanze radioattive, fondata sull'ipotesi che gli elettroni emessi dai nuclei non esistono prima della disintegrazione ma vengano formati, insieme ad un neutrino, in modo analogo alla formazione di un quanto di luce che accompagna un salto quantico di un atomo. Confronto della teoria con l'esperienza.

Mi propongo di esporre qui i fondamenti di una teoria dell'emissione dei raggi β che, benché basata sopra ipotesi delle quali manca al momento presente qualsiasi conferma sperimentale, sembra tuttavia capace di dare una rappresentazione abbastanza accurata dei fatti e permette una trattazione quantitativa del comportamento degli elettroni nucleari che, se pure le ipotesi fondamentali della teoria dovessero risultare false, potrà in ogni caso servire di utile guida per indirizzare le ricerche sperimentali.

È ben noto che nel cercare di costruire una teoria dei raggi β si incontra una prima difficoltà dipendente dal fatto che i raggi β escono dai nuclei radioattivi con una distribuzione continua di velocità che si estende fino a una certa velocità massima: ciò che a prima vista non sembra conciliabile col principio della conservazione dell'energia. Una possibilità qualitativa di spiegare i fatti senza dovere abbandonare il principio della conservazione dell'energia consiste, secondo Pauli, nell'ammettere l'esistenza del così detto « neutrino », cioè di un corpuscolo elettricamente neutro con massa dell'ordine di grandezza di quella dell'elettrone o minore. In ogni disintegrazione β si avrebbe emissione simultanea di un elettrone e di un neutrino; e l'energia liberata nel processo si ripartirebbe comunque tra i due corpuscoli in modo appunto che l'energia dell'elettrone possa prendere

tutti i valori da zero fino ad un certo massimo. Il neutrino d'altra parte, a causa della sua neutralità elettrica e della piccolissima massa, avrebbe un potere penetrante così elevato da sfuggire praticamente ad ogni attuale metodo di osservazione. Nella teoria che ci proponiamo di esporre ci metteremo dal punto di vista della ipotesi dell'esistenza del neutrino.

A parte la difficoltà della distribuzione continua delle energie, una teoria dei raggi β incontra un'altra difficoltà essenziale nel fatto che le presenti teorie delle particelle leggere non spiegano in un modo soddisfacente come queste possano venir legate in modo stabile o quasi stabile nell'interno di un nucleo, dato il piccolo volume di questo.

La via più semplice per la costruzione di una teoria che permetta una discussione quantitativa dei fenomeni in cui intervengono gli elettroni nucleari, sembra in conseguenza doversi ricercare nella ipotesi che gli elettroni non esistano come tali nel nucleo prima della emissione β , ma che essi, per così dire, acquistino esistenza nell'istante stesso in cui vengono emessi; allo stesso modo come un quanto di luce emesso da un atomo in un salto quantico non si può in alcun modo considerare preesistente nell'atomo prima del processo di emissione. In questa teoria dunque il numero totale degli elettroni e dei neutrini (al pari del numero totale dei quanti di luce nella teoria della irradiazione) non sarà necessariamente costante, potendosi avere dei processi di creazione o di distruzione delle particelle leggere.

Secondo le idee di Heisenberg, considereremo le particelle pesanti, neutrone e protone, come due stati quantici connessi a due possibili valori di una coordinata interna ρ della particella pesante. Ad essa attribuiremo il valore $+1$ se la particella è un neutrone e -1 se la particella è un protone.

Cercheremo poi una espressione dell'energia di interazione tra le particelle leggere e quelle pesanti che consenta delle transizioni tra i due valori $+1$ e -1 della coordinata ρ , e cioè la trasformazione di un neutrone in protone o viceversa; in modo tale però che alla trasformazione da neutrone a protone sia di necessità connessa la creazione di un elettrone, che si osserva come particella β , e di un neutrino; mentre alla trasformazione inversa da protone a neutrone sia connessa la scomparsa di un elettrone e di un neutrino; così come nella teoria della irradiazione a un certo salto quantico dell'atomo è connessa l'emissione di un quanto di luce, mentre al salto quantico opposto è connesso l'assorbimento di un quanto.

Il formalismo matematico più semplice per costruire una teoria in cui il numero delle particelle leggere (elettroni e neutrini) non sia necessariamente costante, si ha nel metodo di Dirac-Jordan-Klein delle « ampiezze di probabilità quantizzate ». In questo formalismo le ampiezze di probabilità ψ degli elettroni e φ dei neutrini, e le loro complesse coniugate ψ^* e φ^* , vengono considerate come operatori non commutativi che agiscono sopra le funzioni dei numeri di occupazione degli stati quantici degli elettroni e dei neutrini; in modo tale che l'operatore ψ determina transizioni in cui il numero degli elettroni cala di una unità, mentre l'operatore complesso coniugato ψ^* determina transizioni opposte in cui si ha aumento di uno del numero totale degli elettroni. Nelle ordinarie applicazioni del metodo, naturalmente, gli operatori ψ e ψ^* figurano sempre associati uno all'altro, per modo che, nei

processi che si considerano, il numero totale dei corpuscoli resti costante. Nella teoria presente invece la possibilità della variazione del numero degli elettroni si ottiene introducendo i due operatori opposti ψ e ψ^* in termini separati della energia di interazione.

Dobbiamo ancora introdurre due altri operatori Q e Q^* che operano sulle funzioni della variabile a due valori ρ come le sostituzioni lineari

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad Q^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Questi operatori, come facilmente si riconosce, determinano rispettivamente le transizioni da protone a neutrone e da neutrone a protone.

Una espressione dell'energia di interazione che associ necessariamente alle transizioni da neutrone a protone (operatore Q^*) la creazione di un elettrone e di un neutrino (operatori ψ^* e φ^*) e alla transizione da protone a neutrone (operatore Q) la scomparsa di un elettrone e di un neutrino (operatori ψ e φ) ha come sua forma più generale la seguente:

$$H = QL(\psi \cdot \varphi) + Q^*L^*(\psi^* \cdot \varphi^*)$$

in cui L rappresenta una espressione bilineare in ψ e φ , che può eventualmente contenere anche le coordinate, i momenti e le coordinate di spin della particella pesante. Una limitazione alle possibilità di scelta di L si ottiene cercando quelle espressioni che, al variare del sistema di riferimento, si comportano come la componente temporale di un quadrivettore polare. Si può dimostrare che la più semplice di tali espressioni è la seguente:

$$L(\psi \cdot \varphi) = g(\psi_2 \varphi_1 - \psi_1 \varphi_2 + \psi_3 \varphi_4 - \psi_4 \varphi_3)$$

dove le ψ e le φ sono le quattro componenti della ampiezza di probabilità relativistica per gli elettroni e i neutrini; e g rappresenta una costante di proporzionalità. Siccome le conseguenze di questa scelta si mostrano in buon accordo con i fatti sperimentali non occorre per il momento ricorrere ad espressioni più complicate.

Prenderemo dunque in definitiva come espressione della interazione la seguente.

$$(1) \quad H = g \{ Q(\psi_2 \varphi_1 - \psi_1 \varphi_2 + \psi_3 \varphi_4 - \psi_4 \varphi_3) + Q^*(\psi_2^* \varphi_1^* - \psi_1^* \varphi_2^* + \psi_3^* \varphi_4^* - \psi_4^* \varphi_3^*) \}.$$

In questa espressione ψ e le φ (considerate come operatori) debbono prendersi nel punto dello spazio occupato dalla particella pesante. La costante g che figura nella (1) ha le dimensioni $L^3 M T^{-2}$.

Prendendo la (1) come espressione della energia di interazione si può costruire una teoria delle disintegrazioni β , con metodi simili a quelli usati nella teoria dell'irradiazione per calcolare la vita media di uno stato eccitato di un atomo. Senza entrare qui in dettagli matematici a proposito di questa teoria, ci limiteremo solo ad osservare che la lunghezza d'onda di de Broglie, per particelle leggere aventi energie non superiori ad alcuni milioni di volt, è grande a confronto delle dimensioni nucleari. Ne segue che in prima approssi-

mazione potremo trascurare le variazioni di ψ e φ per punti differenti del nucleo; ciò corrisponderebbe nella teoria della radiazione a trascurare l'irradiazione di quadrupolo. Facendo questa approssimazione, si trova che la vita media per un processo di disintegrazione β in cui un neutrone legato in una orbita con autofunzione u_n si trasforma in un protone appartenente a uno stato quantico v_m emettendo un raggio β e un neutrino, è data da:

$$(2) \quad \frac{1}{\tau} = 1,65 \cdot 10^{95} g^2 (10^{12} r)^{-0,4} \left| \int u_n v_m^* d\tau \right|^2 F(\eta_0).$$

In questa espressione $mcr\eta_0$ rappresenta il massimo momento degli elettroni emessi, che è determinato dalla differenza di energia tra i due stati u_n e v_m della particella pesante, r è una lunghezza dell'ordine di grandezza di 10^{-12} cm il cui valore esatto dipende dalle ipotesi che si fanno sopra l'andamento del potenziale elettrico nell'interno del nucleo. La funzione F ha una espressione analitica alquanto complicata; per piccoli valori dell'argomento si comporta quasi esattamente come $\eta_0^6/24$ mentre per argomenti maggiori prende i valori dati dalla seguente tabella:

η_0	$F(\eta_0)$	η_0	$F(\eta_0)$
1	0,03	5	80
2	1,2	6	185
3	7	7	380
4	29		

Questi valori, come anche la formula (2), sono stati calcolati per il numero atomico $Z = 82$; essi però non variano considerevolmente entro il piccolo intervallo di numeri atomici rappresentati nelle famiglie radioattive. Nella (2) inoltre la massa del neutrino è stata presa eguale a zero. Poiché da un confronto delle curve teoriche e sperimentali che danno la distribuzione continua dell'energia delle particelle β , si trova che, affinché esse concordino, è necessario ammettere che la massa del neutrino sia molto minore di quella dell'elettrone; l'ipotesi più semplificativa consiste nel porla addirittura eguale a zero.

L'unico elemento incerto nella (2) è l'elemento di matrice

$$g = \int u_n v_m^* d\tau$$

per calcolare il quale occorrerebbe conoscere le autofunzioni u_n e v_m dei due stati del neutrone e del protone entro il nucleo. Si può tuttavia affermare che g sarà dell'ordine di grandezza dell'unità; solo in casi di particolari simmetrie delle due autofunzioni u_n e v_m , g potrà essere esattamente zero. Questi casi corrispondono alle transizioni proibite dell'ottica, in cui si annulla l'elemento corrispondente alla transizione considerata della matrice che rappresenta il momento elettrico. In questi casi la approssimazione che ha condotto alla (2) non è più sufficiente e si debbono prendere in considerazione anche i termini che dipendono dalle variazioni della ψ e della φ entro l'estensione del nucleo. Un calcolo di questo genere, del tutto analogo alla

considerazione dei termini di quadrupolo nella teoria della irradiazione, porta a prevedere in questi casi che le intensità della transizione β siano, come ordine di grandezza, qualche centinaio di volte più piccole che nel caso normale.

Dobbiamo dunque attenderci che se si formano per diversi corpi che si disintegrano emettendo raggi β i prodotti $\tau F(\eta_0)$, questi siano tutti dello stesso ordine di grandezza; salvo i casi in cui la transizione β , nel senso che abbiamo spiegato, non possa avvenire in prima approssimazione: in questi casi il prodotto $\tau F(\eta_0)$ dovrà prendere valori qualche centinaio di volte più grandi che nei casi normali.

Nella tabella seguente sono riuniti i prodotti $\tau F(\eta_0)$ per tutte le sostanze che emettono raggi β per le quali si hanno dati sufficienti; τ è espresso in ore.

Elemento	$\tau F(\eta_0)$	Elemento	$\tau F(\eta_0)$
Ra B	0,62	Ra C	130
Th B	1,7	Ra E	770
Th C''	2,9	Ms Th ₂	180
Ac B	0,7	Th C	150
Ac C''	1,4		
UX ₁	3,3		
UX ₂	3,3		

In questo prospetto sono chiaramente riconoscibili i due gruppi che avevamo attesi. Si noti anche che elementi che occupano posizioni omologhe nelle differenti famiglie radioattive appartengono sempre al medesimo gruppo.

Da questi risultati è anche possibile calcolare almeno l'ordine di grandezza della costante g . Esso risulta $5 \cdot 10^{-50}$.

La teoria permette infine di calcolare la curva di distribuzione delle velocità delle particelle β . Siccome i dati sperimentali, particolarmente per quanto riguarda la parte della curva di piccola energia, sono alquanto contraddittori tra di loro, non è possibile basare su di essi un controllo preciso della teoria; l'accordo qualitativo si mostra tuttavia buono. Dalla teoria risulta in particolare che la curva di distribuzione per piccole velocità dovrebbe tendere a zero più rapidamente per il caso degli elementi in cui la transizione è proibita in prima approssimazione, e cioè per quelli appartenenti al secondo gruppo della tabella precedente che non per gli altri. I dati sperimentali non sembrano essere sufficientemente definiti per un controllo di questo punto.

Una esposizione più estesa di questa teoria e ulteriori suoi risultati verranno pubblicati prossimamente in altro luogo.

77 b.

ON THE RECOMBINATION OF ELECTRONS
AND POSITRONS

E. FERMI and G. E. UHLENBECK, « Phys. Rev. », 44, 510-511 (1933)

The discovery of the positron has opened the possibility of a physical interpretation of the negative energy levels in Dirac's relativistic theory of the electron. In particular the formation of a positron-electron pair under a hard γ -radiation, as observed by Anderson, has been interpreted by Oppenheimer and Plesset⁽¹⁾, as a kind of photoelectric effect, whereby the energy of the absorbed γ -quantum raises an electron from a negative energy state to a positive one, forming a hole or positron and an electron. The reverse process, recombination of a positron and an electron under emission of γ -radiation, has been suggested by Blackett and Occhialini⁽²⁾, as a possible explanation of the radiation observed by Gray and Tarrant⁽³⁾ in the scattering of hard γ -rays. According to these authors, the scattered radiation contains besides the normal Compton scattering, two fairly monochromatic components with energies of about 0.5 and 1×10^6 volts, i.e., very nearly mc^2 and $2mc^2$. The intensity of the hard component is smaller than that of the soft component, increases somewhat with the atomic number Z , and is, for lead, 1/3 of the total radiation. The recombination energy of an electron and a positron, both with negligible kinetic energies, is the sum of the rest masses or $2mc^2 \cong 10^6$ volts. Because of the necessary conservation of energy and momentum this energy, in the case that both particles are free, can only be emitted in the form of two quanta of the same energy ($= 0.5 \times 10^6$ volt). This type of radiation would therefore explain the soft component. For the hard component the energy must be emitted in one quantum, which is only possible for a strongly bound electron, where the nucleus can take up the recoil momentum of the quantum.

According to this explanation the mechanism of the scattering would be as follows. First the primary γ -quantum is absorbed forming a pair. The high velocity positron which is formed loses its kinetic energy by collisions, and at the end of its path there is a chance of its being destroyed by either of the two processes mentioned above. The ratio of the intensities of the two components should be equal to the ratio of the probabilities of the two

(1) OPPENHEIMER and PLESSET, « Phys. Rev. », 44, 53 (1933). See also BECK, « Zeits. f. Physik », 83, 498 (1933).

(2) BLACKETT and OCCHIALINI, « Proc. Roy. Soc. », A 139, 699 (1933).

(3) GRAY and TARRANT, « Proc. Roy. Soc. », A 136, 662 (1932).

processes. Now it has been shown by several authors that the rate of destruction of a low velocity positron by the two quanta process is:

$$(1) \quad R_2 = N\pi e^4/m^2 c^3 = 7.5 \times 10^{-15} N,$$

where N is the electron density. The nuclear repulsion prevents the positron from reaching the inner parts of the atoms. Therefore not all electrons are effective, so that N will lie between n and nZ , n being the number of atoms per unit volume. For lead $n = 3.3 \times 10^{22}$ which gives as lower limit for $R_2 = 2.5 \times 10^8$. To explain the intensity of the hard component we must therefore expect for the one quantum process a rate of the order 10^8 .

We have calculated the cross section for the destruction of the positron by the one quantum process. Since we are dealing with low velocity positrons one might expect that a nonrelativistic approximation⁽⁴⁾ will give at least the right order of magnitude. We find as the contribution to the cross section due to the K-shell of the atom, neglecting the screening by the atomic electrons:

$$(2) \quad \sigma_K = (4/3) \pi^2 \alpha^2 a^2 Z^6 (1 + Z^2/W) \{ \exp(2\pi Z/W^{1/2}) - 1 \}^{-1},$$

where α is the fine structure constant, a is Bohr's radius and W is the energy of the positron expressed in Rydbergs. The contribution of the L-shell is considerably smaller; we find:

$$(3) \quad \sigma_L = (1/24) \pi^2 \alpha^2 a^2 Z^6 (4 + 7Z^2/W) \{ \exp(2\pi Z/W^{1/2}) - 1 \}^{-1}.$$

From these cross sections we find the rate of destruction by multiplying with nv . For positrons of low velocity it is not permissible to neglect the screening, because the exponential factor which is the main term in (2) and (3) and is due to the repulsion of the positron by the nuclear charge, is essentially reduced by the screening. Using the statistical model one can show that instead of $\exp(-2\pi Z/W^{1/2})$ one gets:

$$(4) \quad \exp \{ -2.66 Z^{1/3} \varphi(0.442 W/Z^{4/3}) \},$$

where $\varphi(\xi)$ has the following values: $\varphi(0) = 4.18$; $\varphi(0.0018) = 3.13$; $\varphi(0.0158) = 2.63$; $\varphi(0.122) = 1.96$; $\varphi(0.425) = 1.48$; $\varphi(1.31) = 1.06$ and $\varphi(\xi) = (\pi/2)(\xi + 1)^{-1/2}$ for larger values of ξ . For example in lead ($Z = 82$) we get for respectively: $W = 1, 100, 10,000$, and $75,000 (= 10^6 \text{ e V.})$ the following rates for destruction: $R_1 = 2 \times 10^{-5}, 10, 5 \times 10^7, 10^9$. The last value is only given as an indication, since the velocity is so high that (2) is no longer applicable.

The first value shows that the original explanation of the hard component as due to positrons which have completely lost their initial velocity cannot be maintained. We get a rate too small by a factor 10^{13} . One might perhaps still expect a very hard component due to the destruction of positrons at the beginning of their path, since the probability for destruction is then much

(4) Nonrelativistic means here that nonrelativistic radial eigenfunctions are used, and that one keeps only the terms with the smallest power of $1/c$. This corresponds to the first formula of Oppenheimer and Plesset, which we have been able to check except that we got a result larger by a factor 2.

higher. For an estimate, take positrons of 10^6 volts, which have a range in lead of 0.06 cm. The time required is about 3×10^{-12} sec, so that even if we assume during this time the maximum rate of 10^9 we get as total probability of destruction by the one quantum process 0.003. This would give of course radiation of about 2×10^6 volts. The probability is still very small, but one might perhaps hope that the relativistic corrections will increase this result appreciably.

We do not think however that this is very likely, because one needs an increase by a factor 100 to get an observable result. To estimate very roughly what the influence of relativity can be, we have made a numerical calculation of the cross section for destruction of positrons of 10^6 volt in lead. To simplify the calculations we have only considered the contribution due to transitions of s -states of the positron to s -states of the electron. In nonrelativistic approximation the rate is 0.4×10^9 . The relativistic calculation gave instead 2.3×10^7 . This of course does not necessarily mean that the relativistic result will really be smaller than the one given by the approximate formula (2), because we have many more transitions to take into account. But it makes one doubt if really the exact calculation will considerably increase the non-relativistic result.

Finally one should of course not forget the probability of destruction by the two quantum process before the positron has lost its kinetic energy. This would give rise to a continuous band above 0.5×10^6 volts. The upper limit for this probability is however for lead and 10^6 -volt positron only 5 percent and the actual value is probably less.

In conclusion our results are that it is difficult to reconcile the explanation of the hard component of Gray and Tarrant as due to the destruction of positrons with the Dirac theory.

Department of Physics,
University of Michigan,
August 18, 1933.

N° 78.

Discussion of this paper offers the opportunity of describing Fermi's activities in experimental nuclear physics for the period 1930-34, previous to the discovery of the radioactivity induced by neutrons.

It is not generally known that Fermi not only intended to learn the techniques of nuclear physics, but spent considerable time in the process several years before his name became famous in that field with the discovery of neutron-induced activities.

His intention of entering the nuclear field first became manifest in the winter of 1930-31, although his theoretical work at the time followed entirely different lines. He set himself as a first task the construction and operation of a cloud chamber, with the help of E. Amaldi. The weakest point of the Rome physics department at the time was its poorly equipped and inefficiently staffed machine shop; only the simplest instruments could be built there, and even these at the cost of inordinately long time and much prodding by the physicists. These circumstances induced Fermi to make use of the "do-it-yourself" methods that were characteristic of him both in theoretical and experimental work. In order to minimize shop work and build a cloud chamber with his own hands aided only by the most elementary tools, he first inspected several hardware stores and bought assorted kitchenware and gas plumbing. The cloud chamber was to be of the floating piston type, the seal being formed by water. Accordingly the cylinder and piston were two aluminum pans of slightly different diameters. A gas valve, rotated by a motor and gear, periodically established communication between the space under the piston and a vacuum pump, causing expansions at 15-second intervals. Alpha-particle tracks were soon observed, but their quality was poor owing to the slowness of the expansion and difficulty of clearing the field of old tracks. No attempt to take photographs was made. In the spring of 1931 Fermi gave up the cloud chamber project and went back to theoretical work. It is regrettable that lack of shop facilities prevented him from achieving the success that his experimental skill deserved.

In the fall of 1931 Rasetti went to Berlin-Dahlem for a year to learn nuclear techniques under Professor Lise Meitner. During his residence there, the papers of Bothe and Becker, Curie-Joliot and Chadwick, leading from the mysterious "Po + Be" radiation of the former authors to Chadwick's identification of the neutron, were published. Rasetti acquired experience in the preparation of neutron sources and in neutron detection both by cloud-chamber and counter methods.

In the fall of 1932, Fermi and Rasetti organized a joint program of research in nuclear physics in Rome. To minimize the drawback of the inadequate machine shop, several instruments were designed and their construction was "farmed out" in a private shop in Rome. A rather large cloud chamber, essentially designed after those in use in Berlin-Dahlem, worked excellently as soon as it was assembled. The same shop built the mechanical parts of the gamma-ray crystal spectrometer described in the present paper.

These developments were made possible by a grant from the Consiglio Nazionale delle Ricerche, which had raised the research budget of the department to an amount of the order of \$ 2000 to \$ 3000 per year; a fabulous wealth when one considers that the average for physics departments in Italian universities was about one-tenth of that amount.

By the end of 1933 the nuclear instrumentation in Rome was adequate for research along several lines. Rasetti⁽¹⁾ had separated a strong source of RaD from a radium solution, further separated the polonium, and mixing the latter with beryllium powder had prepared a neutron source comparable to the most powerful ones then in use elsewhere. Proton recoils and nitrogen disintegrations were readily observed in the above-mentioned cloud chamber. Various types of counters were also in operation.

(1) F. RASETTI, «Ricerca Scient.», 5-1, 3 (1934).

In March, 1934, after the discovery of the alpha-induced radioactivity had been announced by Curie and Joliot, Fermi suggested to Rasetti that they try to observe similar effects with neutrons. Near the end of that month several elements were irradiated with the Po + Be source and tested for activity by means of a thin-walled Geiger-Mueller counter, with a totally negative result obviously due to lack of intensity. When the enhancing effect of hydrogenous media was later discovered, activities induced by the Po + Be source could be readily observed.

At the beginning of April, Rasetti left for Morocco while Fermi continued the experiments. The idea, essential to success, then occurred to him that in order to observe a neutron-induced activity it was not necessary to use a Po + Be source; a much stronger Rn + Be source could be employed, since its beta and gamma radiations were no objection to the observation of a delayed effect. Radon sources were already familiar to Fermi since they had been supplied previously by Professor Trabacchi for use with the gamma-ray spectrometer. All one had to do was to prepare a similar source in a glass bulb filled with beryllium powder. Experiments with this type of source led to an almost immediate positive result.

After these introductory remarks there remains little to be mentioned in connection with the paper under discussion. The resolution attained was superior to that previously achieved by using rocksalt crystals. However, it was realized that the method was of little promise as a tool for the investigation of gamma-ray spectra owing to the extremely strong sources required to photograph the lines even with exceedingly long exposures. Attempts to use Geiger-Mueller counters as detectors were not successful. However, the crystal method, as later revived by Du Mond and co-workers using much improved techniques, yielded the most accurate gamma-ray wavelength measurements available at present.

F. RASETTI.

78.

UNO SPETTROGRAFO PER RAGGI « GAMMA » A CRISTALLO DI BISMUTO

E. FERMI e F. RASETTI, « Ric. Scientifica », 4 (2), 299-302 (1933).

RIASSUNTO. — Si dà notizia di una tecnica speciale per la preparazione di grossi cristalli singoli di bismuto, accennando al loro impiego nella spettrografia dei raggi «gamma». Si conclude che l'uso di questo cristallo dà risultati superiori a quelli che si ottengono col salgemma, comunemente adoperato. Sono state fotografate numerose righe γ del Radio B + C, raggiungendo le più alte frequenze già osservate col metodo del cristallo.

Sebbene lo studio dei raggi gamma si faccia più spesso per mezzo dei raggi beta secondari, cioè dei fotoelettroni generati nell'atomo stesso che si disintegra dalla « conversione » del quanto γ , pur tuttavia l'analisi diretta degli spettri γ mediante l'interferenza nei cristalli presenta molto interesse. Infatti, per esempio, mentre dalla misura del numero di elettroni presenti in ciascuna riga dello spettro β secondario non si ha senz'altro la intensità della corrispondente riga γ , poiché vi è di mezzo il cosiddetto « coefficiente di conversione » il quale varia da una riga all'altra, dall'altra parte le misure dirette per mezzo di un cristallo permettono di misurare queste intensità. Dal confronto tra i due tipi di misure si può dedurre appunto il detto coefficiente di conversione, dato assai importante per i problemi della struttura

nucleare. Inoltre la misura col cristallo si presta meglio alla determinazione dei valori assoluti delle frequenze, ed è scevra da incertezze di interpretazione che talvolta si presentano negli spettri dei raggi β secondari.

Per queste ragioni abbiamo deciso di riprendere lo studio sperimentale degli spettri dei raggi γ , come parte di un programma di ricerche di fisica nucleare che l'Istituto Fisico di Roma sta svolgendo sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Sebbene questa ricerca non sia ancora compiuta, pure crediamo utile dare qualche notizia sui risultati già raggiunti, i quali possono presentare un certo interesse.

I precedenti ricercatori che si sono occupati degli spettri dei raggi γ , e cioè Rutherford e Andrade ⁽²⁾, Thibaud ⁽³⁾ e Frilley ⁽⁴⁾ si sono serviti esclusivamente di cristalli di salgemma. Convinti che ormai la tecnica avesse raggiunto il massimo progresso realizzabile con questo cristallo, abbiamo pensato se non fosse possibile ottenere risultati migliori servendosi di cristalli di elementi pesanti, nei quali le radiazioni penetrano soltanto in uno strato sottile della sostanza, con vantaggio della definizione delle righe.

Esaminati i vari cristalli possibili, la scelta è caduta sopra il bismuto metallico, per varie ragioni: alto peso atomico, facilità di ottenere cristalli singoli, facilità di sfaldatura, costante reticolare non troppo grande.

Per ottenere gli spettri dei raggi γ è necessario avere una faccia cristallina di grandi dimensioni, dato l'angolo di incidenza piccolissimo sotto cui si deve lavorare e la necessità di avere la massima intensità possibile. Abbiamo perciò dovuto sviluppare una tecnica per la preparazione di grossi cristalli singoli di Bi e per isolarne una faccia cristallina parallela ai piani reticolari III e di grandi dimensioni (2×8 cm.). Dopo molti tentativi abbiamo adottato il procedimento seguente, con ottimi risultati. Se il bismuto fuso in una stufa elettrica viene raffreddato molto lentamente (abbassando la temperatura della stufa pochi gradi sotto il punto di fusione) si ottiene spesso un cristallo unico, perché si abbia cura che l'espansione che ha luogo nella solidificazione non produca sforzi meccanici al contatto con le pareti; ciò si può realizzare usando una forma di steatite o di gesso a sezione triangolare. Occorre ora avere precauzioni speciali perché i piani III del cristallo siano orientati parallelamente all'asse longitudinale del blocco di bismuto, in modo da poter poi isolare una faccia delle dimensioni desiderate. Per questo scopo ci siamo serviti del metodo del seme, già studiato accuratamente dal Goetz e dai suoi collaboratori ⁽⁵⁾. Avendo ottenuto un gran numero di piccoli cristalli singoli di Bi di forma cilindrica, se ne sceglie uno in cui per caso i piani III sono paralleli all'asse del cilindro, e questo si usa come germe. Si fonde il bismuto da far cristallizzare nella sua forma in contatto del cristallo-germe, avendo cura che anche una parte di quest'ultimo venga rifiuta. Se ora si fa raffreddare il tutto lentamente, disponendo il gradiente termico nella stufa in modo che l'estremità dalla parte del germe sia

(2) E. RUTHERFORD e N. da C. ANDRADE, « Phil. Mag. », 27, 854; 28, 262 (1914).

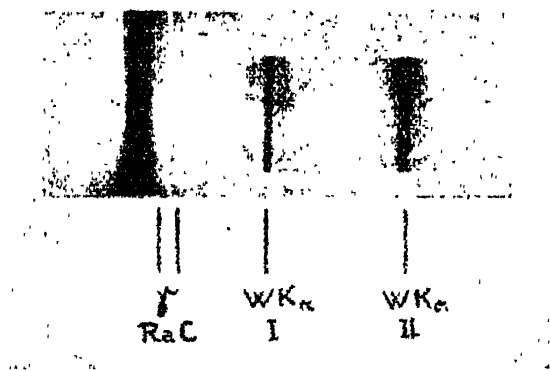
(3) J. THIBAUD, Thèse, Paris 1925.

(4) M. FRILLEY, Thèse, Paris 1928.

(5) A. GOETZ, « Phys. Rev. », 35, 193 (1930).

sempre la più fredda, la cristallizzazione dell'intera massa procede nell'orientazione del germe. Ottenuto il cristallo, il germe vien tagliato e può essere usato per nuovi cristalli indefinitamente.

Ottenuto il cristallo singolo con l'orientazione desiderata, occorre sfaldarlo per liberare una faccia III. Data la facile deformabilità dei cristalli di Bi, ciò richiede alcune cure particolari. Trovammo che il miglior metodo era di sfaldare successivi strati di circa 1/2 mm di spessore mediante una lama affilata. Queste sottili fette si arricciano nello sfaldarle, senza che si deformi il resto del cristallo. Compiuta la sfaldatura, la faccia presenta però irregolarità dannose per la definizione degli spettri. Esse vennero tolte mediante pulitura della faccia con carta smerigliata fina, operazione che si trovò assai vantaggioso eseguire alla temperatura dell'aria liquida, poiché altrimenti un certo strato superficiale del cristallo resta danneggiato. Ciò non



ostante, si ha un aumento di potere riflettente se in ultimo si toglie ancora un sottile strato per mezzo di acido nitrico diluito. Allora la faccia presenta un aspetto sericeo uniforme dovuto alla corrosione dell'acido e, come mostrò il controllo eseguito continuamente con i raggi X in tutte le fasi dell'operazione, dà il massimo di intensità e regolarità nella riflessione.

Il cristallo era fissato sopra un goniometro in modo tale da possedere i necessari gradi di libertà. La fenditura dello spettrografo era costituita da due blocchi di bronzo e aveva la profondità di cm 20; quando si usava un preparato radioattivo tale fenditura serviva esclusivamente da limitazione per proteggere la lastra fotografica dai raggi diretti, il preparato essendo sufficientemente sottile per servire da fenditura esso stesso. Davanti alla fenditura poteva applicarsi un tubo a raggi X del tipo Müller-Metalix (ad anticatodo di tungsteno) il quale serviva per mettere a punto l'apparecchio e per misurare le righe γ servendosi come riferimento delle radiazioni K del tungsteno.

Fu usata una distanza di 65 cm tra preparato e lastra fotografica. L'asse di rotazione del cristallo si trovava a metà di tale distanza conformemente alla condizione di Bragg.

Furono impiegate lastre Lumière «Opta» e uno schermo di rinforzo, a tungstato di calcio, del tipo «Ampli». Le lastre vennero sviluppate con glicina diluita.

Le sorgenti radioattive consistevano in tubetti capillari di vetro, della lunghezza di 15 mm e del diametro interno di $0,2 \div 0,3$ mm, riempiti di emanazione di radio, appositamente preparati dal prof. G.C. Trabacchi dell'Istituto Fisico della Sanità Pubblica. Senza i mezzi di cui dispone questo Istituto e senza la continua e volenterosa collaborazione del prof. Trabacchi questa ricerca non sarebbe stata possibile, e perciò desideriamo esprimergli anche qui la nostra gratitudine.

L'intensità delle sorgenti disponibili variava tra 100 e 150 millicurie. La lastra era esposta per sei a otto giorni, in modo che praticamente tutta la radiazione era utilizzata. Durante le pose il cristallo non veniva ruotato, perché, date le sue dimensioni, si otteneva in una posizione sola un intervallo spettrale abbastanza grande. Dopo la posa si ruotava il cristallo portandolo nelle posizioni di riflessione delle righe K del W, nel primo e nel secondo ordine, e si registravano queste righe sulla lastra per riferimento (con circa tre minuti di posa, 5 mA, e 110 kV).

Fu dapprima studiata la regione delle righe γ molli (righe K di fluorescenza degli elementi 82 e 83), poi le regioni di più alta frequenza, fino a 20 U. X. Le righe sono molto sottili, in modo che il potere risolutivo appare almeno uguale a quello raggiunto da Frilley, sebbene nel suo caso la distanza sorgente-lastra fosse quasi tripla. Ciò mostra la perfezione notevolmente maggiore del cristallo di bismuto (sebbene non usato in forma di lamina sottile) in confronto a quello di salgemma. Nella figura che precede diamo una riproduzione di uno spettrogramma contenente le righe del RaC di 20 e 35 U. X. Osserviamo che per la particolare disposizione degli atomi nel reticolo cristallino del bismuto, dalla faccia III vengono riflessi con grande intensità gli ordini pari, e perciò tale reticolo funziona in pratica come se esso avesse una costante metà di quella vera, che è di $3,94 \text{ \AA}$. Tutte le righe γ osservate appartengono infatti al secondo ordine.

Le più alte frequenze osservate, corrispondenti a 16 e 20 U. X., sono anche le più alte raggiunte dai precedenti ricercatori. Tuttavia, a Frilley sono occorse sorgenti assai più forti (700 mc) ed è probabile che se potremo disporre di una sorgente di questa intensità riusciremo a superare il limite attuale. Anche se questo non sarà possibile, resta molto lavoro da compiere. Si tratta di passare ad una fase quantitativa, eseguendo misure precise di lunghezze d'onda, che ancora scarseggiano, e magari misure di intensità, sostituendo alla lastra fotografica una camera di ionizzazione o un contatore di Geiger-Müller.

Ci è grato ringraziare il Consiglio Nazionale delle Ricerche per il largo aiuto concessoci nello svolgimento di questo lavoro.

79.

LE ULTIME PARTICELLE COSTITUTIVE DELLA
MATERIA

«Atti Soc. It. Progr. Sci.», 22^a Riunione, Bari 1933-XI vol. 2, 7-14; «Scientia», 55, 21-28 (1934-XII).

Forse la più essenziale delle differenze tra gli oggetti del mondo macroscopico, cioè gli oggetti comuni e gli oggetti del microscopico mondo degli atomi è la seguente:

Nel mondo macroscopico non si trovano mai due oggetti eguali. Consideriamo per esempio due pezzi di ferro: noi potremo ridurli ad avere lo stesso peso e la stessa forma esteriore; potremo anche cercare di rendere il più possibile eguale la grana della loro struttura microcristallina, lo stato di tempera, il contenuto delle varie impurità e così di seguito. Evidentemente però mai potremo sperare che i due pezzi di ferro siano ridotti ad essere completamente eguali, e la ragione di questa impossibilità è da ricercarsi nella estrema complessità degli oggetti in esame, costituiti da aggregati di miliardi di miliardi di atomi e di molecole: basta che uno di questi atomi in uno dei due pezzi di ferro sia spostato rispetto all'atomo corrispondente dell'altro pezzo, perché i due oggetti non possano più chiamarsi identici. In questo senso dunque la non esistenza di corpi identici nel mondo macroscopico può interpretarsi come un indizio di una struttura molto complessa.

La situazione diventa da questo punto di vista assai diversa se, dalla considerazione degli oggetti comuni, passiamo a quella degli atomi e delle molecole o, più ancora, dei loro costituenti, i nuclei e gli elettroni. Nel mondo atomico infatti si incontrano frequentemente oggetti eguali tra di loro; così per esempio, può affermarsi che due qualsiasi elettroni, o anche due qualsiasi atomi della stessa specie sono eguali tra di loro. Naturalmente, si dirà, l'identità assoluta di due oggetti qualsiasi è impossibile a constatarsi: essa può controllarsi soltanto entro certi limiti di approssimazione, dipendenti dalle nostre possibilità di osservazione. E se pur questi limiti, col progredire dei mezzi tecnici, potranno ridursi sempre più piccoli, non si può certo mai pensare che essi scendano fino a zero. Tutto ciò, naturalmente, è vero, e così anche la affermazione che per esempio due elettroni qualsiasi sono eguali tra di loro deve necessariamente intendersi in senso relativo alle nostre attuali possibilità di osservazione. E tuttavia queste, per il caso specifico della constatazione della identità tra due elettroni, sono estremamente accurate. Senza entrare qui in dettagli, che ci porterebbero troppo lontano, mi limiterò ad osservare che la grande precisione con cui può constatarsi l'identità di due elettroni dipende dalla possibilità di osservare gli effetti di una eventuale differenza accumulati per un tempo molto lungo. Così per esempio se tra

due elettroni contenuti nello stesso atomo vi fosse una differenza sia pure assai lieve, l'effetto di questa sarebbe pure lieve, se considerato durante un breve periodo di tempo della vita dell'atomo, ma alla lunga finirebbe per alterare in modo essenziale la struttura e le proprietà esterne dell'atomo. Possiamo pertanto affermare l'identità di due elettroni, se non in senso assoluto, per lo meno entro limiti di precisione straordinariamente piccoli.

Il fatto che nel mondo atomico si incontrino frequentemente oggetti eguali ci incoraggia a pensare che la struttura dei corpuscoli atomici non sia estremamente complessa, e che, una volta che si sia riusciti ad analizzare la natura dei corpuscoli atomici, nuclei ed elettroni, non ci si trovi semplicemente ad avere spostato il problema della struttura della materia un gradino più in basso verso elementi più minuti, ma si sia, per così dire, raggiunto un pianerottolo che, se pur non rappresenti la base ultima su cui è costruito l'edificio materiale, e che forse non è raggiungibile dalla intelligenza umana, possa per lo meno considerarsi sufficiente per un tempo molto lungo. Naturalmente tutto questo non è che una semplice supposizione, se pure esistono ragioni serie per farla considerare attendibile.

Oggi che la struttura dell'atomo è conosciuta con notevole sicurezza sappiamo che ogni atomo è fatto da un nucleo e da un numero maggiore o minore di elettroni e possiamo contare quanti sono i tipi di particelle differenti dai cui aggregati sono costituiti tutti i corpi. Si tratta in tutto di poche centinaia di corpuscoli diversi, ciò che, come sopra si diceva, sembrava indicare che non si sia lontani da una analisi completa degli elementi strutturali della materia. Forse i più importanti tra questi diversi tipi di corpuscoli sono gli elettroni, i quali sono presenti in tutti gli atomi; essi sono anche quelli che sono conosciuti da più lungo tempo, essendo stato possibile produrli e studiarli isolatamente nella scarica elettrica nei gas rarefatti; i così detti raggi catodici non sono infatti che una proiezione di elettroni liberi con velocità assai elevata e, come tutti sanno, dallo studio delle proprietà di questi si può determinare la carica e la massa dell'elettrone.

Si ritiene generalmente che l'elettrone sia un vero e proprio corpuscolo elementare, e cioè che esso non sia ulteriormente analizzabile in elementi più semplici; e certamente non si è mai avuta fino ad oggi alcuna indicazione che possa far supporre una struttura complessa di esso. Per contro vi sono delle buone ragioni per ritenere che i nuclei positivi degli atomi non siano corpuscoli semplici ma aggregati, in qualche caso abbastanza numerosi, di elementi più semplici.

Ciò è già indicato in qualche modo dal numero relativamente grande di possibili nuclei, che indica di per sé una struttura di una certa complicazione. Ma un argomento assai più diretto per dimostrare la complessità dei nuclei ci è dato dalle disintegrazioni nucleari, sia quelle spontanee che si osservano nelle sostanze radioattive, sia quelle artificiali prodotte bombardando un nucleo con particelle alfa o con protoni velocissimi. In tutti questi casi assistiamo a uno spezzamento o a un riassetto della compagine nucleare; un nucleo può emettere dei corpuscoli oppure assorbirne trasformandosi così in un altro nucleo di specie differente. Oggi che la struttura dell'atomo è sostanzialmente conosciuta, il problema di analizzare e comprendere le strut-

ture dei nuclei è venuto ad essere il problema più centrale e profondo degli studi di fisica.

Tra tutti i nuclei certamente il più semplice è quello dell'idrogeno o protone; esso è il nucleo che ha la massa più piccola (circa una unità di peso atomico) e la carica elettrica più piccola (eguale, salvo il segno, alla carica elettronica). Il protone, al pari dell'elettrone, si considera generalmente come una particella elementare, non costituita da elementi ulteriori; semplice o no, esso è certo uno degli elementi fondamentali della struttura nucleare.

Fino a un paio di anni fa, l'elettrone e il protone erano gli unici corpuscoli semplici conosciuti, e si riteneva che tutti i nuclei altro non fossero che aggregati di protoni e di elettroni, in numero tale che il nucleo risultante venisse ad avere il giusto valore per la carica elettrica e il peso atomico. Oggi le possibilità per costruire una teoria dei nuclei si sono assai notevolmente arricchite con la scoperta sperimentale di due nuove particelle elementari o, per lo meno, semplicissime: il neutrone e l'elettrone positivo o positrone.

Di queste la prima ad essere scoperta è stato il neutrone. Per primo Bothe, nel 1931, osservava che il Berillio, bombardato con delle particelle alfa, emetteva una radiazione di potere penetrante notevolmente superiore a quello di tutte le radiazioni gamma allora conosciute; poco dopo F. Joliot e sua moglie Irene Curie, figlia della celebre scopritrice del Radio, osservarono che le radiazioni emesse dal Berillio nelle condizioni accennate avevano la proprietà di proiettare dei protoni fuori dalla paraffina o da altre sostanze contenenti idrogeno. Questa proprietà dimostrava che la radiazione del Berillio certo non era costituita da soli raggi gamma, poiché questi non possono trasmettere che un impulso lievissimo a corpuscoli relativamente pesanti come i protoni. Al principio del 1932 Chadwick, riprendendo le esperienze dei Joliot, poté dimostrare che la radiazione del Berillio era capace anche di trasmettere un impulso a nuclei più pesanti del protone e, interpretando questi risultati, arrivò alla conclusione che la radiazione doveva essere costituita da un nuovo tipo di particelle, la cui esistenza era stata spesse volte sospettata ma mai dimostrata, e che egli chiamò neutroni. Essi sono elettricamente neutri, ed hanno massa assai prossima a quella del protone, cioè di circa una unità di peso atomico. Il forte potere penetrante dei neutroni, che sono capaci di traversare uno spessore di piombo di parecchi centimetri, si spiega facilmente col fatto che essi sono elettricamente neutri; per questa ragione infatti, quando i neutroni attraversano la materia, essi non risentono alcun effetto dei campi elettrici dovuti agli elettroni del corpo attraversato, che avrebbero una azione frenante su di essi, ma possono soltanto interagire con un nucleo, quando per caso vengano a passare a una distanza straordinariamente piccola da esso. Dall'essere questi corpuscoli elettricamente neutri, resta giustificata anche la loro efficacia come agenti per produrre disintegrazioni artificiali di nuclei. Se infatti si vuole produrre una disintegrazione nucleare, lanciando contro al nucleo un corpuscolo carico di elettricità positiva, quale un protone o una particella alfa, il campo elettrico del nucleo urtato respinge la particella urtante, ostacolando il suo avvicinarsi; mentre un neutrone, non avendo carica elettrica, non viene respinto e può giungere indisturbato fino al nucleo.

La scoperta dell'altra particella elementare a cui abbiamo accennato, il positrone o elettrone positivo, fu annunciata per la prima volta da Anderson circa un anno fa; dopo pochi mesi la scoperta fu confermata e dimostrata in modo assai più completo da Blackett e Occhialini. Questi fisici, osservando in una camera di Wilson le disintegrazioni della materia prodotte dall'urto dei corpuscoli della radiazione cosmica, osservarono in alcuni casi delle vere e proprie esplosioni in cui un nucleo veniva spezzato in una ventina di corpuscoli proiettati da esso come le pallottole di uno shrapnell. Deflettendo questi proiettili in un campo magnetico, essi poterono constatare che, mentre alcuni di essi venivano incurvati in un verso tale da indicare che si trattava di elettroni negativi, le traiettorie di altri venivano piegate in verso opposto indicando trattarsi di corpuscoli con carica elettrica positiva. Dalla densità della ionizzazione prodotta da questi corpuscoli, e con altre considerazioni che non è qui il caso di esporre, si poté anche riconoscere che la loro massa doveva essere dell'ordine di grandezza della massa dell'elettrone. Si trattava dunque di un vero e proprio elettrone positivo. Dopo la scoperta del positrone la sua presenza fu riscontrata anche in fenomeni indipendenti dalla radiazione penetrante. Importante in particolare fu la scoperta, che irradiando atomi, specialmente di elevato peso atomico, con delle radiazioni gamma assai dure, ha luogo una produzione di elettroni positivi o meglio, almeno nella maggior parte dei casi, di una coppia costituita da un normale elettrone negativo e da uno positivo. Vedremo tra un momento la notevole portata teorica di questo fatto.

La scoperta del neutrone permette, secondo Heisenberg e E. Majorana, di costruire uno schema generale della struttura dei nuclei, esente da molte delle obiezioni che si potevano elevare contro il modello primitivo secondo cui i nuclei dovevano pensarsi costituiti da soli protoni ed elettroni. Invero, data la piccolissima massa di questi ultimi corpuscoli, un elettrone, costretto entro una orbita con dimensioni dell'ordine di grandezza di un nucleo, dovrebbe acquistare delle energie cinetiche enormi, che dovrebbero essere fortemente sensibili nel difetto di massa dell'atomo; a questa difficoltà di carattere quantitativo se ne aggiungono altre di carattere più qualitativo, ma che non è possibile illustrare completamente date le limitazioni di spazio imposte a questo discorso. Vorrei qui solamente accennare che il comportamento statistico del nucleo dell'azoto, messo per la prima volta in evidenza dalle belle osservazioni di Rasetti sopra l'effetto Raman dell'azoto allo stato gassoso, sembra incompatibile con l'ammettere che esso sia costituito da un numero dispari di particelle elementari (14 protoni e 7 elettroni secondo il vecchio schema); incompatibilità di questo genere, osservate per la prima volta nell'azoto, sono state in seguito incontrate in numerosi altri esempi, tanto da far perdere ogni credito allo schema di struttura per protoni ed elettroni.

Secondo le teorie di Heisenberg e di Majorana invece, come elementi fondamentali della struttura nucleare si debbono considerare protoni e neutroni. Potrebbero poi forse questi ultimi essere pensati a loro volta costituiti dalla unione di un protone con un elettrone, ciò che probabilmente è necessario per spiegare la possibilità di una disintegrazione con emissione di raggi β ,

si tratterebbe in ogni caso di una aggregazione fatta secondo leggi diverse da quelle della ordinaria meccanica quantistica: come la meccanica ordinaria perde la sua validità per descrivere il comportamento degli elettroni nel cambiamento di scala da quella ordinaria a quella atomica, così il nuovo cambiamento di scala dai fenomeni atomici a quelli nucleari renderebbe necessario un nuovo cambiamento, i cui particolari naturalmente ci sono per ora sconosciuti; sembra invece che la ordinaria meccanica quantistica sia sufficiente per descrivere, anche nell'interno del nucleo, il comportamento di corpuscoli relativamente pesanti, quali i protoni e i neutroni. Questi infatti, per la loro considerevole massa, hanno, anche nelle orbite nucleari, delle velocità abbastanza piccole a confronto di quella della luce, per modo che le correzioni relativistiche al loro movimento restano sempre di importanza secondaria. Se dunque veramente si potrà dimostrare che gli elettroni nucleari, la cui esistenza si deve certo ammettere se si vuol spiegare l'emissione delle particelle β , non esistono tuttavia allo stato libero, ma sono per esempio intimamente associati a dei protoni in modo da formare dei neutroni, resterà aperta una possibilità relativamente agevole di costruire, almeno fino ad un punto abbastanza avanzato, una teoria del nucleo, in quanto sarà possibile, almeno fino a che non si vogliano studiare quei fenomeni nei quali viene intaccata la struttura neutronica, servirsi dei procedimenti e dello schema generale interpretativo della meccanica quantistica. Naturalmente, una volta che si fosse a questo punto, anche a prescindere dalle difficoltà matematiche, resterebbe sempre il problema essenziale di conoscere le leggi delle forze agenti tra i corpuscoli costitutivi del nucleo. Resterebbe poi in un secondo tempo da chiarire la struttura del neutrone, per la quale, come si diceva, non dovrebbe verosimilmente essere più applicabile lo schema della meccanica quantistica; si ha innanzi in proposito, nello spettro continuo dei raggi β , qualche indizio, che secondo Bohr indurrebbe a pensare che in queste nuove leggi sconosciute non sia forse più valido nemmeno il principio della conservazione dell'energia; quando almeno non si voglia ammettere con Pauli l'esistenza del così detto « neutrino » e cioè di una ipotetica particella elettricamente neutra ed avente massa dell'ordine di grandezza della massa elettronica. Questa, per il suo enorme potere penetrante, sfuggirebbe praticamente a ogni attuale mezzo di osservazione, e la sua energia cinetica servirebbe a ristabilire la bilancia energetica nelle disintegrazioni β . Certamente su tutte queste questioni sopra la struttura nucleare porterà molta luce l'accumularsi delle nostre conoscenze sopra le varie possibilità di disintegrazione dei nuclei; e dà ragione a bene sperare la rapidità veramente impreveduta con cui si sono succeduti i progressi sperimentali in questo campo negli ultimi due anni.

Ci resta ancora da aggiungere poche parole sopra la importanza teorica della scoperta dell'elettrone positivo. Nei tentativi di costruire una meccanica quantistica per l'elettrone, che fosse compatibile con il principio di relatività, tentativi culminati con i lavori di Dirac, si era sempre incontrata la difficoltà dell'apparire, accanto agli stati normali che descrivono il comportamento dell'elettrone, di altri stati, senza un'apparente corrispondenza fisica, in cui l'elettrone avrebbe avuta una energia cinetica negativa. Dirac propose allora di ammettere che tutti questi stati anomali fossero occupati;

si verrebbe così ad avere un riempimento uniforme di tutto lo spazio che, appunto per la sua uniformità non sarebbe osservabile; potrebbe invece osservarsi solamente una lacuna in questa distribuzione uniforme, e cioè la mancanza di un elettrone da uno degli stati di energia negativa. Dirac dimostrò che una di queste lacune si comporterebbe a tutti gli effetti come un normale corpuscolo, dotato di carica elettrica positiva, e propose originariamente l'ipotesi che i protoni dovessero identificarsi con queste lacune. L'ipotesi originaria di Dirac si mostrò insostenibile, perché incapace di spiegare la grande differenza di massa tra l'elettrone e il protone, e siccome l'esperienza non aveva allora ancora dimostrata l'esistenza di un corpuscolo che avesse le proprietà delle lacune di Dirac, si pensò che esse effettivamente non dovessero avere nessun corrispondente reale. La scoperta dell'elettrone positivo ha sostanzialmente modificata questa situazione: il nuovo corpuscolo ha infatti, almeno per quanto ne sappiamo fino ad oggi, esattamente tutte quelle proprietà che la teoria di Dirac prevede per le lacune; è naturale dunque identificare le lacune con l'elettrone positivo. Se questa veduta è corretta, deve essere possibile, estraendo un elettrone da uno stato di energia negativa e portandolo in uno di energia positiva, dar luogo alla formazione simultanea di una lacuna, e cioè di un elettrone positivo e di un normale elettrone negativo, a sole spese dell'energia necessaria per lo spostamento dell'elettrone. Sembra che un fenomeno di questo genere abbia veramente luogo nella formazione di coppie di un elettrone e di un positrone prodotta dall'azione dei raggi gamma duri. Se sarà dimostrato che così è effettivamente gli elettroni positivi e negativi che così si formano potranno a buon diritto chiamarsi, secondo la proposta di Madame Curie, elettroni di materializzazione, rappresentando la trasformazione completa di energia raggiante in corpuscoli materiali.

80 a.

TENTATIVO DI UNA TEORIA DEI RAGGI β (*)«Nuovo Cimento», *II*, 1-19 (1934).

SUNTO. — Si propone una teoria quantitativa dell'emissione dei raggi β in cui si ammette l'esistenza del « neutrino » e si tratta l'emissione degli elettroni e dei neutrini da un nucleo all'atto della disintegrazione β con un procedimento simile a quello seguito nella teoria della irradiazione per descrivere l'emissione di un quanto di luce da un atomo eccitato. Vengono dedotte delle formule per la vita media e per la forma dello spettro continuo dei raggi β , e le si confrontano coi dati sperimentali.

IPOTESI FONDAMENTALI DELLA TEORIA.

§ 1. Nel tentativo di costruire una teoria degli elettroni nucleari e della emissione dei raggi β , si incontrano, come è noto, due difficoltà principali. La prima dipende dal fatto che i raggi β primari vengono emessi dai nuclei con una distribuzione continua di velocità. Se non si vuole abbandonare il principio della conservazione dell'energia, si deve ammettere perciò che una frazione dell'energia che si libera nel processo di disintegrazione β sfugga alle nostre attuali possibilità di osservazione. Secondo la proposta di Pauli si può per esempio ammettere l'esistenza di una nuova particella, il così detto « neutrino », avente carica elettrica nulla e massa dell'ordine di grandezza di quella dell'elettrone o minore. Si ammette poi che in ogni processo β vengano emessi simultaneamente un elettrone, che si osserva come raggio β , e un neutrino che sfugge all'osservazione portando seco una parte dell'energia. Nella presente teoria ci baseremo sopra l'ipotesi del neutrino.

Una seconda difficoltà per la teoria degli elettroni nucleari, dipende dal fatto che le attuali teorie relativistiche delle particelle leggere (elettroni o neutrini) non danno una soddisfacente spiegazione della possibilità che tali particelle vengano legate in orbite di dimensioni nucleari.

Sembra per conseguenza più appropriato ammettere con Heisenberg^(*) che tutti i nuclei consistano soltanto di particelle pesanti, protoni e neutroni. Per comprendere tuttavia la possibilità dell'emissione dei raggi β , noi tenteremo di costruire una teoria dell'emissione delle particelle leggere da un nucleo in analogia alla teoria dell'emissione di un quanto di luce da un atomo eccitato nell'ordinario processo della irradiazione. Nella teoria dell'irradiazione, il numero totale dei quanti di luce non è costante; i quanti vengono

(*) Cfr. la nota preliminare in «La Ricerca Scientifica», 4 (2), 491 (1933).

(1) W. HEISENBERG, «ZS. für Phys.», 77, 1 (1932); E. MAJORANA, «ZS. für Phys.», 82, 137 (1933).

creati all'atto della loro emissione da un atomo eccitato, e spariscono invece quando sono assorbiti. In analogia a ciò cercheremo di fondare la teoria dei raggi β sopra le seguenti ipotesi:

a) Il numero totale degli elettroni e dei neutrini non è necessariamente costante. Elettroni (o neutrini) possono essere creati o distrutti. Questa possibilità non ha per altro alcuna analogia con la possibilità della creazione o della distruzione di una coppia elettrone-positrone; se infatti si interpreta un positrone come un « buco » di Dirac, si può considerare semplicemente quest'ultimo processo come un salto quantico di un elettrone da uno stato di energia negativa a uno di energia positiva, con conservazione del numero totale (infinitamente grande) degli elettroni.

b) Le particelle pesanti, neutrone e protone, possono considerarsi, secondo le vedute di Heisenberg, come due diversi stati quantici interni della particella pesante. Formuleremo questo con la introduzione di una coordinata interna ρ della particella pesante, che sia suscettibile di assumere soltanto due valori: $\rho = +1$, se la particella è un neutrone; $\rho = -1$, se la particella è un protone.

c) La funzione Hamiltoniana del sistema complessivo, costituito da particelle pesanti e leggere, deve scegliersi in modo che ogni transizione da neutrone a protone sia accompagnata dalla creazione di un elettrone e di un neutrino; e che il processo opposto, trasformazione di un protone in un neutrone, sia accompagnato dalla sparizione di un elettrone e di un neutrino. Si noti che con ciò resta assicurata la conservazione della carica elettrica.

GLI OPERATORI DELLA TEORIA.

§ 2. Un formalismo matematico che permette di costruire una teoria in accordo con i tre punti precedenti può costruirsi nel modo più facile per mezzo del metodo ⁽²⁾ di Dirac-Jordan-Klein detto della « seconda quantizzazione ». Noi considereremo dunque le ampiezze di probabilità ψ e φ degli elettroni e dei neutrini nello spazio ordinario, e le loro complesse coniugate ψ^* e φ^* come degli operatori; mentre per la descrizione delle particelle pesanti useremo la consueta rappresentazione nello spazio delle configurazioni, nella quale naturalmente anche ρ dovrà computarsi tra le coordinate.

Introduciamo dapprima due operatori Q e Q^* che operano sopra le funzioni della variabile ρ come le sostituzioni lineari

$$(1) \quad Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad Q^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si riconosce immediatamente che Q determina le transizioni da protone a neutrone, e Q^* le transizioni opposte da neutrone a protone.

Il significato delle ampiezze di probabilità ψ e φ interpretate come operatori è, come si sa, il seguente. Sia

$$\psi_1 \psi_2 \dots \psi_r \dots$$

(2) Cfr. per esempio P. JORDAN e O. KLEIN, « ZS. für Phys. », 45, 751 (1927); W. HEISENBERG, « Ann. d. Phys. », 10, 888 (1931).

un sistema di stati quantici individuali degli elettroni. Poniamo poi

$$(2) \quad \psi = \sum_s \psi_s a_s \quad ; \quad \psi^* = \sum_s \psi_s^* a_s^*.$$

Le ampiezze a_s e le grandezze complesse coniugate a_s^* sono operatori che agiscono sulle funzioni dei numeri di occupazione $N_1, N_2, \dots, N_s, \dots$ degli stati quantici individuali. Se vale il principio di Pauli, ciascuna delle N_s può prendere soltanto uno dei valori, 0, 1; e gli operatori a_s ed a_s^* sono definiti al modo seguente:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_s^* \Psi(N_1, N_2, \dots, N_s, \dots) \\ \quad = (-1)^{N_1+N_2+\dots+N_s-1} (1-N_s) \Psi(N_1, N_2, \dots, 1-N_s, \dots) \\ a_s \Psi(N_1, N_2, \dots, N_s, \dots) \\ \quad = (-1)^{N_1+N_2+\dots+N_s-1} N_s \Psi(N_1, N_2, \dots, 1-N_s, \dots). \end{array} \right.$$

L'operatore a_s^* determina la creazione, mentre l'operatore a_s determina la scomparsa di un elettrone nello stato quantico s .

Corrispondentemente alle (2) porremo per i neutrini:

$$(4) \quad \varphi = \sum \varphi_\sigma b_\sigma \quad ; \quad \varphi^* = \sum \varphi_\sigma^* b_\sigma^*.$$

Gli operatori complessi coniugati b_σ e b_σ^* operano sulle funzioni dei numeri di occupazione $M_1, M_2, \dots, M_\sigma, \dots$ degli stati quantici individuali $\varphi_1, \dots, \varphi_2, \dots, \varphi_\sigma, \dots$ dei neutrini. Ammettendo che anche per questi corpuscoli valga il principio di Pauli, i numeri M_σ possono prendere soltanto i due valori 0, 1; e si ha

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_\sigma^* \Phi(M_1, M_2, M_\sigma, \dots) \\ \quad = (-1)^{M_1+M_2+\dots+M_\sigma-1} (1-M_\sigma) \Phi(M_1, M_2, \dots, 1-M_\sigma, \dots) \\ b_\sigma \Phi(M_1, M_2, M_\sigma, \dots) \\ \quad = (-1)^{M_1+M_2+\dots+M_\sigma-1} M_\sigma \Phi(M_1, M_2, \dots, 1-M_\sigma, \dots). \end{array} \right.$$

Gli operatori b_σ e b_σ^* determinano rispettivamente la sparizione e la creazione di un neutrino nello stato σ .

LA FUNZIONE HAMILTONIANA.

§ 3. L'energia del sistema complessivo costituito dalle particelle pesanti e leggere, è la somma dell'energia H_{pes} delle particelle pesanti + l'energia H_{leg} delle particelle leggere + l'energia di interazione \mathcal{K} tra le particelle leggere e quelle pesanti.

Limitandoci per semplicità a considerare un solo corpuscolo pesante, scriveremo il primo termine nella forma

$$(6) \quad H_{\text{pes}} = \frac{1+\rho}{2} \mathcal{O}\mathcal{U} + \frac{1-\rho}{2} \mathcal{S}$$

in cui \mathcal{N} e \mathcal{P} sono gli operatori che rappresentano l'energia del neutrone e del protone. Si osservi infatti che per $\rho = +1$ (neutrone) la (6) si riduce a \mathcal{N} ; mentre per $\rho = -1$ (protone) essa si riduce a \mathcal{P} .

Per scrivere l'energia H_{leg} nel modo più semplice, prenderemo per stati quantici ψ_s e φ_σ degli elettroni e dei neutrini degli stati stazionari. Per gli elettroni prenderemo le autofunzioni nel campo coulombiano del nucleo (opportunitamente schermato per tener conto dell'azione degli elettroni atomici); per i neutrini potremo prendere semplicemente delle onde piane di De Broglie, poiché eventuali forze agenti sui neutrini sono certamente lievissime. Siano $H_1, H_2, \dots, H_s, \dots$ e $K_1, K_2, \dots, K_\sigma, \dots$ le energie degli stati stazionari degli elettroni e dei neutrini; avremo allora

$$(7) \quad H_{leg} = \sum_s H_s N_s + \sum_\sigma K_\sigma M_\sigma.$$

Resta ancora da scrivere la energia di interazione. Questa consiste in primo luogo dell'energia coulombiana tra protone ed elettroni; nel caso di nuclei pesanti tuttavia, la attrazione esercitata da un solo protone non ha molta importanza ⁽³⁾ e in ogni caso non contribuisce in alcun modo al processo della disintegrazione β . Per non complicare inutilmente le cose non terremo dunque conto di questo termine. Dobbiamo invece aggiungere alla Hamiltoniana un termine tale da soddisfare alla condizione *c*) del § 1.

Un termine che accoppia necessariamente la trasformazione di un neutrone in protone con la creazione di un elettrone e di un neutrino ha, secondo i risultati del § 2, la forma

$$(8) \quad Q^* a_s^* b_\sigma^*$$

mentre l'operatore complesso coniugato

$$(8') \quad Q a_s b_\sigma$$

accoppia tra di loro i processi inversi (trasformazione di un protone in neutrone e sparizione di un elettrone e di un neutrino).

Un termine di interazione soddisfacente alla condizione *c*) avrà dunque la forma seguente

$$(9) \quad \mathcal{H} = Q \sum_{s\sigma} c_{s\sigma} a_s b_\sigma + Q^* \sum_{s\sigma} c_{s\sigma}^* a_s^* b_\sigma^*$$

dove $c_{s\sigma}$ e $c_{s\sigma}^*$ sono grandezze che possono dipendere dalle coordinate, dai momenti, ecc... della particella pesante.

Una determinazione ulteriore di \mathcal{H} non può farsi altro che col criterio della massima semplicità; naturalmente tuttavia le possibilità di scelta della \mathcal{H} sono limitate dalla necessità che \mathcal{H} sia invariante rispetto a un cambiamento delle coordinate e che inoltre soddisfi la conservazione della quantità di moto.

Se in un primo tempo trascuriamo gli effetti relativistici e lo spin, la più semplice scelta per (9) è la seguente

$$(10) \quad \mathcal{H} = g [Q\psi(x)\varphi(x) + Q^*\psi^*(x)\varphi^*(x)]$$

(3) La attrazione coulombiana dovuta ai numerosi altri protoni deve naturalmente tenersi in conto come un campo statico.

in cui g è una costante avente le dimensioni $L^5 MT^{-2}$; x rappresenta le coordinate della particella pesante; $\psi, \varphi, \psi^*, \varphi^*$ sono date da (2) e (4) e debbono prendersi nella posizione x, y, z occupata dalla particella pesante.

La (10) non rappresenta in alcun modo l'unica scelta possibile di \mathcal{H} ; altrettanto ammissibile sarebbe qualsiasi espressione scalare come

$$L(\rho) \psi(x) M(\rho) \varphi(x) N(\rho) + \text{compl. coniug.}$$

in cui $L(\rho), M(\rho), N(\rho)$ rappresentano opportune funzioni del momento della particella pesante. Siccome per altro le conseguenze della (10) si sono fino ad ora mostrate in accordo con l'esperienza, sembra inutile ricorrere per il momento ad espressioni più complicate.

È essenziale invece generalizzare la (10) in modo da poter trattare relativisticamente per lo meno le particelle leggere. Naturalmente, anche in questa generalizzazione, non sembra possibile procedere senza una certa arbitrarietà. La soluzione più naturale del problema sembra tuttavia essere la seguente: Relativisticamente si hanno, in luogo di ψ e di φ , due quaterne $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ di funzioni di Dirac. Consideriamo le 16 combinazioni bilineari indipendenti di $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Quando il sistema di riferimento subisce una trasformazione di Lorentz, le 16 combinazioni bilineari subiscono una sostituzione lineare, che dà una rappresentazione del gruppo di Lorentz. In particolare le quattro combinazioni bilineari

$$(11) \quad \begin{cases} A_0 = -\psi_1 \varphi_2 + \psi_2 \varphi_1 + \psi_3 \varphi_4 - \psi_4 \varphi_3 \\ A_1 = \psi_1 \varphi_3 - \psi_2 \varphi_4 + \psi_3 \varphi_1 + \psi_4 \varphi_2 \\ A_2 = i\psi_1 \varphi_3 + i\psi_2 \varphi_4 - i\psi_3 \varphi_1 - i\psi_4 \varphi_2 \\ A_3 = -\psi_1 \varphi_4 - \psi_2 \varphi_3 + \psi_3 \varphi_2 + \psi_4 \varphi_1 \end{cases}$$

si trasformano come le componenti di un quadrivettore, e cioè come le componenti del quadripotenziale elettromagnetico. È quindi naturale introdurre nella Hamiltoniana della particella pesante le quattro grandezze

$$g(QA_i + Q^*A_i^*)$$

in una situazione corrispondente a quella delle componenti del quadripotenziale. Incontriamo qui una difficoltà dipendente dal fatto che non è conosciuta una equazione d'onda relativistica per le particelle pesanti. Tuttavia, nel caso in cui la velocità della particella pesante sia piccola rispetto a c , si potrà limitarsi al termine che corrisponde ad eV (V potenziale scalare) e scrivere

$$(12) \quad \mathcal{H} = g [Q (-\psi_1 \varphi_2 + \psi_2 \varphi_1 + \psi_3 \varphi_4 - \psi_4 \varphi_3) + Q^* (-\psi_1^* \varphi_2^* + \psi_2^* \varphi_1^* + \psi_3^* \varphi_4^* - \psi_4^* \varphi_3^*)].$$

A questo termine debbono aggiungersene altri dell'ordine di grandezza v/c . Per il momento però noi trascureremo questi termini, dato che le velocità dei neutroni e dei protoni nei nuclei sono generalmente piccole in confronto a c (cfr. § 9).

Con la scrittura simbolica delle matrici, la (12) può scriversi

$$(13) \quad \mathcal{H} = g [Q\tilde{\psi}^* \delta\varphi + Q^*\tilde{\psi} \delta\varphi^*]$$

dove ψ e φ debbono intendersi scritte come matrici di una sola colonna, e il segno \sim trasforma una matrice nella coniugata trasposta; inoltre è

$$(14) \quad \delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Con queste notazioni si trova, dal confronto di (12) e (9),

$$(15) \quad c_{s\sigma} = g\tilde{\psi}_s^* \delta\varphi_\sigma \quad ; \quad c_{s\sigma}^* = g\tilde{\psi}_s \delta\varphi_\sigma^*$$

dove ψ_s e φ_σ rappresentano le autofunzioni normalizzate a quattro componenti degli stati s dell'elettrone e σ del neutrino, prese come funzioni della posizione x, y, z , occupata dalla particella pesante.

LA MATRICE DI PERTURBAZIONE.

§ 4. Con la Hamiltoniana che abbiamo stabilita si può svolgere una teoria della disintegrazione β in completa analogia alla teoria dell'irradiazione. In questa, la funzione di Hamilton consiste, come è noto, della somma: Energia dell'atomo + Energia del campo di radiazione + Interazione tra atomo e radiazione; quest'ultimo termine viene considerato come una perturbazione degli altri due. Analogamente prenderemo

$$(16) \quad H_{\text{pes}} + H_{\text{leg}}$$

come Hamiltoniana imperturbata. La perturbazione è rappresentata dal termine di interazione (13).

Gli stati quantici del sistema imperturbato possono numerarsi al modo seguente:

$$(17) \quad \rho, n, N_1 N_2 \dots N_s \dots M_1 M_2 \dots M_\sigma \dots$$

in cui il primo numero ρ prende uno dei valori ± 1 , e indica se la particella pesante è un neutrone o un protone. Il secondo numero n indica lo stato quantico del neutrone o del protone. Per $\rho = +1$ (neutrone) la corrispondente autofunzione sia

$$(18) \quad u_n(x)$$

mentre per $\rho = -1$ (protone) la autofunzione sia

$$(19) \quad v_m(x).$$

Gli altri numeri $N_1 N_2 \dots N_s \dots M_1 M_2 \dots M_\sigma \dots$ possono prendere solo i valori 0,1 e indicano quali stati degli elettroni e dei neutrini sono occupati.

Dall'esame della forma generale (9) dell'energia di perturbazione, si vede immediatamente che essa ha elementi di matrice diversi da zero solo per transizioni in cui o la particella pesante passa da neutrone a protone, mentre contemporaneamente si creano un elettrone e un neutrino, o viceversa.

Per mezzo di (1) (3) (5) (9) (18) (19) si trova facilmente che l'elemento di matrice corrispondente è

$$(20) \quad \mathcal{H}_{-1, m, N_1, N_2, \dots, \sigma_s, \dots}^{1, n, N_1, N_2, \dots, \sigma_s, \dots} \cdot \mathcal{M}_1, M_2, \dots, \sigma_s, \dots = \pm \int v_m^* \epsilon_{s\sigma}^* u_n d\tau$$

dove l'integrazione deve estendersi a tutto lo spazio delle configurazioni della particella pesante (ad eccezione della coordinata ρ); il segno \pm significa più precisamente

$$(-1)^{N_1 + N_2 + \dots + N_s - 1 + M_1 + M_2 + \dots + M_{\sigma - 1}}$$

e sparisce del resto dai calcoli che seguiranno. Alla transizione opposta corrisponde un elemento di matrice complesso coniugato di (20).

Tenendo conto delle (15), la (20) diviene:

$$(21) \quad \mathcal{H}_{-1, m, N_1, N_2, \dots, \sigma_s, \dots}^{1, n, \sigma_s, \sigma_s} = \pm g \int v_m^* u_n \bar{\psi}_s \delta\varphi_s^* d\tau$$

ove per brevità abbiamo ommesso di scrivere nel primo membro tutti gli indici che non subiscono una variazione.

TEORIA DELLE DISINTEGRAZIONI β .

§ 5. Una disintegrazione β consiste in un processo in cui un neutrone nucleare si trasforma in un protone, mentre contemporaneamente, col meccanismo che abbiamo descritto, vengono emessi un elettrone, che si osserva come particella β , e un neutrino. Per calcolare la probabilità di questo processo, ammetteremo che, al tempo $t = 0$, si abbia un neutrone in uno stato nucleare di autofunzione $u_n(x)$, e che inoltre lo stato elettronico s e lo stato di neutrino σ siano liberi, cioè: $N_s = M_\sigma = 0$. Per $t = 0$ dunque si potrà prendere eguale a 1 la ampiezza di probabilità dello stato $(1, n, \sigma_s, \sigma_\sigma)$. cioè

$$(22) \quad a_{1, n, \sigma_s, \sigma_\sigma} = 1$$

mentre l'ampiezza di probabilità dello stato $(-1, m, 1_s, 1_\sigma)$, in cui il neutrone si è trasformato in un protone con autofunzione $v_m(x)$ emettendo un elettrone e un neutrino negli stati s e σ è inizialmente nulla.

Applicando le consuete formule della teoria delle perturbazioni, si trova, per un tempo abbastanza corto perché (22) sia ancora approssimativamente valida,

$$(23) \quad \dot{a}_{-1, m, 1_s, 1_\sigma} = -\frac{2\pi i}{\hbar} \mathcal{H}_{-1, m, 1_s, 1_\sigma}^{1, n, \sigma_s, \sigma_\sigma} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (-W + H_s + K_\sigma) t}$$

dove con W si è indicata la differenza di energia tra lo stato del neutrone e quello del protone.

Integrando (23) otteniamo (siccome per $t = 0$, $a_{im_1, \tau_\sigma} = 0$)

$$(24) \quad a_{-im_1, \tau_\sigma} = - \mathcal{J} \mathcal{L}_{-im_1, \tau_\sigma}^{in_0, \sigma_0} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(-W+H_s+K_\sigma)t} - 1}{-W+H_s+K_\sigma}.$$

La probabilità della transizione considerata è dunque

$$(25) \quad \left| a_{-im_1, \tau_\sigma} \right|^2 = 4 \left| \mathcal{J} \mathcal{L}_{-im_1, \tau_\sigma}^{in_0, \sigma_0} \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi t}{\hbar} (-W+H_s+K_\sigma)}{(-W+H_s+K_\sigma)^2}.$$

Per calcolare la vita media dello stato neutronico u_n occorre sommare (25) rispetto a tutti gli stati non occupati degli elettroni e dei neutrini. Una notevole semplificazione di questa somma si ottiene osservando che la lunghezza d'onda di De Broglie per elettroni o neutrini aventi energie di alcuni milioni di Volt è notevolmente più grande delle dimensioni nucleari. Si può dunque, in prima approssimazione, considerare le autofunzioni ψ_s e φ_σ come costanti entro l'estensione del nucleo (21) diventa così

$$(26) \quad \mathcal{J} \mathcal{L}_{-im_1, \tau_\sigma}^{in_0, \sigma_0} = \pm g \vec{\psi}_s \delta \varphi_\sigma^* \int v_m^* u_n d\tau$$

dove qui e nel seguito ψ_s e φ_σ debbono intendersi prese nel nucleo (cfr. § 8). Da (26) si ricava:

$$(27) \quad \left| \mathcal{J} \mathcal{L}_{-im_1, \tau_\sigma}^{in_0, \sigma_0} \right|^2 = g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \vec{\psi}_s \delta \varphi_\sigma^* \varphi_\sigma^* \delta \vec{\psi}_s.$$

Gli stati σ del neutrino sono individuati dal loro impulso p_σ e dalla direzione dello spin. Se, per comodità di normalizzazione, quantizziamo entro un volume Ω , le cui dimensioni si faranno in seguito tendere all'infinito, le autofunzioni normalizzate del neutrino sono onde piane di Dirac con densità $1/\Omega$. Facili considerazioni algebriche permettono allora di effettuare in (27) la media rispetto a tutte le orientazioni di p_σ e dello spin. (In ciò sono da considerarsi solo gli stati di energia positiva; gli stati di energia negativa debbono eliminarsi con un artificio simile alla teoria dei buchi di Dirac). Si trova

$$(28) \quad \overline{\left| \mathcal{J} \mathcal{L}_{-im_1, \tau_\sigma}^{in_0, \sigma_0} \right|^2} = \frac{g^2}{4\Omega} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \left(\vec{\psi}_s \psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \vec{\psi}_s \beta \psi_s \right)$$

in cui μ è la massa di quiete del neutrino, e β è la matrice di Dirac

$$(29) \quad \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{vmatrix}.$$

Osservando che il numero degli stati di neutrino con energia positiva e momento compreso tra p_σ e $p_\sigma + dp_\sigma$ è $8\pi\Omega p_\sigma^2 dp_\sigma / \hbar^3$; che inoltre $\partial K_\sigma / \partial p_\sigma = v_\sigma$, v_σ essendo la velocità del neutrino nello stato σ ; e infine che (25) ha un massimo assai pronunziato per quel valore di p_σ per cui non si ha variazione dell'energia imperturbata, per cui cioè:

$$(30) \quad -W + H_s + K_\sigma = 0$$

si può effettuare nel modo consueto⁽⁴⁾ la somma di (25) rispetto a σ e si trova

$$(31) \quad t \cdot \frac{8 \pi^3 g^2}{\hbar^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} \left(\bar{\psi}_s \psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \bar{\psi}_s \beta \psi_s \right)$$

p_σ essendo il valore del momento del neutrino per cui vale la (30).

ELEMENTI DETERMINATIVI DELLA PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE.

§ 6. (31) esprime la probabilità che nel tempo t abbia luogo una disintegrazione β in cui l'elettrone viene emesso nello stato s . Come deve essere, tale probabilità risulta proporzionale al tempo (t è stato supposto piccolo in confronto alla vita media); il coefficiente di t dà la probabilità di transizione per il processo indicato; essa risulta:

$$(32) \quad P_s = \frac{8 \pi^3 g^2}{\hbar^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} \left(\bar{\psi}_s \psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \bar{\psi}_s \beta \psi_s \right).$$

Si osservi che:

a) Per gli stati liberi dei neutrini si ha sempre $K_\sigma \geq \mu c^2$. È dunque necessario, affinché la (30) possa essere soddisfatta, che sia

$$(33) \quad H_s \leq W - \mu c^2.$$

Al segno = corrisponde il limite superiore dello spettro dei raggi β .

b) Essendo poi per gli stati elettronici non occupati $H_s \geq m c^2$, si ottiene, perché la disintegrazione β sia possibile, la seguente condizione:

$$(34) \quad W \geq (m + \mu) c^2.$$

Nel nucleo si deve dunque avere uno stato neutronico occupato abbastanza elevato al di sopra di uno stato protonico libero perché l'emissione β sia possibile.

c) Secondo (32) P_s dipende dalle autofunzioni u_n e v_m della particella pesante nel nucleo, attraverso all'elemento di matrice

$$(35) \quad Q_{mn}^* = \int v_m^* u_n d\tau.$$

Questo elemento di matrice ha, nella teoria dei raggi β , una funzione analoga a quella dell'elemento di matrice del momento elettrico nella teoria dell'irradiazione. L'elemento di matrice (35) ha normalmente l'ordine di grandezza 1; accade tuttavia spesso che, per particolari simmetrie delle autofunzioni u_n e v_m , Q_{mn}^* viene ad annullarsi esattamente. In questi casi parleremo di *transizioni β proibite*. Non si deve per altro attendersi che le transizioni proibite siano veramente impossibili, poiché (32) è soltanto una formula approssimata. Ritourneremo sopra questo argomento nel § 9.

(4) Per la descrizione dei metodi che si usano per eseguire tali somme, cfr. qualsiasi articolo riassuntivo sulla teoria dell'irradiazione. Per esempio E. FERMI, «Rev. Mod. Phys.», 4, 87 (1932).

LA MASSA DEL NEUTRINO.

§ 7. La probabilità di transizione (32) determina tra l'altro la forma dello spettro continuo dei raggi β . Discuteremo qui come la forma di questo spettro dipende dalla massa di quiete del neutrino, in modo da poter determinare questa massa da un confronto con la forma sperimentale dello spettro stesso. La massa μ interviene in (32) tra l'altro nel fattore p_σ^2/v_σ . La dipendenza della forma della curva di distribuzione dell'energia da μ , è marcata specialmente in vicinanza della energia massima E_0 dei raggi β . Si riconosce facilmente che la curva di distribuzione per energie E prossime al valore massimo E_0 , si comporta, a meno di un fattore indipendente da E , come

$$(36) \quad \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} = \frac{1}{c^3} (\mu c^2 + E_0 - E) \sqrt{(E_0 - E)^2 + 2\mu c^2 (E_0 - E)}.$$

Nella fig. 1 la fine della curva di distribuzione è rappresentata per $\mu = 0$, e per un valore piccolo e uno grande di μ . La maggiore somiglianza con le

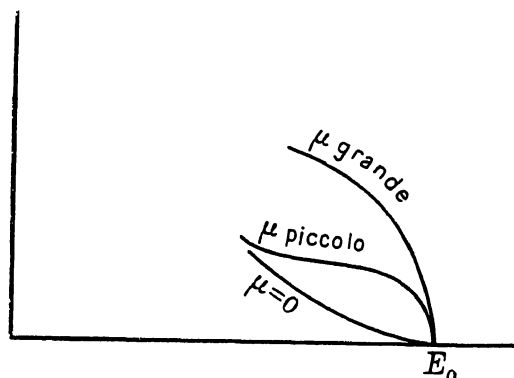


Fig. 1.

curve sperimentali si ha per la curva teorica corrispondente a $\mu = 0$. Arriviamo così a concludere che la massa del neutrino è uguale a zero, in ogni caso, piccola in confronto della massa dell'elettrone⁽⁵⁾. Nei calcoli che seguono porremo per semplicità $\mu = 0$.

Abbiamo allora, tenendo anche conto della (30),

$$(37) \quad v_\sigma = c \quad ; \quad K_\sigma = cp_\sigma \quad ; \quad p_\sigma = \frac{K_\sigma}{c} = \frac{W - H_s}{c}$$

e le disequaglianze (33) e (34) diventano:

$$(38) \quad H_s \leq W \quad ; \quad W \geq mc^2.$$

Infine la probabilità di transizione (32) prende la forma

$$(39) \quad P_s = \frac{8\pi^3 g^2}{c^3 h^4} \left| \int v_m^* u_m d\tau \right|^2 \Psi_s \psi_s (W - H_s)^2.$$

(5) In una recente notizia F. PERRIN, «C. R.», 197, 1625 (1933), giunge con argomenti qualitativi a una simile conclusione.

VITA MEDIA E FORMA DELLA CURVA DI DISTRIBUZIONE DELL'ENERGIA
PER TRANSIZIONI PERMESSE.

§ 8. Dalla (39) si può ricavare una formula che esprime quante transizioni β , in cui la particella β riceve un impulso compreso tra $mc\eta$ e $mc(\eta + d\eta)$, hanno luogo nell'unità di tempo. Per questo occorre calcolare la somma dei valori di $\tilde{\psi}_s, \psi_s$, nel nucleo, estesa a tutti gli stati (del continuo) che appartengono all'intervallo di impulso indicato. Si noti a questo proposito che le autofunzioni relativistiche in campo coulombiano per gli stati con $j = 1/2$ (${}^2S_{1/2}$ e ${}^2P_{1/2}$) diventano infinite nel centro. D'altra parte la legge di Coulomb non è valida fino al centro del nucleo, ma solo fino a una distanza da questo maggiore di R , R essendo il raggio nucleare. Ora un calcolo di orientamento dimostra che, se si fanno ipotesi plausibili sopra l'andamento del potenziale elettrico nell'interno del nucleo, il valore di $\tilde{\psi}_s, \psi_s$, nel centro del nucleo risulta assai prossimo a quello che $\tilde{\psi}_s, \psi_s$, assumerebbe, nel caso della legge di Coulomb, a distanza R dal centro. Applicando le note formule (6) per le autofunzioni relativistiche dello spettro continuo in campo Coulombiano, si trova con un calcolo un po' lungo ma privo di difficoltà,

$$(40) \quad \sum_{d\eta} \tilde{\psi}_s \psi_s = d\eta \cdot \frac{32 \pi m^3 c^3}{\hbar^3 [\Gamma(3+2S)]^2} \left(\frac{4 \pi mcR}{\hbar} \right)^{2S} \eta^{2+2S} e^{\pi\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma \left(1+S+i\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \right) \right|^2$$

dove si è posto

$$(41) \quad \gamma = Z/137 \quad ; \quad S = \sqrt{1-\gamma^2} - 1.$$

La probabilità di transizione in uno stato elettronico in cui l'impulso abbia valore appartenente all'intervallo $mc d\eta$ diventa dunque (39)

$$(42) \quad P(\eta) d\eta = d\eta \cdot g^2 \frac{256 \pi^4}{[\Gamma(3+2S)]^2} \frac{m^5 c^4}{\hbar^7} \left(\frac{4 \pi mcR}{\hbar} \right)^{2S} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \eta^{2+2S} \\ \times e^{\pi\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma \left(1+S+i\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \right) \right|^2 (\sqrt{1+\eta_0^2} - \sqrt{1+\eta^2})^2$$

dove η_0 rappresenta l'impulso massimo dei raggi β emessi, misurato in unità mc .

Per la valutazione numerica di (42) riferiamoci al valore particolare $\gamma=0,6$, che corrisponde a $Z = 82,2$ poiché i numeri atomici delle sostanze radioattive non sono lontani da questo valore. Per $\gamma = 0,6$, si ha da (41) $S = -0,2$. Si trova inoltre che, per $\eta < 10$, può porsi, con approssimazione sufficiente

$$(43) \quad \eta^{1,6} e^{0,6\pi \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma \left(0,8 + 0,6 i \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \right) \right|^2 \cong 4,5 \eta + 1,6 \eta^2.$$

La (42) diviene con ciò, ponendo in essa $R = 9,10^{-13}$,

$$(44) \quad P(\eta) d\eta = 1,75 \cdot 10^{95} g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 (\eta + 0,355 \eta^2) (\sqrt{1+\eta_0^2} - \sqrt{1+\eta^2})^2.$$

L'inversa della vita media si ottiene integrando (44) da $\eta = 0$ fino a $\eta = \eta_0$; si trova

$$(45) \quad \frac{1}{\tau} = 1,75 \cdot 10^{95} g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 F(\eta_0)$$

dove si è posto

$$(46) \quad F(\eta_0) = \frac{2}{3} \sqrt{1 + \eta_0^2} - \frac{2}{3} + \frac{\eta_0^4}{12} - \frac{\eta_0^6}{3} \\ + 0,355 \left[-\frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0^3}{12} + \frac{\eta_0^5}{30} + \frac{\sqrt{1 + \eta_0^2}}{4} \log(\eta_0 + \sqrt{1 + \eta_0^2}) \right].$$

Per piccoli valori dell'argomento, $F(\eta_0)$ si comporta come $\eta_0^6/24$; per argomenti maggiori i valori di F sono raccolti nella tabella seguente

TABELLA I.

η_0	$F(\eta_0)$	η_0	$F(\eta_0)$	η_0	$F(\eta_0)$	η_0	$F(\eta_0)$
0	$\eta_0^6/24$	2	1,2	4	29	6	185
1	0,03	3	7,5	5	80	7	380

LE TRANSIZIONI PROIBITE.

§ 9. Prima di passare al confronto della teoria con l'esperienza vogliamo ancora illustrare alcune proprietà delle transizioni β proibite.

Come già abbiamo detto, una transizione è proibita quando è nullo il corrispondente elemento di matrice (35). Se la rappresentazione del nucleo per stati quantici individuali dei protoni e dei neutroni rappresenta una buona approssimazione, l'elemento di matrice Q_{mn}^* si annulla, per ragione di simmetria, quando non sia

$$(47) \quad i = i'$$

i ed i' essendo il momento della quantità di moto, in unità $\hbar/2\pi$, dello stato neutronico u_n e dello stato protonico v_m . Nel caso in cui gli stati quantici individuali non siano una buona approssimazione, alla regola di selezione (47) corrisponde l'altra

$$(48) \quad I = I'$$

dove I e I' rappresentano il momento del nucleo prima e dopo la disintegrazione β .

Le regole di selezione (47) e (48) sono assai meno rigorose delle regole di selezione dell'ottica. Si possono avere delle eccezioni da esse specialmente coi due seguenti processi:

a) La formula (26) è stata ottenuta trascurando le variazioni di ψ , e φ , entro l'estensione del nucleo. Se invece si tiene conto di tali variazioni, si ha una possibilità di ottenere transizioni β anche quando Q_{mn}^* si annulla. Si riconosce facilmente che l'intensità di queste transizioni sta, come ordine di grandezza, a quella dei processi permessi, nel rapporto $(R/\lambda)^2$, λ essendo la lunghezza d'onda di De Broglie delle particelle leggere. Si noti che, a parità di energia di un elettrone e di un neutrino, l'energia cinetica del primo, quando si trova in vicinanza del nucleo, è, a causa dell'attrazione elettrostatica, molto maggiore, e quindi l'effetto più importante deriva dalle variazioni di ψ . Una valutazione d'ordine di grandezza dell'intensità di questi processi proibiti mostra che essi, a parità dell'energia degli elettroni emessi, debbono essere un centinaio di volte meno intensi dei processi normali.

Oltre alla intensità relativamente piccola, una caratteristica di transizioni proibite di questo tipo è da ricercarsi nella differente forma della curva di distribuzione dell'energia dei raggi β , che, per transizioni proibite, deve dare un numero di particelle con piccola energia minore che nel caso normale.

b) Una seconda possibilità che avvengano transizioni β proibite dalla regola di selezione (48) dipende dal fatto, già notato alla fine del § 3, che, quando la velocità dei neutroni e dei protoni non sia trascurabile di fronte alla velocità della luce, debbono aggiungersi al termine di interazione (12) altri termini dell'ordine v/c . Se per esempio si ammettesse anche per le particelle pesanti una equazione d'onda relativistica del tipo di Dirac, si potrebbero aggiungere a (12) termini come

$$(49) \quad gQ (\alpha_x A_1 + \alpha_y A_2 + \alpha_z A_3) + \text{complesso coniugato}$$

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ essendo le consuete matrici di Dirac per la particella pesante e A_1, A_2, A_3 le componenti spaziali del quadrivettore definito dalle (11).

Un termine del tipo (49) permette anche dei passaggi β che non soddisfano la regola di selezione (48), e la loro intensità è, rispetto a quella dei processi normali, dell'ordine di grandezza $(v/c)^2$, e cioè all'incirca 1/100. Troviamo così una seconda possibilità di transizioni proibite circa 100 volte meno intense di quelle normali.

CONFRONTO CON L'ESPERIENZA.

§ 10. La (45) stabilisce una relazione tra l'impulso massimo η_0 dei raggi β emessi da una sostanza e la sua vita media. In questa relazione interviene invero anche un elemento incognito, l'integrale

$$(50) \quad \int v_m^* u_m d\tau$$

la cui valutazione richiede la conoscenza delle autofunzioni nucleari u_m e v_m del neutrone e del protone. Nel caso delle transizioni permesse tuttavia (50) è dell'ordine di grandezza dell'unità. Ci attendiamo dunque che il prodotto

$$(51) \quad \tau F(\eta_0)$$

abbia lo stesso ordine di grandezza per tutte le transizioni permesse. Per le transizioni proibite invece la vita media sarà, come ordine di grandezza, cento

volte maggiore, e corrispondentemente sarà maggiore anche il prodotto (51). Nella tabella seguente sono raccolti i prodotti $\tau F(\eta_0)$ per tutte le sostanze che si disintegrano emettendo raggi β per le quali si hanno dati sufficientemente esatti.

TABELLA II.

Elemento	τ (in ore)	η_0	F(η_0)	$\tau F(\eta_0)$
UX ₂	0,026	5,4	115	3,0
RaB	0,64	2,04	1,34	0,9
ThB	15,3	1,37	0,176	2,7
ThC''	0,076	4,4	44	3,3
AcC''	0,115	3,6	17,6	2,0
RaC	0,47	7,07	398	190
RaE	173	3,23	10,5	1800
ThC	2,4	5,2	95	230
MsTh ₂	8,8	6,13	73	640

In questa tabella sono senz'altro riconoscibili i due gruppi che avevamo attesi; del resto una tale divisione degli elementi che emettono raggi β primari in due gruppi, era già stata osservata per via empirica da Sargent (7). I valori di η_0 sono stati presi dal lavoro citato di Sargent (per confronto si noti che è: $\eta_0 = (H\rho)_{\max}/1700$). Oltre ai dati riportati nella tabella, Sargent dà i dati per altri tre elementi, avvertendo che essi non sono altrettanto attendibili come gli altri. Essi sono: UX₁, per cui si ha $\tau = 830$; $\eta_0 = 0,76$; $F(\eta_0) = 0,0065$; $\tau F(\eta_0) = 5,4$; questo elemento sembra dunque doversi attribuire al primo gruppo. Per l'AcB si ha: $\tau = 0,87$; $\eta_0 = 1,24$; $F(\eta_0) = 0,102$; $\tau F(\eta_0) = 0,09$; si trova dunque un valore di $\tau F(\eta_0)$ circa dieci volte più piccolo di quelli del primo gruppo. Infine per il RaD si ha: $\tau = 320\ 000$; $\eta_0 = 0,38$ (assai incerto); $F(\eta_0) = 0,00011$; $\tau F(\eta_0) = 35$. Questo elemento viene quindi a essere situato circa a metà tra i due gruppi. Non mi è riuscito trovare dati sopra gli altri elementi che emettono raggi β primari, e cioè MsTh₁, UY, Ac, AcC, UZ, RaC''.

Nel complesso si può concludere da questo confronto tra teoria ed esperienza che la concordanza è certo altrettanto buona quanto si sarebbe potuto attendersi. Le divergenze osservate per gli elementi su cui si hanno dati sperimentali incerti, RaD e AcB, possono bene spiegarsi parte con la imprecisione delle misure, parte anche con oscillazioni perfettamente plausibili nel

(7) B. W. SARGENT, « Proc. Roy. Soc. », 139, 659 (1933).

valore dell'elemento di matrice (50). Deve inoltre osservarsi che il fatto che la maggior parte delle disintegrazioni β sono accompagnate da emissione di raggi γ , sta ad indicare che la maggior parte dei processi β può lasciare il protone in differenti stati di eccitazione, ciò che dà ancora un meccanismo che può determinare delle oscillazioni nel valore di $\tau F(\eta_0)$.

Dai dati della Tabella II si può ricavare una valutazione, se pure assai grossolana della costante g . Se si ammette per esempio che, quando l'elemento di matrice (50) ha valore 1, si abbia $\tau F(\eta_0) = 1 \text{ ora} = 3600 \text{ sec}$, si trova da (45):

$$g = 4 \cdot 10^{-50} \text{ cm}^3 \cdot \text{erg}.$$

valore che, naturalmente, non dà nulla più dell'ordine di grandezza.

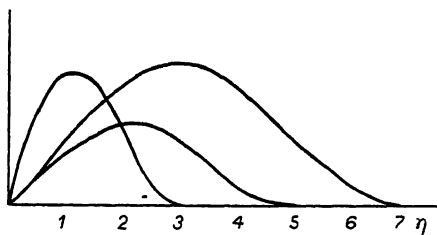


Fig. 2.

Passiamo a discutere la forma della curva di distribuzione delle velocità dei raggi β . Nel caso dei processi permessi, la curva di distribuzione, in funzione di η (cioè, a meno del fattore 1700, di $H\rho$) è rappresentata nella fig. 2, per vari valori dell'impulso massimo η_0 . Le curve sono soddisfacentemente simili a quelle sperimentali raccolte da Sargent⁽⁸⁾. Solo nel tratto di piccola energia le curve di Sargent sono un po' più basse di quelle teoriche, ciò che è meglio visibile nelle curve della fig. 3 in cui come ascisse sono prese le energie invece degli impulsi. Deve notarsi però che la parte delle curve di piccola energia è assai imperfettamente conosciuta sperimentalmente⁽⁹⁾. Inoltre, per le transizioni proibite, anche teoricamente il tratto di piccola energia deve essere più basso che non per le curve relative alle transizioni permesse, rappresentate nelle figg. 2 e 3. Di questo si deve particolarmente tener conto per

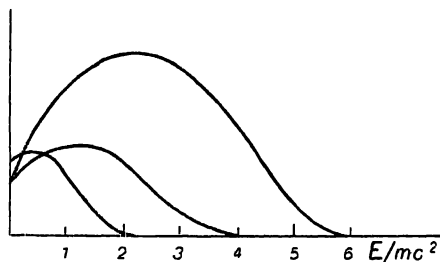


Fig. 3.

(8) B. W. SARGENT, « Proc. Camb. Phil. Soc. », 28, 538 (1932).

(9) Cfr. per esempio RUTHERFORD, ELLIS e CHADWICK, *Radiations from Radioactive Substances*, Cambridge, 1930. Ved. in particolar modo a p. 407.

il caso del RaE, che è quello meglio conosciuto dal lato sperimentale. La emissione dei raggi β di questo elemento, come risulta dal valore anormalmente grande di $\tau F(\eta_0)$ (cfr. Tabella II) è certo proibita, anzi è possibile che essa sia permessa soltanto in seconda approssimazione. Spero di potere, in una prossima comunicazione, precisare meglio l'andamento delle curve di distribuzione per transizioni proibite.

Riassumendo sembra giustificato affermare che la teoria, nella forma in cui la abbiamo qui esposta, si trova in accordo con i dati sperimentali, i quali per altro non sono sempre molto precisi. Se anche del resto, in un ulteriore confronto della teoria con l'esperienza, si dovesse arrivare a delle contraddizioni, sarebbe sempre possibile modificare la teoria senza alterarne essenzialmente i fondamenti concettuali. Si potrebbe precisamente conservare l'equazione (9) scegliendo però in modo diverso le c_{rs} . Ciò porterebbe in particolare a una diversa forma della regola di selezione (48), e a una diversa forma della curva di distribuzione dell'energia.

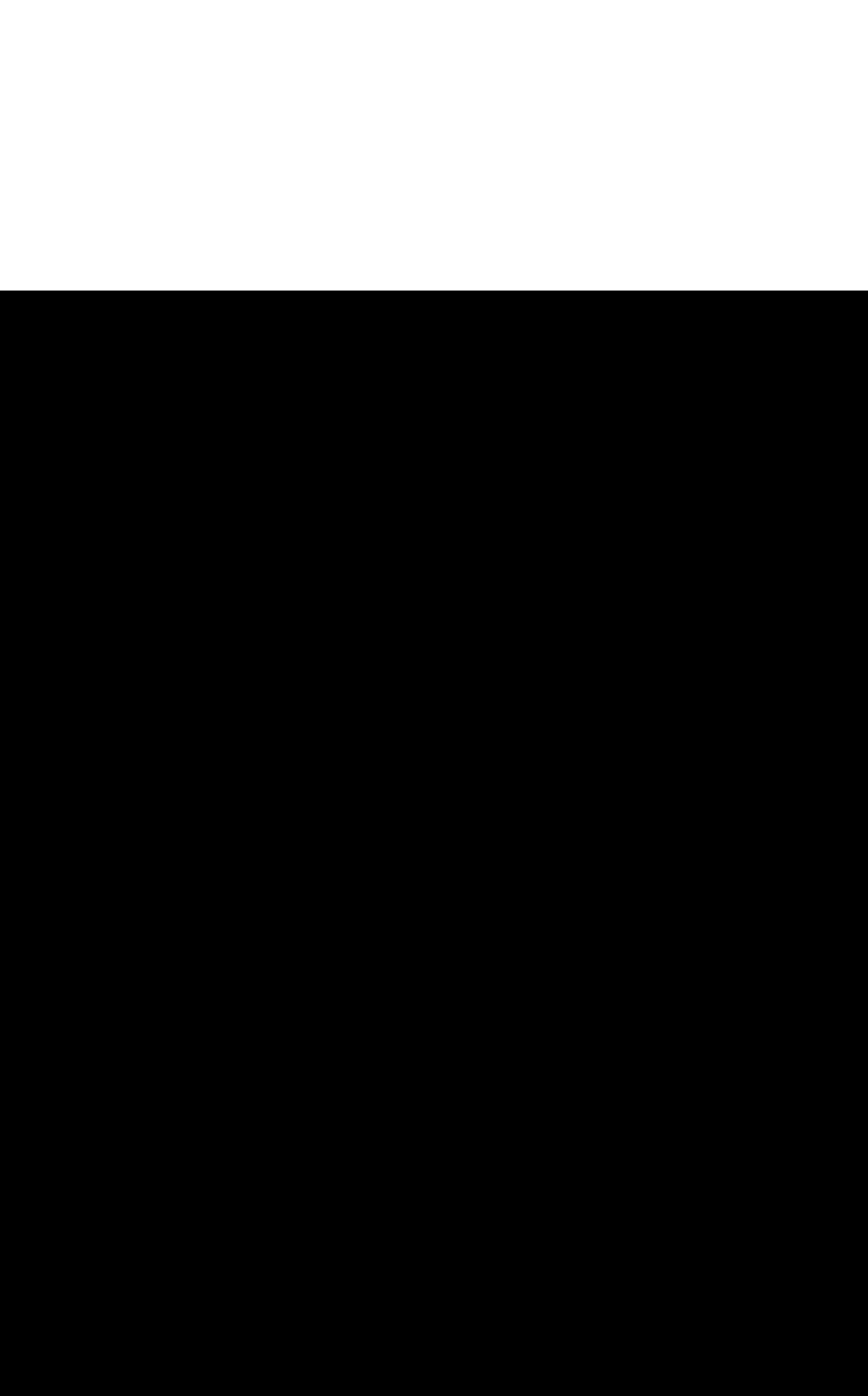
Solo un ulteriore sviluppo della teoria, come anche un aumento nella precisione dei dati sperimentali, potranno indicare se una tale modificazione si renderà necessaria.

hundertmal kleiner sind wie die der α -
 lambda Überzugen.

7. Die Masse des Neutrinos. Durch die Weber-
 gaußwahrscheinlichkeit (32) bestimmt
 ist die Form des kontinuierlichen β -Spektrums
 bestimmt. Wir wollen zuerst diskutieren,
 wie diese Form von der Ruhmasse μ des
 Neutrinos abhängt, um von einem
 Vergleich mit dem empirischen Kurven
 diese Konstante zu bestimmen. Die
 Masse μ ist im dem Faktor p_0^2 / v_0
 enthalten. Die Abhängigkeit der Form
 der Energieverteilungskurve von μ
 ist am ausgeprägtesten in der
 Nähe des Endpunkts der Verteilungskurve
 mit E_0 die Grenzenergie der β -Strahlen,
 so sieht man ohne Schwierigkeit dass
 die Verteilungskurve der β -Strahl Energie
 für Energien E in der Nähe von E_0 , näher
 gegeben ist durch zu

$$\frac{p_0^2}{v_0} = \frac{1}{c^3} (\mu c^2 + E) \sqrt{(E_0 - E)^2 + 2\mu c^2 (E_0 - E)}$$

$$(36) \quad \frac{p_0^2}{v_0} = \frac{1}{c^3} (\mu c^2 + E_0 - E) \cdot \sqrt{(E_0 - E)^2 + 2\mu c^2 (E_0 - E)}$$



80 b.

VERSUCH EINER THEORIE DER
 β -STRAHLEN. I. (*)

« Z. Physik », 88, 161–171 (1934).

Eine quantitative Theorie des β -Zerfalls wird vorgeschlagen, in welcher man die Existenz des Neutrinos annimmt, und die Emission der Elektronen und Neutrinos aus einem Kern beim β -Zerfall mit einer ähnlichen Methode behandelt, wie die Emission eines Lichtquants aus einem angeregten Atom in der Strahlungstheorie. Formeln für die Lebensdauer und für die Form des emittierten kontinuierlichen β -Strahlenspektrums werden abgeleitet und mit der Erfahrung verglichen.

I. – GRUNDANNAHMEN DER THEORIE.

Bei dem Versuch, eine Theorie der Kernelektronen sowie der β -Emission aufzubauen, begegnet man bekanntlich zwei Schwierigkeiten. Die erste ist durch das kontinuierliche β -Strahlenspektrum bedingt. Falls der Erhaltungssatz der Energie gültig bleiben soll, muss man annehmen, dass ein Bruchteil der beim β -Zerfall frei werdenden Energie unseren bisherigen Beobachtungsmöglichkeiten entgeht. Nach dem Vorschlag von W. Pauli kann man z.B. annehmen, dass beim β -Zerfall nicht nur ein Elektron, sondern auch ein neues Teilchen, das sogenannte « Neutrino » (Masse von der Grössenordnung oder kleiner als die Elektronenmasse; keine elektrische Ladung) emittiert wird. In der vorliegenden Theorie werden wir die Hypothese des Neutrinos zugrunde legen.

Eine weitere Schwierigkeit für die Theorie der Kernelektronen besteht darin, dass die jetzigen relativistischen Theorien der leichten Teilchen (Elektronen oder Neutrinos) nicht imstande sind, in einwandfreier Weise zu erklären, wie solche Teilchen in Bahnen von Kerndimensionen gebunden werden können.

Es scheint deswegen zweckmässiger, mit Heisenberg^(*) anzunehmen, dass ein Kern nur aus schweren Teilchen, Protonen und Neutronen, besteht. Um trotzdem die Möglichkeit der β -Emission zu verstehen, wollen wir versuchen, eine Theorie der Emission leichter Teilchen aus einem Kern in Analogie zur Theorie der Emission eines Lichtquants aus einem angeregten Atom beim gewöhnlichen Strahlungsprozess aufzubauen. In der Strahlungstheorie ist die totale Anzahl der Lichtquanten keine Konstante: Lichtquanten entstehen, wenn sie von einem Atom emittiert werden, und verschwinden, wenn sie absorbiert werden. In Analogie hierzu wollen wir der β -Strahlentheorie folgende Annahmen zugrunde legen:

(*) Vgl. die vorläufige Mitteilung: « La Ricerca Scientifica », 2, Heft 12 (1933).

(1) W. HEISENBERG, « ZS. f. Phys. », 77, 1 (1932).

a) Die totale Anzahl der Elektronen, sowie der Neutrinos, ist nicht notwendigerweise konstant. Elektronen (oder Neutrinos) können entstehen und verschwinden. Diese Möglichkeit hat jedoch keine Analogie zum Entstehen oder Verschwinden eines Paares, aus einem Elektron und einem Positron; falls man das Positron als Diracsches «Loch» interpretiert, kann man in der Tat diesen letzten Prozess einfach als einen Quantensprung eines Elektrons zwischen einem Zustand mit negativer Energie und einem Zustand mit positiver Energie mit Erhaltung der totalen (unendlich grossen) Anzahl der Elektronen auffassen.

b) Die schweren Teilchen, Neutronen und Protonen, können wie bei Heisenberg als zwei innere Quantenzustände des schweren Teilchens betrachtet werden. Wir formulieren dies durch die Einführung einer inneren Koordinate ρ des schweren Teilchens, welche nur zwei Werte annehmen kann: $\rho = 1$, falls das Teilchen ein Neutron ist; $\rho = -1$, falls das Teilchen ein Proton ist.

c) Die Hamilton-Funktion des aus schweren und leichten Teilchen bestehenden Systems muss so gewählt werden, dass jedem Übergang von Neutron zu Proton das Entstehen eines Elektrons und eines Neutrinos zugeordnet ist. Dem umgekehrten Prozess, Verwandlung eines Protons in ein Neutron, soll dagegen das Verschwinden eines Elektrons und eines Neutrinos zugeordnet sein. Man bemerke, dass hierdurch die Erhaltung der Ladung gesichert ist.

2. - DIE IN DER THEORIE AUFTRETENDEN OPERATOREN.

Ein mathematischer Formalismus der Theorie in Einklang mit diesen drei Forderungen kann am leichtesten mit Hilfe der Dirac-Jordan-Kleinschen Methode⁽²⁾ der «zweiten Quantelung» aufgebaut werden. Wir werden also die Wahrscheinlichkeitsamplituden ψ und φ der Elektronen und der Neutrinos sowie die komplex konjugierten Grössen ψ^* und φ^* als Operatoren auffassen; für die Beschreibung der schweren Teilchen werden wir dagegen die übliche Darstellung im Konfigurationsraum benutzen, wobei natürlich auch ρ als Koordinate mitgezählt werden muss.

Wir führen zuerst zwei Operatoren Q und Q^* ein, welche auf die Funktionen der zweiwertigen Variablen ρ als die linearen Substitutionen

$$(I) \quad Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad Q^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

wirken. Man sieht ohne weiteres, dass Q einem Übergang von Proton zu Neutron entspricht und Q^* einem Übergang von Neutron zu Proton.

Die Bedeutung der als Operatoren aufgefassten Wahrscheinlichkeitsamplituden ψ und φ ist bekanntlich die folgende: Sei

$$\psi_1 \psi_2 \dots \psi_s \dots$$

(2) Vgl. z.B. P. JORDAN u. O. KLEIN, «ZS. f. Phys.», 45, 751 (1927); W. HEISENBERG, «Ann. d. Phys.», 10, 888 (1931).

ein System individueller Quantenzustände für die Elektronen. Man setze weiter

$$(2) \quad \psi = \sum_s \psi_s a_s \quad , \quad \psi^* = \sum_s \psi_s^* a_s^* .$$

Die Amplituden a_s und die komplex konjugierten Grössen a_s^* sind Operatoren, welche auf die Funktionen der Besetzungszahlen $N_1, N_2, \dots, N_s, \dots$ der individuellen Quantenzustände wirken. Im Falle des Pauli-Prinzips ist jedes der N_s nur der beiden Werte 0 und 1 fähig. Die Operatoren a_s und a_s^* sind dann folgendermassen definiert:

$$(3) \quad \begin{cases} a_s^* \Psi(N_1, N_2, \dots, N_s, \dots) = (-1)^{N_1 + N_2 + \dots + N_s - 1} (1 - N_s) \Psi(N_1, N_2, \dots, 1 - N_s, \dots) \\ a_s \Psi(N_1, N_2, \dots, N_s, \dots) = (-1)^{N_1 + N_2 + \dots + N_s - 1} N_s \Psi(N_1, N_2, \dots, 1 - N_s, \dots) . \end{cases}$$

Der Operator a_s^* entspricht der Erzeugung und der Operator a_s dem Verschwinden eines Elektrons im Quantenzustand s .

Entsprechend zu (2) setze man für die Neutrinos

$$\varphi = \sum_\sigma \varphi_\sigma b_\sigma \quad \varphi^* = \sum_\sigma \varphi_\sigma^* b_\sigma^* .$$

Die komplex-konjugierten Grössen b_σ und b_σ^* sind Operatoren, die auf die Funktionen der Besetzungszahlen $M_1, M_2, \dots, M_\sigma, \dots$ der individuellen Quantenzustände $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\sigma, \dots$ der Neutrinos wirken. Nimmt man an, dass auch für die Neutrinos das Pauli-Prinzip gilt, so sind die Zahlen M_σ nur der beiden Werte 0 und 1 fähig. Es ist ferner:

$$(5) \quad \begin{cases} b_\sigma^* \Phi(M_1, M_2, \dots, M_\sigma, \dots) = (-1)^{M_1 + M_2 + \dots + M_\sigma - 1} (1 - M_\sigma) \Phi(M_1, M_2, \dots, 1 - M_\sigma, \dots) \\ b_\sigma \Phi(M_1, M_2, \dots, M_\sigma, \dots) = (-1)^{M_1 + M_2 + \dots + M_\sigma - 1} M_\sigma \Phi(M_1, M_2, \dots, 1 - M_\sigma, \dots) . \end{cases}$$

Die Operatoren b_σ und b_σ^* entsprechen dem Verschwinden bzw. dem Entstehen eines Neutrinos im Quantenzustand σ .

3. - AUFSTELLUNG DER HAMILTON-FUNKTION.

Die Energie des gesamten, aus schweren und leichten Teilchen bestehenden, Systems ist die Summe der Energien H_{schwer} der schweren Teilchen $+ H_{\text{leicht}}$ der leichten Teilchen $+ H$ zwischen schweren und leichten Teilchen.

Das erste Glied schreiben wir, indem wir vorläufig nur ein einziges schweres Teilchen betrachten, in der Form

$$(6) \quad H_{\text{schwer}} = \frac{1 + \rho}{2} N + \frac{1 - \rho}{2} P ,$$

wo N und P die Energieoperatoren des Neutrons bzw. des Protons darstellen. Für $\rho = 1$ (Neutron) reduziert sich in der Tat (6) auf N ; für $\rho = -1$ (Proton) reduziert sich (6) auf P .

Die Energie H_{leicht} der leichten Teilchen nimmt die einfachste Form an, wenn man als Quantenzustände $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_s \dots$ und $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_s \dots$ stationäre Zustände für die Elektronen bzw. die Neutrinos nimmt. Für die Elektronen

soll man dabei etwa die stationären Zustände im Coulomb-Feld des Kerns, unter Berücksichtigung der Elektronenabschirmung, wählen. Für die Neutrinos kann man einfach ebene de Broglie-Wellen annehmen, da wohl die auf die Neutrinos wirkenden Kräfte keine wesentliche Rolle spielen. Seien $H_1, H_2, \dots, H_s, \dots$ und $K_1, K_2, \dots, K_s, \dots$ die Energien der stationären Zustände der Elektronen und der Neutrinos; dann haben wir:

$$(7) \quad H_{\text{leicht}} = \sum_f H_f N_f + \sum_\sigma K_\sigma M_\sigma.$$

Es bleibt nur noch die Wechselwirkungsenergie zu schreiben. Diese besteht erstens aus der Coulomb-Energie zwischen Proton und Elektronen; bei schweren Kernen spielt jedoch die Anziehung durch ein einziges Proton nur eine untergeordnete Rolle⁽³⁾ und trägt in keinem Falle zum Prozess des β -Zerfalls bei. Wir wollen also dies Glied der Einfachheit halber nicht berücksichtigen. Wir müssen hingegen zur Hamilton-Funktion ein Glied addieren, das die Bedingung c) von Ziffer 1 erfüllt.

Ein Glied, das notwendigerweise die Verwandlung eines Protons in ein Neutron mit dem Verschwinden eines Elektrons und eines Neutrinos koppelt, hat nun nach Ziffer 2 die Form

$$(8) \quad Q a_s b_\sigma.$$

Der komplex konjugierte Operator

$$(8') \quad Q^* a_s^* b_\sigma^*$$

koppelt dagegen die umgekehrten Prozesse (Verwandlung eines Neutrons in ein Proton und Entstehen eines Elektrons und eines Neutrinos).

Ein Wechselwirkungsglied, das die Bedingung c) erfüllt, kann also in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(9) \quad H = Q \sum_{s\sigma} c_{s\sigma} a_s b_\sigma + Q^* \sum_{s\sigma} c_{s\sigma}^* a_s^* b_\sigma^*,$$

wo $c_{s\sigma}$ und $c_{s\sigma}^*$ Grössen darstellen, die von den Koordinaten, Impulsen usw. des schweren Teilchens abhängen können.

Zur näheren Bestimmung von H ist man auf Einfachheitskriterien angewiesen. Eine wesentliche Einschränkung in der Freiheit der Wahl von H ist durch die Erhaltung des Impulses sowie durch die Bedingung gesetzt, dass bei einer Drehung oder einer Translation der Raumkoordinaten (9) invariant bleiben muss.

Sehen wir zunächst von den Relativitätskorrekturen und der Spinwirkung ab, so ist wohl die einfachst mögliche Wahl von (9) die folgende:

$$(10) \quad H = g \{ Q \psi(x) \varphi(x) + Q^* \psi^*(x) \varphi^*(x) \},$$

wo g eine Konstante mit den Dimensionen $L^5 M T^{-2}$ darstellt; x repräsentiert die Koordinaten des schweren Teilchens; $\psi, \varphi, \psi^*, \varphi^*$ sind durch (2) und (4) gegeben und sind an dem Orte x, y, z des schweren Teilchens zu nehmen.

(3) Die Coulombsche Wirkung der zahlreichen übrigen Protonen muss natürlich als statisches Feld in Betracht gezogen werden.

(10) stellt keineswegs die einzig mögliche Wahl von H dar. Jeder skalare Ausdruck, wie etwa

$$L(p)\psi(x)M(p)\varphi(x)N(p) + \text{kompl. konjug.},$$

wo $L(p)$, $M(p)$, $N(p)$ passende Funktionen des Impulses des schweren Teilchens darstellen, würde ebensogut möglich sein. Da jedoch die Folgerungen aus (10) bisher mit der Erfahrung in Einklang zu sein scheinen, ist es wohl besser, sich vorläufig auf die einfachste Wahl zu beschränken.

Wesentlich ist es jedoch, den Ausdruck (10) derart zu verallgemeinern, dass man mindestens die leichten Teilchen relativistisch behandeln kann. Auch bei dieser Verallgemeinerung ist natürlich eine gewisse Willkür nicht auszuschliessen. Die einfachste Lösung des Problems dürfte die folgende sein:

Relativistisch treten an Stelle von ψ und φ je vier Diracsche Funktionen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Wir betrachten nun die 16 unabhängigen bilinearen Kombinationen aus $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Bei einer Lorentz-Transformation der Koordinaten erfahren diese 16 Grössen eine lineare Transformation, eine Darstellung der Ordnung 16 der Lorentz-Gruppe. Diese Darstellung spaltet sich in verschiedene einfachere Darstellungen; im besonderen transformieren sich die vier bilinearen Kombinationen:

$$(11) \quad \begin{cases} A_0 = -\psi_1 \varphi_2 + \psi_2 \varphi_1 + \psi_3 \varphi_4 - \psi_4 \varphi_3, \\ A_1 = \psi_1 \varphi_3 - \psi_2 \varphi_4 - \psi_3 \varphi_1 + \psi_4 \varphi_2, \\ A_2 = i\psi_1 \varphi_3 + i\psi_2 \varphi_4 - i\psi_3 \varphi_1 - i\psi_4 \varphi_2, \\ A_3 = -\psi_1 \varphi_4 - \psi_2 \varphi_3 + \psi_3 \varphi_2 + \psi_4 \varphi_1, \end{cases}$$

wie die Komponenten eines polaren Vierervektors, also wie die Komponenten des elektromagnetischen Viererpotentials. Es liegt nun nahe, die Grössen

$$g(QA_i + Q^*A_i^*)$$

in der Hamilton-Funktion des schweren Teilchens in einer Stellung aufzunehmen, die der Stellung der Komponenten des Viererpotentials entspricht.

Hier begegnen wir einer Schwierigkeit, welche davon herrührt, dass die relativistische Wellengleichung für die schweren Teilchen unbekannt ist. Falls die Geschwindigkeit des schweren Teilchens klein gegenüber c ist, kann man sich jedoch auf den zu eV ($V =$ skalares Potential) analogen Term beschränken und schreiben:

$$(12) \quad H = g [Q (-\psi_1 \varphi_2 + \psi_2 \varphi_1 + \psi_3 \varphi_4 - \psi_4 \varphi_3) \\ + Q^* (-\psi_1^* \varphi_2^* + \psi_2^* \varphi_1^* + \psi_3^* \varphi_4^* - \psi_4^* \varphi_3^*)].$$

Zu diesem Glied sollen noch andere Glieder von der Grössenordnung v/c addiert werden. Da die Geschwindigkeiten der Neutronen und Protonen in den Kernen gewöhnlich klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, wollen wir diese Glieder vorläufig vernachlässigen (vgl. hierzu Ziffer 9).

(12) kann in symbolischer Schreibweise folgendermassen abgekürzt werden:

$$(13) \quad H = g [Q\bar{\psi}^* \delta\varphi + Q^* \bar{\psi} \delta\varphi^*],$$

wo ψ und φ als vertikale Matrixspalten zu schreiben sind; das Zeichen \sim verwandelt eine Matrix in die konjugiert transponierte; und es ist

$$(14) \quad \delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Mit diesen Bezeichnungen bekommt man durch Vergleich mit (9)

$$(15) \quad c_{s\sigma} = g \bar{\psi}_s^* \delta \varphi_\sigma \quad ; \quad c_{\sigma s}^* = g \bar{\psi}_\sigma \delta \varphi_s^*$$

wo ψ_s und φ_σ die normierten vierkomponentigen Eigenfunktionen der Zustände s (des Elektrons) und σ (des Neutrinos) darstellen. ψ und φ sind in (15) an der Stelle des schweren Teilchens, also als Funktionen von x, y, z , zu nehmen.

4. - DIE STÖRUNGSMATRIX.

Die Theorie des β -Zerfalls kann mit Hilfe der aufgestellten Hamilton-Funktion in voller Analogie zur Strahlungstheorie durchgeführt werden. In dieser letzteren besteht die Hamilton-Funktion bekanntlich aus der Summe: Energie des Atoms + Energie des reinen Strahlungsfeldes + Kopplungsenergie. Dieses letzte Glied wird als Störung der beiden anderen aufgefasst. In Analogie hierzu werden wir in unserem Falle die Summe

$$(16) \quad H_{\text{schwer}} + H_{\text{leicht}}$$

als ungestörte Hamilton-Funktion betrachten; hinzu kommt die durch das Kopplungsglied (13) dargestellte Störung.

Die Quantenzustände des ungestörten Systems können folgendermassen numeriert werden:

$$(17) \quad (\rho, n, N_1 N_2 \dots N_s \dots M_1 M_2 \dots M_\sigma \dots),$$

wo die erste Zahl ρ einen der beiden Werte ± 1 annimmt und angibt, ob das schwere Teilchen ein Neutron oder ein Proton ist. Die zweite Zahl n numeriert den Quantenzustand des Neutrons oder des Protons. Für $\rho = 1$ (Neutron) sei die entsprechende Eigenfunktion

$$(18) \quad u_n(x),$$

wo x die Koordinaten des schweren Teilchens, bis auf ρ , darstellt. Für $\rho = -1$ (Proton) sei die Eigenfunktion

$$(19) \quad v_m(x).$$

Die übrigen Zahlen $N_1 N_2 \dots N_s \dots M_1 M_2 \dots M_\sigma \dots$ sind nur der beiden Werte 0 und 1 fähig und geben an, ob der betreffende Zustand des Elektrons oder des Neutrinos besetzt ist.

Fasst man nun die allgemeine Form (9) der Störungsenergie ins Auge, so sieht man, dass sie von Null verschiedene Elemente nur für solche Über-

gänge hat, bei denen entweder das schwere Teilchen von einem Neutron in einen Protonenzustand übergeht und zugleich ein Elektron und ein Neutrino entstehen, oder umgekehrt.

Mit Hilfe von (1), (3), (5), (9), (18), (19) findet man ohne weiteres das betreffende Matrixelement

$$(20) \quad H_{-1 m N_1 N_2 \dots 0_s \dots M_1 M_2 \dots 0_\sigma \dots}^{1 n N_1 N_2 \dots 0_s \dots M_1 M_2 \dots 0_\sigma \dots} = \pm \int v_m^* c_{s\sigma}^* u_n d\tau,$$

wo die Integration über den Konfigurationsraum des schweren Teilchens (bis auf die Koordinate ρ) erstreckt werden muss. Das \pm -Zeichen bedeutet genauer

$$(-1)^{N_1+N_2+\dots+N_s-1+M_1+M_2+\dots+M_\sigma-1}$$

und wird übrigens aus den folgenden Rechnungen herausfallen. Dem entgegengesetzten Übergang entspricht ein komplex konjugiertes Matrixelement.

Führt man für $c_{s\sigma}^*$ den Wert (15) ein, so erhält man

$$(21) \quad H_{-1 m i_s i_\sigma}^{1 n o_s o_\sigma} = \pm g \int v_m^* u_n \bar{\psi}_s \delta\varphi_\sigma^* d\tau,$$

wo der Kürze wegen im ersten Glied alle gleichbleibenden Indizes fortgelassen worden sind.

5. - THEORIE DES β -ZERFALLS.

Ein β -Zerfall besteht in einem Prozess, bei welchem ein Kernneutron sich in ein Proton verwandelt und gleichzeitig mit dem geschilderten Mechanismus ein Elektron, das als β -Strahl beobachtet wird und ein Neutrino emittiert werden. Um die Wahrscheinlichkeit dieses Prozesses zu berechnen, wollen wir annehmen, dass zur Zeit $t = 0$ ein Neutron in einem Kernzustand mit Eigenfunktion $u_n(x)$ vorhanden ist und $N_s = M_\sigma = 0$, d. h. der Elektronenzustand s und der Neutrinozustand σ leer sind. Dann ist für $t = 0$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude des Zustands $(1, n, 0_s, 0_\sigma)$

$$(22) \quad a_{1 n 0_s 0_\sigma} = 1$$

und die des Zustandes $(-1, m, i_s, i_\sigma)$, wo das Neutron in ein Proton mit der Eigenfunktion $v_m(x)$ unter Emission eines Elektrons und eines Neutrinos übergegangen ist, gleich Null.

Bei Anwendung der gewöhnlichen Störungsformeln hat man nun für eine Zeit, die kurz genug ist, damit (22) noch angenähert gültig ist:

$$(23) \quad \dot{a}_{-1 m i_s i_\sigma} = -\frac{2\pi i}{\hbar} H_{-1 m i_s i_\sigma}^{1 n o_s o_\sigma} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(-W+H_s+K_\sigma)t},$$

wo W die Energiedifferenz des Neutronen- und des Protonenzustandes darstellt.

Aus (23) erhält man (da für $t = 0$, $a_{-1 m i_s i_\sigma} = 0$)

$$(24) \quad a_{-1 m i_s i_\sigma} = -H_{-1 m i_s i_\sigma}^{1 n o_s o_\sigma} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(-W+H_s+K_\sigma)t} - 1}{-W + H_s + K_\sigma}.$$

Die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Übergangs ist also zur Zeit t

$$(25) \quad |a_{-1m\tau, i\sigma}|^2 = 4 \left| H_{-1m\tau, i\sigma}^{1n\sigma, \sigma} \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi t}{\hbar} (-W + H_i + K_\sigma)}{(-W + H_i + K_\sigma)^2}.$$

Um die Lebensdauer des Neutronenzustands u_n zu berechnen, hat man den Ausdruck (25) über alle freien Elektronen- und Neutrinozustände zu summieren.

Eine wesentliche Vereinfachung in der Ausführung der Summe erhält man durch die Bemerkung, dass die de Broglie-Wellenlänge für Elektronen und Neutrinos mit Energien von einigen Millionen Volt wesentlich grösser ist als die Kerndimensionen. In erster Näherung kann man also die Eigenfunktionen ψ_s und φ_σ innerhalb des Kerns als Konstante betrachten (21) wird dann:

$$(26) \quad H_{-1m\tau, i\sigma}^{1n\sigma, \sigma} = \pm g \bar{\psi}_s \delta\varphi_\sigma^* \int v_m^* u_n d\tau,$$

wobei hier und im folgenden ψ_s und φ_σ an der Stelle des Kerns zu nehmen sind (vgl. Ziffer 8). Aus (26) hat man

$$(27) \quad \left| H_{-1m\tau, i\sigma}^{1n\sigma, \sigma} \right|^2 = g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \bar{\psi}_s \delta\varphi_\sigma^* \bar{\varphi}_\sigma^* \delta\psi_s.$$

Die Zustände σ des Neutrinos sind durch ihren Impuls p_σ und die Spinrichtung bestimmt. Falls wir zu Normierungszwecken in einem Volumen Ω quantisieren, dessen Dimensionen wir nachher ins Unendliche wachsen lassen werden, so sind die normierten Neutrinoeigenfunktionen ebene Dirac-Wellen, mit der Dichte $1/\Omega$. Eine einfache Algebra erlaubt dann in (27) den Mittelwert über alle Richtungen von p_σ und alle Spinrichtungen des Neutrinos zu nehmen. (Zu betrachten sind dabei nur die positiven Eigenwerte; die negativen sind mit einem der Diracschen Löchertheorie analogen Kunstgriff zu beseitigen). Man findet:

$$(28) \quad \overline{\left| H_{-1m\tau, i\sigma}^{1n\sigma, \sigma} \right|^2} = \frac{g^2}{4\Omega} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \left(\bar{\psi}_s \psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \bar{\psi}_s \beta \psi_s \right),$$

wo μ die Ruhemasse des Neutrinos und β die Diracsche Matrix

$$(29) \quad \beta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

darstellt. Beachtet man nun:

dass die Anzahl der Neutrinozustände positiver Energie mit Impuls zwischen p_σ und $p_\sigma + dp_\sigma$, $\frac{8\pi\Omega}{h^3} p_\sigma^2 dp_\sigma$ ist;

dass $\frac{\partial K_\sigma}{\partial p_\sigma} = v_\sigma$, wo v_σ die Geschwindigkeit des Neutrinos im Zustand σ darstellt;

dass (25) ein scharfes Maximum in der Nähe des Wertes von p_σ hat, für den die Variation der ungestörten Energie verschwindet, d.h.

$$(30) \quad -W + H_s + K_\sigma = 0,$$

so kann man die Summe von (25) über σ in bekannter Weise⁽⁴⁾ ausführen, und man findet:

$$(31) \quad t \cdot \frac{8\pi^3 g^2}{\hbar^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} \left(\bar{\psi}_s \psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \bar{\psi}_s \beta \psi_s \right),$$

wo p_σ hier den Wert des Neutrinoimpulses bedeutet, für den (30) gültig ist.

6. - BESTIMMUNGSSTÜCKE DER ÜBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEIT.

(31) gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass während der Zeit t ein β -Zerfall mit Übergang des Elektrons in den Zustand s stattfindet. Wie es sein soll, ist diese Wahrscheinlichkeit proportional der Zeit t (t ist als klein in Bezug auf die Lebensdauer angenommen worden); der Koeffizient von t gibt die Übergangswahrscheinlichkeit für den geschilderten Prozess an. Sie ist:

$$(32) \quad P_s = \frac{8\pi^3 g^2}{\hbar^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} \left(\bar{\psi}_s \psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \bar{\psi}_s \beta \psi_s \right).$$

Man bemerke:

a) Für die freien Neutrinozustände ist immer $K_\sigma > \mu c^2$. Damit (30) befriedigt werden kann, ist also notwendig, dass

$$(33) \quad H_s \leq W - \mu c^2.$$

Dem = -Zeichen entspricht die obere Grenze des kontinuierlichen β -Strahlenspektrums.

b) Da für die freien Elektronenzustände $H_s > mc^2$ ist, bekommt man die folgende, für die Möglichkeit des β -Zerfalls notwendige Bedingung

$$(34) \quad W \geq (m + \mu) c^2.$$

Ein besetzter Neutronenzustand n im Kerne muss also hoch genug über einem unbesetzten Protonenzustand m liegen, damit der β -Prozess vor sich gehen kann.

c) Nach (32) hängt P_s von den Eigenfunktionen u_n, v_m des schweren Teilchens im Kerne durch das Matrixelement

$$(35) \quad Q_{mn}^* = \int v_m^* u_n d\tau.$$

ab. Dieses Matrixelement spielt in der β -Strahlungstheorie eine ähnliche Rolle wie das Matrixelement des elektrischen Moments eines Atoms in der Strahlungstheorie. Das Matrixelement (35) hat normalerweise die Größenordnung 1; durch besondere Symmetrieeigenschaften von u_n und v_m kann es jedoch

(4) Für die genaue Beschreibung der Methode, solche Summen auszuführen, vgl. irgendeinen Aufsatz über Strahlungstheorie; etwa: E. FERMI, « Rev. Mod. Phys. », 4, 87 (1932).

oft vorkommen, dass Q_{mn}^* verschwindet. In solchen Fällen sprechen wir von *verbotenen β -Übergängen*. Man muss natürlich nicht erwarten, dass die verbotenen Übergänge überhaupt nicht vorkommen, da (32) nur eine Näherungsformel ist. Wir werden in Ziffer 9 etwas über diesen Typ von Übergängen sprechen.

7. - DIE MASSE DES NEUTRINOS.

Durch die Übergangswahrscheinlichkeit (32) ist die Form des kontinuierlichen β -Spektrums bestimmt. Wir wollen zuerst diskutieren, wie diese Form von der Ruhemasse μ des Neutrinos abhängt, um von einem Vergleich mit den empirischen Kurven diese Konstante zu bestimmen. Die Masse μ ist in dem Faktor p_σ^2/v_σ enthalten. Die Abhängigkeit der Form der Energie-

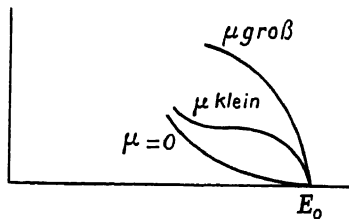


Fig. 1.

verteilungskurve von μ ist am meisten ausgeprägt in der Nähe des Endpunktes der Verteilungskurve. Ist E_0 die Grenzenergie der β -Strahlen, so sieht man ohne Schwierigkeit, dass die Verteilungskurve für Energien E in der Nähe von E_0 bis auf einen von E unabhängigen Faktor sich wie

$$(36) \quad \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} = \frac{1}{c^3} (\mu c^2 + E_0 - E) \sqrt{(E_0 - E)^2 + 2 \mu c^2 (E_0 - E)}$$

verhält.

In der Fig. 1 ist das Ende der Verteilungskurve für $\mu = 0$ und für einen kleinen und einen grossen Wert von μ gezeichnet. Die grösste Ähnlichkeit mit den empirischen Kurven zeigt die theoretische Kurve für $\mu = 0$.

Wir kommen also zu dem Schluss, dass die Ruhemasse des Neutrinos entweder Null oder jedenfalls sehr klein in Bezug auf die Masse des Elektrons ist ⁽⁵⁾. In den folgenden Rechnungen werden wir die einfachste Hypothese $\mu = 0$ einführen. Es wird dann (30)

$$(37) \quad v_\sigma = c \quad ; \quad K_\sigma = p_\sigma c \quad ; \quad p_\sigma = \frac{K_\sigma}{c} = \frac{W - H_s}{c} .$$

Die Ungleichungen (33), (34) werden jetzt:

$$(38) \quad H_s \leq W \quad ; \quad W \geq mc^2 .$$

Und die Übergangswahrscheinlichkeit (32) nimmt die Form an:

$$(39) \quad P_s = \frac{8 \pi^3 g^2}{c^3 \hbar^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \check{\Psi}_s \Psi_s (W - H_s)^2 .$$

(5) In einer kürzlich erschienenen Notiz kommt F. PERRIN, «C. R.», 197, 1625 (1933), mit qualitativen Überlegungen zu demselben Schluss.

8. - LEBENSDAUER UND FORM DER VERTEILUNGSKURVE FÜR «ERLAUBTE» ÜBERGÄNGE.

Aus (39) kann man eine Formel ableiten, welche angibt wieviel β -Übergänge in der Zeiteinheit stattfinden, für welche das β -Teilchen einen Impuls zwischen $mc\eta$ und $mc(\eta + d\eta)$ erhält. Dazu muss man eine Formel für die Summe von $\check{\psi}_r, \psi_r$, am Orte des Kerns über alle im kontinuierlichen Spektrum liegenden Quantenzustände des betreffenden Intervalls ableiten.

Dabei sei bemerkt, dass die relativistischen Eigenfunktionen im Coulomb-Feld für die Zustände mit $j = 1/2$ (${}^2s_{1/2}$ und ${}^2p_{1/2}$) für $r = 0$ unendlich gross werden. Nun gehorcht aber die Kernanziehung für die Elektronen dem Coulombschen Gesetz nur bis $r > \rho$, wo ρ hier den Kernradius bedeutet. Eine Überschlagsrechnung zeigt, dass, wenn man plausible Annahmen über den Verlauf des elektrischen Feldes innerhalb des Kerns macht, der Wert von $\check{\psi}_r, \psi_r$, im Mittelpunkt einen Wert hat, der sehr nahe dem Werte liegt, den $\check{\psi}_r, \psi_r$, im Falle des Coulomb-Gesetzes in der Entfernung ρ vom Mittelpunkt annehmen würde.

Durch Heranziehung der bekannten Formeln⁽⁶⁾ für die relativistischen Eigenfunktionen des Kontinuums im wasserstoffähnlichen Falle findet man also nach einer ziemlich langwierigen Rechnung

$$(40) \quad \sum_{d\eta} \check{\psi}_r, \psi_r = d\eta \cdot \frac{32 \pi m^3 c^3}{\hbar^3 [\Gamma(3 + 2S)]^2} \left(\frac{4 \pi m c \rho}{q} \right)^{2S} \eta^{2+2S} e^{\pi\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma \left(1 + S + i\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \right) \right|$$

wo

$$(41) \quad \gamma = Z/137 \quad ; \quad S = \sqrt{1 - \gamma^2} - 1.$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit in einen Elektronenzustand mit einem Impuls des Intervalls $mc d\eta$ wird dann nach (39):

$$(42) \quad P(\eta) d\eta = d\eta \cdot g^2 \frac{256 \pi^4}{[\Gamma(3 + 2S)]^2} \frac{m^5 c^4}{\hbar^7} \left(\frac{4 \pi m c \rho}{\hbar} \right)^{2S} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \cdot \eta^{2+2S} e^{\pi\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma \left(1 + S + i\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \right) \right|^2 (\sqrt{1 + \eta_0^2} - \sqrt{1 + \eta^2})^2,$$

wo η_0 den in Einheiten mc gemessenen maximalen Impuls der emittierten β -Strahlen darstellt.

Die numerische Auswertung von (42) kann man etwa für $\gamma = 0,6$, d.h. $Z = 81,2$ machen, da ja die Atomnummern der radioaktiven Stoffe nicht weit von diesem Wert liegen. Für $\gamma = 0,6$ ist nach (41) $S = -0,2$. Man findet weiter, dass für $\eta < 10$ die folgende Formel angenähert gilt:

$$(43) \quad \eta^{1,6} e^{0,6 \pi \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma \left(0,8 + 0,6 i \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \right) \right|^2 \simeq 4,5 \eta + 1,6 \eta^2.$$

(6) R. H. HULME, « Proc. Roy. Soc. », London (A), 133, 381 (1931).

Formel (42) wird damit, wenn man $\rho = 9 \cdot 10^{-13}$ setzt:

$$(44) \quad P(\eta) d\eta = 1,75 \cdot 10^{95} g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 (\eta + 0,355 \eta^2) (\sqrt{1 + \eta_0^2} - \sqrt{1 + \eta^2})^2.$$

Die reziproke Lebensdauer erhält man aus (44) durch Integration von $\eta = 0$ bis $\eta = \eta_0$; man findet:

$$(45) \quad \frac{1}{\tau} = 1,75 \cdot 10^{95} g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right| F(\eta_0),$$

wo

$$(46) \quad F(\eta_0) = \frac{2}{3} (\sqrt{1 + \eta_0^2} - 1) + \frac{\eta_0^4}{12} - \frac{\eta_0^2}{3} + 0,355 \left[\frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0^3}{12} + \frac{\eta_0^5}{30} + \frac{\sqrt{1 + \eta_0^2}}{4} \log(\eta_0 + \sqrt{1 + \eta_0^2}) \right].$$

Für kleine Argumente verhält sich $F(\eta_0)$ wie $\eta_0^6/24$; für grössere Argumente sind die Werte von F in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

TABELLE I.

η_0	$F(\eta_0)$	η_0	$F(\eta_0)$	η_0	$F(\eta_0)$	η_0	$F(\eta_0)$
0	$\eta_0^6/24$	2	1,2	4	29	6	185
1	0,03	3	7,5	5	80	7	380

9. - DIE VERBOTENEN ÜBERGÄNGE.

Bevor wir zum Vergleich mit der Erfahrung übergehen, wollen wir noch einige Eigenschaften der verbotenen β -Übergänge diskutieren.

Wie schon bemerkt, ist ein Übergang verboten, wenn das zugehörige Matrixelement (35) verschwindet. Falls nun die Darstellung des Kerns mit individuellen Quantenzuständen der Neutronen und der Protonen eine gute Näherung ist, verschwindet immer Q_{mn}^* aus Symmetriegründen, wenn nicht

$$(47) \quad i = i',$$

wo i und i' die Impulsmomente (in Einheiten $\hbar/2\pi$) des Neutronenzustands u_n und des Protonenzustands v_m darstellen. Der Auswahlregel (47) entspricht, falls die individuellen Zustände keine gute Näherung sind, die allgemeinere

$$(48) \quad I = I',$$

wo I und I' die Impulsmomente des Kerns vor und nach dem β -Zerfall bedeuten.

Die Auswahlregeln (47) und (48) sind bei weitem nicht so scharf wie die Auswahlregeln der Optik. Es gibt hauptsächlich zwei Prozesse, wodurch ein Durchbrechen dieser Auswahlregeln möglich ist:

a) Formel (26) ist durch Vernachlässigung der Variationen von ψ_s und φ_s innerhalb der Kernaussdehnung erhalten worden. Falls man aber ψ_s und φ_s

im Bereich des Kerns nicht als Konstante betrachtet, so erhält man die Möglichkeit von β -Übergängen auch in Fällen, wo Q_{mn}^* verschwindet.

Es ist leicht einzusehen, dass die Intensität solcher Übergänge zur Intensität der erlaubten Prozesse grössenordnungsmässig im Verhältnis $(\rho/\lambda)^2$ steht, wo λ die de Broglie-Wellenlänge der leichten Teilchen darstellt. Man bemerke hierzu, dass, bei gleicher Energie, die kinetische Energie der Elektronen am Orte des Kerns wegen der elektrostatischen Anziehung erheblich grösser ist als die der Neutrinos; die grösste Wirkung rührt also von der Variation von ψ , her. Eine Abschätzung der Intensität dieser verbotenen Prozesse zeigt, dass sie rund 100 mal schwächer sein müssen als die nach (48) erlaubten Übergänge, für welche β -Teilchen der gleichen Energie emittiert werden.

Ein Merkmal für verbotene Übergänge dieses Typs könnte man nicht nur in der verhältnismässig längeren Lebensdauer, sondern auch in der verschiedenen Form der Energieverteilungskurve der β -Strahlen erblicken; man findet nämlich, dass für diese Übergänge die Verteilungskurve für kleine Energien tiefer liegen muss als im normalen Falle.

b) Eine zweite Möglichkeit von nach (48) verbotenen Übergängen folgt aus der am Ende von Ziffer 3 bemerkten Tatsache, dass, falls man die Geschwindigkeit der schweren Kernbestandteile nicht gegen die Lichtgeschwindigkeit vernachlässigt, zum Wechselwirkungsglied (12) noch weitere von der Grössenordnung v/c hinzutreten. Falls man etwa auch für die schweren Teilchen eine relativistische Wellengleichung vom Diracschen Typus annimmt, könnte man z. B. zu (12) Terme wie

$$(49) \quad gQ(\alpha_x A_x + \alpha_y A_y + \alpha_z A_z) + \text{komplex konjugiert}$$

addieren, wo $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ die Diracschen Matrizen für das schwere Teilchen bedeuten und A_x, A_y, A_z die Raumkomponenten des von (11) definierten Vierervektors sind. Das Glied (49) würde zu (12) in demselben Verhältnis stehen wie die Terme eV bzw. $e(\alpha, U)$ ($V =$ skalares Potential; $U =$ Vektorpotential) zu der Diracschen Hamilton-Funktion.

Ein Wechselwirkungsglied wie (49) würde natürlich auch verbotene Übergänge ermöglichen, mit einer relativen Intensität von der Grössenordnung $(v/c)^2$ in bezug auf die der erlaubten Übergänge. Dies gibt also eine zweite Möglichkeit für das Vorhandensein von Übergängen, die etwa 100 mal schwächer sind als die normalen.

10. - VERGLEICH MIT DER ERFAHRUNG.

Formel (45) gibt eine Beziehung zwischen dem maximalen Impuls der emittierten β -Strahlen und der Lebensdauer der β -strahlenden Substanz. In dieser Beziehung tritt zwar noch ein unbekanntes Element auf, nämlich das Integral

$$(50) \quad \int v_m^* u_n d\tau,$$

für dessen Auswertung eine Kenntnis der Eigenfunktionen des Protons und des Neutrons im Kern notwendig wäre. Im Falle der erlaubten Übergänge ist jedoch (50) von der Grössenordnung 1. Man kann also erwarten, dass das Produkt

$$(51) \quad \tau F(\eta_0)$$

für alle erlaubten Übergänge dieselbe Grössenordnung hat. Falls aber der betreffende Übergang verboten ist, ist ihre Lebensdauer rund 100 mal grösser als im normalen Falle und auch das Produkt (51) wird entsprechend grösser.

In der Tabelle 2 sind die Produkte (51) für die radioaktiven Elemente zusammengestellt, für welche man genügende Daten über das kontinuierliche β -Spektrum hat.

TABELLE 2.

Element	τ (Stunden)	η_0	$F(\eta_0)$	$\tau F(\eta_0)$
UX ₂	0,026	5,4	115	3,0
RaB	0,64	2,04	1,34	0,9
ThB	15,3	1,37	0,176	2,7
ThC''	0,076	4,4	44	3,3
AcC''	0,115	3,6	17,6	2,0
RaC	0,47	7,07	398	190
RaE	173	3,23	10,5	1800
ThC	2,4	5,2	95	230
MsTh ₂	8,8	6,13	73	640

Aus der Tabelle sind die zwei erwarteten Gruppen ohne weiteres erkennbar; eine solche Einteilung ist übrigens bereits von Sargent⁽⁷⁾ auf empirischem Wege festgestellt worden. Die Werte von η_0 sind aus der genannten Arbeit von Sargent genommen (zum Vergleich bemerke man, dass: $\eta_0 = (H\beta)_{\max}/1700$). Die von Sargent als nicht zuverlässig angegebenen Werte von η_0 passen nicht besonders gut in die Einteilung: für UX₂ hat man $\tau = 830$; $\eta_0 = 0,76$; $F(\eta_0) = 0,0065$; $\tau F(\eta_0) = 5,4$; dieses Element scheint also zur ersten Gruppe zu passen. Für AcB hat man die folgenden Daten: $\tau = 0,87$; $\eta_0 = 1,24$; $F(\eta_0) = 0,102$; $\tau F(\eta_0) = 0,09$, also ein τF -Wert etwa zehnmal kleiner als die der ersten Gruppe. Für RaD hat man $\tau = 320000$; $\eta_0 = 0,38$ (sehr unsicher); $F(\eta_0) = 0,00011$; $\tau F(\eta_0) = 35$. RaD liegt also ungefähr in der Mitte zwischen den beiden Gruppen. Ich habe keine Daten über die anderen β -strahlenden Elemente MsTh₁, UY, Ac, AcC, UZ, RaC'' gefunden.

(7) B. W. SARGENT, « Proc. Roy. Soc. », London (A), 139, 659 (1933).

Aus den Daten der Tabelle 2 kann man eine, wenn auch sehr grobe, Abschätzung der Konstante g gewinnen. Nimmt man etwa an, dass in den Fällen wo (50) gleich Eins wird, man $\tau F(\eta_0) = 1$ hat (d.h., in Sekunden, = 3600), so bekommt man aus (45):

$$g = 4 \cdot 10^{-50} \text{ cm}^3 \cdot \text{erg}.$$

Dieser Wert gibt natürlich nur die Grössenordnung von g .

Zusammenfassend kann man sagen, dass dieser Vergleich von Theorie und Erfahrung eine so gute Übereinstimmung gibt, wie man nur erwarten konnte. Die bei den als experimentell unsicheren Elementen RaD und AcB festgestellten Abweichungen können wohl teilweise durch Ungenauigkeit der Messungen erklärt werden, teilweise auch durch etwas abnorm grosse aber

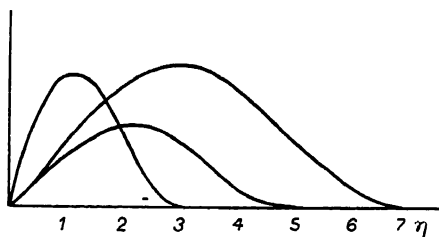


Fig. 2.

gar nicht unplausible Schwankungen des Matrixelements (50). Man hat weiter zu bemerken, dass man aus der den β -Zerfall begleitenden γ -Strahlung schliessen kann, dass die meisten β -Zerfälle zu verschiedenen Endzuständen des Protons führen können, wodurch wieder Schwankungen in dem $\tau F(\eta_0)$ -Wert erklärt werden können.

Wir wenden uns jetzt zur Frage nach der Form der Geschwindigkeitsverteilungskurve der emittierten β -Strahlen. Für den Fall der erlaubten Übergänge ist die Verteilungskurve als Funktion von η (d.h. bis auf den Faktor 1700, von $H\rho$) durch (44) gegeben. Verteilungskurven für verschiedene Werte von η_0 sind in der Fig. 2 zusammengestellt, wobei für die Bequemlichkeit der Zeichnung die Ordinateneinheit in den verschiedenen Fällen passend gewählt worden ist. Diese Kurven zeigen eine befriedigende Ähnlichkeit etwa zu den von Sargent⁽⁸⁾ zusammengestellten Verteilungskurven. Nur in dem Teil der Kurve kleiner Energie liegen die Kurven von Sargent

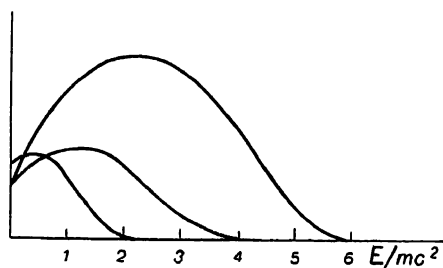


Fig. 3.

(8) B. W. SARGENT, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », 28, 538 (1932).

etwas tiefer als die theoretischen. Dies ist deutlicher in der Fig. 3 zu sehen, wo als Abszisse die Energie an Stelle des Impulses genommen worden ist. (Hierzu muss man jedoch bemerken, dass die experimentelle Kenntnis des Verteilungsgesetzes für kleine Energien besonders unsicher ist).⁽⁹⁾ Übrigens hat man für die verbotenen Übergänge auch theoretisch Kurven zu erwarten, die im Gebiet kleiner Energie tiefer liegen als die der Fig. 2 und 3. Dieser letzte Punkt ist besonders für den Fall der experimentell verhältnismässig gut bekannten Kurve des RaE zu beachten. Aus der Tabelle 2 sieht man nämlich, dass RaE einen sehr grossen $\tau F(\eta_0)$ -Wert hat; der β -Zerfall des RaE ist also gewiss verboten und wird sogar möglicherweise nur erst in zweiter Näherung erlaubt. Ich hoffe in einer nächsten Mitteilung etwas Genaueres über den Verlauf der Energieverteilungskurven für die verbotenen Übergänge sagen zu können.

Zusammenfassend darf man wohl sagen, dass die Theorie in der hier angegebenen Form in Übereinstimmung mit den allerdings nicht immer besonders genauen experimentellen Daten ist. Sollte man übrigens auch bei einem näheren Vergleich von Theorie und Erfahrung zu Widersprüchen kommen, so wäre es noch möglich, die Theorie abzuändern, ohne ihre begrifflichen Fundamente zu berühren. Man könnte nämlich Gleichung (9) behalten und eine andere Wahl der c_{σ} treffen. Diese könnte insbesondere zu einer Abänderung der Auswahlregel (48) führen und eine andere Form der Energieverteilungskurve sowie der Abhängigkeit der Lebensdauer von der maximalen Energie ergeben. Ob eine solche Änderung notwendig sein wird, kann jedoch erst durch eine weitere Entwicklung der Theorie und möglicherweise auch durch eine Verschärfung der experimentellen Daten gezeigt werden.

(9) Vgl. z.B. E. RUTHERFORD, B. ELLIS u. J. CHADWICK, *Radiations from Radioactive Substances*, Cambridge 1932. Siehe insbesondere S. 407.

81.

ZUR BEMERKUNG VON G. BECK
UND K. SITTE (*)

«Z. Physik», 89, 522 (1934).

Es sei mir gestattet, zur Note von Beck und Sitte einige kurze Bemerkungen hinzuzufügen.

Die Neutrinohypothese ist bekanntlich aus den Schwierigkeiten der Energiebilanz beim β -Zerfall entstanden. Obgleich die Existenz des Neutrinos sehr hypothetisch ist und wohl sicher auch in der nächsten Zukunft einer direkten experimentellen Prüfung unzugänglich sein wird, gibt sie jedoch heute, meines Wissens, die einzige Möglichkeit, der Energieschwierigkeit zu entgehen, ohne die Fundamente der Theorie sehr tief zu berühren. Gerade in diesem Punkte sehe ich die grösste Differenz zwischen der Theorie von Beck und Sitte und der von mir vorgeschlagenen Theorie. Diese letzte setzt uns instand, ein formal vollständiges Bild des β -Zerfalls zu geben, während bei der Theorie von Beck und Sitte der Prozess der Anlagerung des Positrons zum Kerne als ein im Rahmen der heutigen Theorien unbegreifliches Phänomen erscheint, bei dem die Energie nicht erhalten wird.

Was die Frage der Form der Energieverteilungskurve für kleine Energien betrifft, sei bemerkt, dass bei verbotenen Übergängen, welche durch die Variationen der Eigenfunktionen des Elektrons und des Neutrinos am Orte des Kernes ermöglicht werden, praktisch bei weitem die Variation der Eigenfunktion des Elektrons die wichtigste ist, da diese, als Folge der Potentialmulde der Kernanziehung, viel stärker variiert als die Eigenfunktion des Neutrinos. Dieses hat zur Folge, dass die Intensitätsabnahme des β -Spektrums bei kleinen Energien bei verbotenen Übergängen sehr ausgeprägt ist; desto mehr, je grösser die Änderung des Kernmoments ist. Bei der grossen Unschärfe unserer Kenntnisse der Energieverteilungskurve kann man die Theorie an diesem Punkt noch nicht mit der Erfahrung vergleichen.

Was den letzten von Beck und Sitte erwähnten Punkt betrifft, verweise ich auf eine Arbeit von G. C. Wick ⁽¹⁾, wo die induzierte Emission von Positronen vom Standpunkt der von mir vorgeschlagenen Theorie diskutiert wird.

(*) G. BECK u. K. SITTE, «Zs. f. Phys.», 89, 259 (1934).

(1) G. C. WICK, «Rendiconti Lincei», 19, 319 (1934).

N° 82.

This paper is the last in the series on the application of the statistical method to atomic properties. The possibility of working out a systematic calculation of atomic eigenfunctions had been considered several times at the Institute. Indeed the agreement between calculation and experiment obtained for numerous properties of atoms and ions suggested that such a project might be very useful. There was even talk of preparing a manual containing the eigenfunctions of a large number of orbits of many elements in the form of numerical tables. The manual was jokingly referred to as "Thesaurus Ψ -arum".

Paper N° 82 represents the first step toward the preparation of such a manual. It also represents the last contribution to this field of research since the discovery of artificial radioactivity induced by neutron bombardment, in the winter of 1934, brought about a change in the direction of the Institute's scientific activity.

The paper itself contains the numerical tables of the ∞s -eigenfunctions for 14 values of the atomic number Z ranging between 10 and 92. The arrangement of the numerical results is such as to allow the computation by interpolation of the eigenfunction of the s -terms of any other element with $Z \geq 10$.

This paper differs from all Fermi's previous works, which were based on Schrödinger's equation, because Fermi made use of the relativistic equations in the Darwin approximation.

The actual calculations were carried out by some students and young Ph. D's (A. Biava, F. Colajori, V. Crocco, G. Giovene, E. Medi and R. Nuzzo) who kindly helped with this laborious task.

A notebook entitled "Thesaurus" containing the numerical tables published in paper N° 82 is preserved in the Domus Galilaeana Archives at Pisa.

E. AMALDI.

82.

LE ORBITE ∞s DEGLI ELEMENTI (*)

E. FERMI ed E. AMALDI, «Mem. Accad. d'Italia», 6 (1) (Fis.), 119-149 (1934).

RIASSUNTO. — Lo scopo di questo lavoro è di porre le basi per il calcolo sistematico di tutte le autofunzioni degli elementi chimici col metodo di Thomas-Fermi. Il potenziale viene scelto in modo un po' diverso dai lavori precedenti ed il problema viene trattato colle equazioni relativistiche. Il metodo viene applicato al calcolo delle autofunzioni ∞s .

Secondo la meccanica quantistica, le proprietà di un atomo si possono calcolare facilmente qualora siano note le autofunzioni e gli autovalori degli stati quantici in cui l'atomo si può trovare. Le autofunzioni dipendono, in modo generalmente complicato, dalle coordinate di tutti gli elettroni. Tuttavia una schematizzazione efficace ed in molti casi sufficiente si può ottenere considerando delle autofunzioni individuali per i singoli elettroni; immaginando cioè ciascuno di essi come isolato in un opportuno campo di poten-

(*) Presentata nell'Adunanza del 18 maggio 1934.

ziale che rappresenta l'azione del nucleo e degli altri elettroni. Da queste autofunzioni individuali si risale all'autofunzione dello stato quantico dell'atomo formando i prodotti antisimmetrizzati delle autofunzioni degli stati quantici individuali che intervengono nella configurazione considerata.

Il problema si riconduce con questa schematizzazione al calcolo delle autofunzioni e degli autovalori dei singoli elettroni di ciascuna specie atomica.

Per risolvere tale problema bisogna trovare le soluzioni della equazione di Schroedinger nella quale compare esplicitamente il potenziale agente sull'elettrone in questione, dovuto all'azione del nucleo e di tutti gli altri elettroni dell'atomo.

Per la ricerca del potenziale si può procedere con diversi gradi di approssimazione: un primo grado si ottiene col metodo statistico di Thomas-Fermi⁽¹⁾ in cui gli elettroni vengono considerati come un gas degenere in equilibrio per effetto dell'attrazione nucleare. Questo metodo pur non essendo molto preciso presenta tuttavia il vantaggio di una grande semplicità in quanto che, per mezzo di una sola funzione calcolata numericamente una volta per tutte, si può rappresentare il comportamento di tutti gli atomi.

Un metodo numerico più approssimato è quello del «selfconsistent field», di Hartree⁽²⁾. In questo metodo tuttavia la complicazione assai maggiore dei calcoli non sembra corrispondere, almeno di solito, alla maggior esattezza dei risultati. Più preciso del metodo di Hartree in quanto tiene conto degli effetti di risonanza, è il metodo proposto da Fock⁽³⁾ che tuttavia per la sua estrema complicazione non è ancora stato applicato a nessun atomo.

Proponendoci in questo lavoro calcoli numerici sistematici delle autofunzioni di tutti gli elementi, abbiamo per ragioni di praticità, data la preferenza al metodo statistico, anche perché esso in ogni caso fornisce la base per calcoli numerici più approssimati.

Dal lato pratico il metodo presenta anche il vantaggio che le autofunzioni di un elettrone di determinati numeri quantici dipendono con continuità dal numero atomico per modo che non è necessario volendo conoscere per esempio, le autofunzioni ∞s di tutti gli atomi, calcolarle elemento per elemento, ma sarà sufficiente eseguire i calcoli per una quindicina di elementi scelti opportunamente nel sistema periodico, deducendo poi le autofunzioni ∞s di tutti gli altri atomi per interpolazione.

Nel presente lavoro vengono esposti i metodi generali in base ai quali si eseguono tali calcoli e la loro applicazione al calcolo delle autofunzioni ∞s . I calcoli sono stati eseguiti per gli elementi:

Ne , Si , K , Fe , Ga , Rb , Mo , Ag , I , Ce , Ho , W , Hg , U

mentre per gli altri si possono ottenere le autofunzioni per interpolazione.

(1) L. H. THOMAS, « Proc. Camb. Phil. Soc. », 23, 542 (1927); E. FERMI, « Rend. Lincei », 6, 602 (1927); 7, 342 (1928); « ZS. f. Phys. », 48, 73; 49, 550 (1928).

(2) D. R. HARTREE, « Proc. Camb. Phil. Soc. », 24, 89, III (1928).

(3) V. FOCK, « ZS. f. Phys. », 61, 126 (1930).

Rispetto ai calcoli di autofunzioni eseguiti precedentemente pure col metodo statistico, sono stati introdotti due miglioramenti, consistenti l'uno in una differente scelta del potenziale, determinato in modo che anche per un atomo neutro il raggio risulti finito; e l'altro nel fare tutti i calcoli colle equazioni relativistiche anziché coll'equazione di Schroedinger, ciò che ha una importanza non trascurabile specialmente per le autofunzioni s degli elementi pesanti. Nel paragrafo 2 verrà esposto il metodo di calcolo del potenziale agente sull'elettrone in questione: nel paragrafo 3 verranno prese in considerazione le equazioni relativistiche e verrà mostrato in qual modo convenga trasformarle per poter eseguire in modo comodo i calcoli numerici.

Vengono quindi date le tabelle generali che sono servite per il calcolo delle autofunzioni ∞s e che servono per il calcolo di molte altre autofunzioni.

Dopo di che vengono date le autofunzioni ∞s .

Vogliamo in fine notare che la conoscenza delle autofunzioni ∞s permette di calcolare assai rapidamente anche le autofunzioni s ottiche poiché queste non differiscono sensibilmente dalle ∞s nella parte più interna dell'atomo, ossia nella parte ove è più difficile e gravoso il calcolo numerico.

2. CALCOLO DEL POTENZIALE. - Tutte le considerazioni svolte in questo paragrafo si riferiscono al caso più generale di un atomo di numero atomico Z , ionizzato z volte.

Per stabilire l'equazione differenziale che determina il potenziale in funzione della distanza dal nucleo, si procede, come già nei lavori precedenti (4), dalla relazione che collega tra di loro la densità del gas elettronico col potenziale nell'ipotesi che gli elettroni si possano trattare come un gas completamente degenerare. Tale relazione è

$$(1) \quad n = \begin{cases} \frac{2^{9/2} \pi m^{3/2} e^{3/2}}{3 \hbar^3} (V + \alpha)^{3/2} & \text{per } V + \alpha > 0 \\ 0 & \text{per } V + \alpha < 0 \end{cases}$$

α è una costante additiva da determinarsi colla condizione che il numero totale degli elettroni sia quello dato e cioè

$$\int n d\tau = Z - z$$

dove l'integrale va esteso a tutta la regione dello spazio dove $n \neq 0$.

Occorre qui tener presente tuttavia, che il potenziale su di un elettrone non coincide esattamente col potenziale che si ha in un punto geometrico posto ad egual distanza dal nucleo.

Infatti il primo potenziale rappresenta l'azione del nucleo e di $Z - z - 1$ elettroni, mentre il secondo rappresenta l'azione del nucleo e di tutti gli $Z - z$ elettroni.

Indichiamo con V e V' i due potenziali ora definiti. Avremo

$$V = \frac{Ze}{r} + U \quad V' = \frac{Ze}{r} + U'$$

(4) E. FERMI, loc. cit.

dove U ed U' rappresentano l'azione rispettivamente degli $Z - z - 1$ e $Z - z$ elettroni. In prima approssimazione noi ammetteremo dunque U ed U' proporzionali rispettivamente a $Z - z - 1$ e $Z - z$ e scriveremo

$$U' = \frac{Z - z}{Z - z - 1} U.$$

V' rappresenta il potenziale dovuto al nucleo ed a tutti gli elettroni: varrà dunque per esso l'equazione di Poisson

$$\Delta V' = \Delta U' = 4 \pi n e$$

da cui

$$\Delta V = \Delta U = \frac{Z - z - 1}{Z - z} \Delta U' = \left(1 - \frac{1}{Z - z}\right) 4 \pi n e.$$

Tenendo conto della (1) e del fatto che α è costante e ponendo

$$v = V + \alpha$$

avremo dunque

$$\Delta v = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{Z - z}\right) \frac{2^{2/3} \pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3 \hbar^3} v^{3/2} & \text{per } v > 0 \\ 0 & \text{per } v < 0. \end{cases}$$

Siccome poi v per ragioni di simmetria dipende dalla sola r , l'equazione precedente diventa

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{Z - z}\right) \frac{2^{2/3} \pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3 \hbar^3} v^{3/2} & \text{per } v > 0 \\ 0 & \text{per } v < 0. \end{cases}$$

Le costanti di integrazione si determinano colle condizioni

$$\lim_{r=0} vr = Ze$$

$$\int_0^{r_0} 4 \pi r^2 n dr = Z - z$$

dove r_0 rappresenta la distanza per cui v si annulla, alla quale cioè viene a terminare la nuvola elettronica, circostante al nucleo.

Per semplificare le equazioni precedenti conviene porre analogamente a quanto è fatto nelle Note (5)

$$r = \mu x$$

dove

$$(2) \quad \mu = \frac{3^{2/3} \hbar^2}{2^{2/3} \pi^{4/3} m e^2} \frac{(Z - z)^{2/3}}{Z^{1/3} (Z - z - 1)^{2/3}} = \left(\frac{9 \pi^2}{128}\right)^{1/3} a \frac{(Z - z)^{2/3}}{Z^{1/3} (Z - z - 1)^{2/3}}$$

a essendo il raggio della prima orbita dell'idrogeno,

$$(3) \quad v = \frac{eZ}{\mu} \frac{\varphi(x)}{x}.$$

(5) E. FERMI, «Leipziger Vorträge», 95 (1928).

Si trova allora per la funzione $\varphi(x)$ l'equazione differenziale

$$(4) \quad \varphi'' = \frac{\varphi^{3/2}}{\sqrt{x}}$$

con le condizioni ai limiti

$$(5) \quad \varphi(0) = 1 \quad \int_0^{x_0} \varphi^{3/2} \cdot \sqrt{x} \, dx = 1 - \frac{z+1}{Z}$$

dove $x_0 = \frac{r_0}{\mu}$ e $\varphi(x_0) = 0$.

L'ultimo integrale si può eseguire tenendo conto della (4) e si trova che esso è equivalente a

$$(6) \quad -x_0 \varphi'(x_0) = \frac{z+1}{Z}.$$

L'integrazione della (4) colle condizioni ai limiti indicate, è già stata trattata nella Nota (6): l'unica differenza rispetto al caso allora trattato e che in luogo di z si deve ora scrivere $z+1$. Si trova in particolare che in approssimazione largamente sufficiente per i casi pratici può porsi

$$(7) \quad \varphi = \begin{cases} \varphi_0 - k\eta & \text{per } x > x_0 \\ -\frac{z+1}{Z} \frac{x-x_0}{x_0} & \text{per } x < x_0. \end{cases}$$

Le funzioni φ_0 ed η sono già state tabulate nei lavori (7) ed i loro valori sono stati riportati nel presente lavoro per comodità: k è una costante il cui valore dipende da $(z+1)/Z$ in modo da soddisfare la (6): una espressione empirica che la rappresenta con sufficiente approssimazione entro l'intervallo di valori che interessa e che è stata usata nei calcoli è la seguente

$$(8) \quad k = 0.083 \left(\frac{z+1}{Z} \right)^3.$$

I valori di x_0 sono pure stati calcolati per i vari elementi di cui ci occupiamo nel presente lavoro e i loro valori sono dati nelle singole tabelle.

Il potenziale v dato dalla (3) non si annulla all'infinito: conviene perciò aggiungere ad esso una costante in modo da farlo tendere a zero per $x \rightarrow \infty$. Si riconosce immediatamente che tale costante ha il valore

$$\frac{e}{\mu} \frac{z+1}{x_0}.$$

Prenderemo dunque in definitiva come espressione del potenziale la seguente

$$(9) \quad V = \frac{e}{\mu} \left[\frac{Z}{x} \varphi(x) + \frac{z+1}{x_0} \right]$$

3. RICERCA DELLE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI RELATIVISTICHE. - Stabilimento, come si è visto nel paragrafo precedente, il potenziale del campo di forza in cui si muove l'elettrone in questione, prendiamo a considerare le equazioni relativistiche della meccanica quantistica.

(6) E. FERMI, « Acc. d'Ital. », I, 149 (1930).

(7) E. FERMI, *Falkenhagen, Quantentheorie und Chemie*. « Leipziger Vorträge », 95, III (1928); « Acc. d'Italia », I, 149 (1930).

Limitandoci a considerare termini s ($l = 0$) noi possiamo scrivere tali equazioni sotto la forma

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{2\pi}{h} \left(\frac{W - eV}{c} + 2mc \right) F + \frac{dG}{dr} = 0 \\ -\frac{2\pi}{h} \frac{W - eV}{c} G + \frac{dF}{dr} + \frac{2}{r} F = 0 \end{cases}$$

ove F e G sono le autofunzioni, W l'energia e V il potenziale (8).

Le autofunzioni F e G sono legate alle quattro funzioni di Dirac dalle relazioni

$$(I') \quad \begin{cases} \psi_1 = -iF \cos \theta \\ \psi_2 = -iF \sin \theta e^{i\varphi} \\ \psi_3 = G \\ \psi_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_1 = -iF \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \psi_2 = iF \cos \theta \\ \psi_3 = 0 \\ \psi_4 = G. \end{cases}$$

Le due soluzioni corrispondono alle due orientazioni dello spin. Nel caso non relativistico la unica funzione ψ di Schroedinger si riduce alla G . In particolare a una certa distanza dal nucleo, dove le correzioni relativistiche diventano trascurabili, si può sensibilmente porre $\psi = G$. Ponendo nelle (I) al posto di V la (9) del paragrafo precedente, e

$$W = -\frac{e^2}{2a} \varepsilon$$

si ottiene

$$(2) \quad \begin{cases} \left[\frac{2}{\alpha} \frac{\mu}{a} - \frac{\alpha}{2} \frac{\mu}{a} \varepsilon + \alpha Z \left(\frac{\varphi}{x} + \frac{1}{Zx_0} \right) \right] F + G' = 0 \\ \left[\frac{\alpha}{2} \frac{\mu}{a} \varepsilon - \alpha Z \left(\frac{\varphi}{x} + \frac{1}{Zx_0} \right) \right] G + F' + \frac{2}{x} F = 0. \end{cases}$$

In queste equazioni è stata introdotta la variabile $x = \frac{r}{\mu}$: α è la costante della struttura fina che ha il valore numerico 1/137.3.

Per trovare le soluzioni delle equazioni (2) conviene trattarle in modo differente in vicinanza dell'origine ed a grande distanza da essa.

Dato che la funzione $\varphi_0(x)$, a mezzo della quale si esprime il potenziale statistico, è rappresentata con approssimazione sufficiente per gli scopi pratici, per $x \leq 0.3$, dalla espressione empirica

$$(3) \quad \varphi_0(x) = 1 - px + qx^2 = 1 - 1.304x + 1.288x^2,$$

possiamo cercare di soddisfare le equazioni (2) entro l'intervallo $x = 0$ a $x = 0.3$ a mezzo di sviluppi in serie di potenze di x . Per $x > 0.3$ cercheremo invece le soluzioni delle equazioni (2) col metodo di Wentzel-Brillouin.

Notiamo fin d'ora che tale metodo si presta assai bene all'esecuzione di calcoli in serie poiché esso sostituisce ad una funzione irregolare, due funzioni di andamento regolare: l'ampiezza e la fase; le interpolazioni si devono appunto eseguire su queste ultime.

(8) Vedi per esempio DARWIN, « Proc. Roy. Soc. », A 118, 654 (1928).

Convieni ora modificare un poco la forma in cui sono state scritte le equazioni (2). Ponendo.

$$F = Z \alpha \mathfrak{R}$$

dove \mathfrak{R} è la nuova funzione incognita, avremo dunque

$$(4) \quad \begin{cases} \left[\frac{2\mu Z}{a} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{\mu Z}{a} \varepsilon + \alpha^2 Z^2 \left(\frac{\varphi}{x} + \frac{1}{Zx_0} \right) \right] \mathfrak{R} + G' = 0 \\ \left[\frac{\mu}{2aZ} \varepsilon - \left(\frac{\varphi}{x} + \frac{1}{Zx_0} \right) \right] G + \mathfrak{R}' + \frac{2}{x} \mathfrak{R} = 0 \end{cases}$$

dalle quali, ricordando la (3) si ottiene

$$(5) \quad \begin{cases} \left[\frac{a}{2\mu Z} - \alpha^2 Z^2 \right] \frac{\mu \varepsilon}{2aZ} - \left(\frac{1}{x} - p + \frac{1}{Zx_0} + qx \right) \mathfrak{R} + G' = 0 \\ \left[\frac{\mu}{2a} \frac{\varepsilon}{Z} - \left(\frac{1}{x} - p + \frac{1}{Zx_0} + qx \right) \right] G + \mathfrak{R}' + \frac{2}{x} \mathfrak{R} = 0. \end{cases}$$

Qualora si ponga per semplicità

$$T = p - \frac{1}{Zx_0} + \frac{\mu \varepsilon}{2aZ}$$

avremo

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}' + \frac{2}{x} \mathfrak{R} - \left(\frac{1}{x} - T + qx \right) G = 0 \\ G' + \left[\frac{2\mu Z}{a} + \alpha^2 Z^2 \left(\frac{1}{x} - T + qx \right) \right] \mathfrak{R} = 0. \end{cases}$$

Tali equazioni non si prestano però ancora per la ricerca di una soluzione in serie di potenze di x , poiché G ed R divengono infinite nell'origine. Per eliminare tale singolarità poniamo:

$$(7) \quad G = x^{-\beta} u \quad , \quad \mathfrak{R} = \frac{\beta}{\alpha^2 Z^2} x^{-\beta} v.$$

Introducendo queste espressioni nelle equazioni (6) e ammettendo che u e v siano regolari per $x = 0$, si ottiene per β una equazione di secondo grado:

$$\beta(2 - \beta) = \alpha^2 Z^2.$$

Dei due valori possibili di β si vede facilmente che uno solo soddisfa al nostro scopo perché esso deve essere minore di $3/2$, affinché G^2 , che nell'origine si comporta come $x^{-2\beta}$, sia integrabile per $x = 0$. Da ciò risulta

$$(8) \quad \beta = 1 - \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2}$$

Otteniamo così in definitiva le equazioni differenziali cercate per le due nuove funzioni incognite u e v

$$(9) \quad \begin{cases} -\frac{xv'}{2-\beta} - v + u - Txu + qx^2 u = 0 \\ -\beta u + xu' + \beta v + Lxv + \beta qx^2 v = 0. \end{cases}$$

In queste equazioni si è posto per semplicità

$$L = \frac{2\mu Z}{a(2-\beta)} - T\beta.$$

Poniamo ora

$$(10) \quad \begin{cases} u = 1 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots \\ v = 1 + v_1 x + v_2 x^2 + \dots \end{cases}$$

ed introduciamo questi sviluppi in serie nelle equazioni (9) si ottengono in tal modo delle formule ricorrenti che permettono il calcolo numerico dei coefficienti

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} u_n &= \frac{(2-\beta)\beta}{n(2-2\beta+n)} [T u_{n-1} - q u_{n-2}] \\ &+ \frac{2-\beta+n}{n(2-2\beta+n)} [-L v_{n-1} - \beta q v_{n-2}] \\ v_n &= \frac{(2-\beta)(n-\beta)}{n(2-2\beta+n)} [T u_{n-1} - q u_{n-2}] \\ &+ \frac{2-\beta}{n(2-2\beta+n)} [-L v_{n-1} - \beta q v_{n-2}]. \end{aligned} \right\}$$

Per gli scopi pratici basta calcolare i termini degli sviluppi in serie (10) fino alla quindicesima potenza di x .

Passiamo ora al calcolo delle soluzioni delle equazioni (1) per $x > 0.3$. Qualora si ponga per semplicità

$$(12) \quad g = -\frac{\mu^2}{a^2} \varepsilon + \frac{2\mu Z}{a} \left(\frac{\varphi}{x} + \frac{1}{Zx_0} \right)$$

le (4) si possono scrivere

$$(13) \quad \begin{cases} a) \quad \mathfrak{R}' + \frac{2}{x} \mathfrak{R} - \frac{a}{2\mu Z} g G = 0 \\ b) \quad G' + \mathfrak{R} \left[\frac{2\mu Z}{a} + \frac{aZ}{2\mu} \alpha^2 g \right] = 0. \end{cases}$$

Se noi ci limitiamo a considerare termini fino ad α^2 inclusi, noi otterremo dalla (13, b))

$$\mathfrak{R} = -\frac{a}{2\mu Z} G' \left(1 - \frac{a^2 \alpha^2}{4\mu^2} g \right)$$

espressione che introdotta nella (13, a)) dà

$$gG + \left(G'' + \frac{2}{x} G' \right) \left(1 - \frac{a^2 \alpha^2}{4\mu^2} g \right) - \frac{a^2 \alpha^2}{4\mu^2} g' G' = 0.$$

Se noi poniamo

$$(14) \quad xG = U$$

di modo che

$$G' = \frac{U'}{x} - \frac{U}{x^2} \quad ; \quad U'' = x \left(G'' + \frac{2}{x} G' \right)$$

avremo

$$gU + U'' \left(1 - \frac{a^2 \alpha^2}{4\mu^2} g \right) - \frac{a^2 \alpha^2}{4\mu^2} g' \left(U' - \frac{U}{x} \right) = 0.$$

Limitandoci sempre a considerare termini sino ad α^2 inclusi, noi otteniamo dalla equazione precedente

$$(15) \quad U'' + gU = \gamma^2 \left\{ g' U' - \frac{g'}{x} U - g^2 U \right\}$$

dove

$$(16) \quad \gamma^2 = \frac{a^2 x^2}{4\mu^2}.$$

Cerchiamo ora la soluzione della equazione (15) col metodo di Wentzel Brillouin. Siccome per le funzioni ∞s la funzione U ha un andamento oscillante per tutti i valori di x , porremo

$$(17) \quad U = e^{iZ} dx$$

dove Z è la nuova funzione incognita. Sia la parte reale che la immaginaria di U sono soluzioni dell'equazione.

Dalla (15) si ottiene a mezzo della (17) l'equazione

$$(18) \quad iZ' - Z^2 + g = \gamma^2 \left\{ igZ - \frac{g'}{x} + g^2 \right\}.$$

In questa equazione il secondo membro rappresenta la correzione relativistica. Essa si può risolvere per approssimazioni successive: eseguendo i calcoli fino alla quarta approssimazione, e prendendo per U l'espressione reale:

$$(19) \quad U = K \cdot R \text{ sen } \Theta$$

si ottiene

$$(20) \quad R(x) = \frac{1 + \frac{g''}{16g^2} - \frac{5}{64} \frac{g'^2}{g^3} + \frac{\gamma^2}{2} g}{\sqrt[4]{g}}$$

$$(21) \quad \Theta(x) = \Theta(0,3)$$

$$+ \left[\int \sqrt{g} dx - \frac{1}{32} \int \frac{g'^2}{g^{5/2}} dx - \frac{g'}{8g^{3/2}} + \frac{\gamma^2}{2} \left(\int \frac{g' dx}{x\sqrt{g}} + \int g^{3/2} dx \right) \right]_{0,3}^x.$$

K e $\Theta(0,3)$ sono costanti che vanno determinate in modo che per $x = 0,3$, la funzione $U(x)$ e la sua derivata si raccordino con continuità alla funzione $u(x) x^{\alpha-\beta}$ determinata con lo sviluppo in serie valido per $x < 0,3$. Dalla (19) si ricava

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} K \text{ sen } \Theta = \frac{U}{R} \\ K \text{ cos } \Theta = \frac{1}{R\Theta'} \left\{ U' - U \frac{d \log R}{dx} \right\}. \end{array} \right.$$

A mezzo delle (20) (21) si calcolano Θ' , R e $\frac{d \log R}{dx}$ per $x = 0,3$ ed i valori così ottenuti si introducono nelle equazioni precedenti.

Nel caso di autofunzioni ∞s , essendo nullo l'autovalore, potremo scrivere le (20) (21) con sufficiente approssimazione, data la precisione con cui sono stati eseguiti i calcoli nel presente lavoro, nella forma

$$(23) \quad R = A^{-1/4} \left(\frac{x}{\varphi_0} \right)^{1/4} \left\{ 1 + \frac{1}{A} \left[\frac{1}{16} \left(\frac{x}{\varphi_0} \right)^{1/2} + \frac{3}{64} \frac{1}{x\varphi_0} - \frac{5}{64} \frac{x\varphi_0'^2}{\varphi_0^3} + \frac{1}{32} \frac{\varphi_0'}{\varphi_0^2} \right] + \frac{\gamma^2 A}{2} \frac{\varphi_0}{x} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (24) \quad \Theta(x) = & \Theta(0,3) + A^{1/2} \left\{ \int_{0,3}^x \left(\frac{\varphi_0}{x} \right)^{1/2} dx - \frac{k}{2} \int_{0,3}^x \frac{\eta}{(x\varphi_0)^{1/2}} dx \right. \\
 & + \frac{1}{2Zx_0} \int_{0,3}^x \left(\frac{x}{\varphi_0} \right)^{1/2} dx \left. \right\} - A^{-1/2} \left[\frac{1}{32} \left[\int_{0,3}^x \frac{x^{1/2} \varphi_0'^2}{\varphi_0^{5/2}} dx + \int_{0,3}^x \frac{dx}{\varphi_0^{1/2} x^{3/2}} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 \int_{0,3}^x \frac{\varphi_0'}{x^{1/2} \varphi_0^{3/2}} dx \right] + \frac{1}{8} \left(\frac{x^{1/2} \varphi_0'}{\varphi_0^{3/2}} - \frac{1}{(x\varphi_0)^{1/2}} \right)_{0,3} \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma^2}{2} \left\{ A^{1/2} \left[\int_{0,3}^x \frac{\varphi_0'}{x^{3/2} \varphi_0^{1/2}} dx - \int_{0,3}^x \frac{\varphi_0'^{1/2}}{x^{5/2}} dx \right] + A^{3/2} \int_{0,3}^x \left(\frac{\varphi_0}{x} \right)^{3/2} dx \right\} \right.
 \end{aligned}$$

In queste espressioni la costante A dipende dal numero atomico ed ha il valore

$$A = 2Z \frac{\mu}{a}.$$

Le (23) (24) sono naturalmente applicabili solo fino ad una certa distanza dal limite dell'atomo, e precisamente finché η è piccolo rispetto a φ_0 ; in prossimità del limite dell'atomo le autofunzioni ∞s si debbono calcolare elemento per elemento a mezzo di (20) e (21). Sempre nel caso di autofunzioni ∞s , poiché in prossimità dell'origine la funzione η si può senz'altro trascurare, è lecito porre per $x \leq 0.3$

$$g = A \frac{\varphi_0}{x}.$$

Tenendo conto di questa semplificazione le formule definitive per il calcolo di R , Θ' e $\frac{d \log R}{dx}$ per $x = 0.3$ sono le seguenti:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned}
 R &= \frac{0.804}{\sqrt{A}} \left\{ 1 + \frac{0.190}{A} + 1.20 \gamma^2 A \right\} \\
 \Theta' &= 1.55 \sqrt{A} - \frac{0.588}{\sqrt{A}} + \frac{\gamma^2}{2} (3.73 A^{3/2} - 2.60 A^{1/2}) \\
 \frac{d \log R}{dx} &= 1.063 - \frac{0.519}{A} - 5.11 \gamma^2 A.
 \end{aligned} \right.$$

I valori di K e di $\Theta(0,3)$ calcolati da queste espressioni e dalle (22), vengono dati nelle singole tabelle dei vari elementi.

Nella Tabella I sono riportati i valori delle funzioni φ_0 ed η , e sono altresì date alcune formule empiriche che servono per il calcolo del potenziale per i vari atomi. Nelle Tabelle II, III, riportiamo i valori numerici delle espressioni per il calcolo delle funzioni R e Θ , espressioni che come abbiamo detto sono valide solo fino ad una certa distanza dal limite dell'atomo.

Seguono le tabelle relative ai singoli elementi per le autofunzioni ∞s ; in ciascuna di esse vengono dati, oltre ai valori numerici di alcune costanti (come per esempio, il raggio atomico x_0 e l'unità di misura μ/a), i coefficienti

degli sviluppi in serie di u e v che servono per il calcolo delle autofunzioni fino ad $x = 0.3$; i valori di R , Θ ed U da 0.3 fino ai margini dell'atomo.

Dal margine dell'atomo in poi le autofunzioni ∞s si riducono semplicemente a

$$(26) \quad U = B \sqrt[4]{x} \sin(C \sqrt{x} + D)$$

dove B e D sono due costanti da determinare in modo che la (26) e la sua derivata si raccordino colla U per $x = x_0$ e: $C = 2 \sqrt{\frac{2\mu}{a}}$. In ciascuna tabella diamo quindi anche i valori delle costanti B, C, D .

Per l'aiuto prestatoci nella esecuzione dei calcoli numerici, ringraziamo qui i signori A. Biava, F. Colajori, V. Crocco, G. Giovene, E. Medi, R. Nuzzo.

TABELLA I.

$$\varphi = \varphi_0 - k\eta \quad ; \quad k = 0.083 \left(\frac{x+1}{Z} \right)^3 \quad ; \quad \text{per } x \leq 0.3 : \varphi_0 = 1 - 1.304x + 1.288x^2$$

x	φ_0	$\eta \cdot 10^{-4}$	x	φ_0	$\eta \cdot 10^{-4}$
0.3	0.721	—	6	0.059	0.005
0.4	0.660	—	7	0.046	0.0070
0.5	0.607	—	8	0.037	0.0103
0.6	0.562	—	9	0.029	0.0146
0.7	0.521	—	10	0.024	0.0201
0.8	0.485	—	12	0.017	0.0359
0.9	0.453	—	14	0.012	0.0598
1.0	0.425	—	16	0.0093	0.0942
1.2	0.375	—	18	0.0072	0.142
1.4	0.333	—	20	0.0056	0.208
1.6	0.297	—	22	0.0045	0.294
1.8	0.268	—	24	0.0037	0.405
2.0	0.244	—	26	0.0031	0.545
2.5	0.194	0.001	28	0.0026	0.721
3.0	0.157	0.001	30	0.0022	0.941
3.5	0.130	0.001	32	0.0019	1.20
4.0	0.108	0.002	34	0.0017	1.51
4.5	0.093	0.002	36	0.0015	1.88
5	0.079	0.003			

TABELLA II.

x	$\left(\frac{x}{\varphi}\right)^{1/4}$	Q	$\frac{\varphi_0}{x}$
0.3	0.803	0.19	2.40
0.4	0.882	0.15	1.65
0.5	0.953	0.13	1.21
0.6	1.016	0.11	0.937
0.7	1.076	0.10	0.744
0.8	1.133	0.09	0.606
0.9	1.187	0.08	0.503
1.0	1.238	0.08	0.425
1.2	1.338	0.07	0.312
1.4	1.432	0.07	0.238
1.6	1.523	0.06	0.186
1.8	1.609	0.06	0.149
2.0	1.693	0.06	0.122
2.5	1.893	0.06	0.0776
3.0	2.090	0.06	0.0524
3.5	2.276	0.06	0.0371
4.0	2.469	0.06	0.0270
4.5	2.635	0.06	0.0206
5.0	2.817	0.06	0.0158
6	3.175	0.07	0.00980
7	3.510	0.07	0.00658
8	3.846	0.07	0.00458
9	4.174	0.08	0.00329
10	4.509	0.09	0.00242
12	5.178	0.10	0.00139
14	5.872	0.11	0.000840
16	6.441	0.12	0.000580
18	7.071	0.14	0.00040
20	7.738	0.16	0.00028
22	8.362	0.18	0.00020
24	8.980	0.20	0.00015
26	9.578	0.22	0.00012
28	10.15	0.24	0.000093
30	10.85	0.27	0.000073
32	11.40	0.29	0.000059
34	11.86	0.32	0.000050

$$R = A^{-1/4} \left(\frac{x}{\varphi}\right)^{1/4} \left\{ 1 + \frac{1}{A} \left[\frac{1}{16} \left(\frac{x}{\varphi}\right)^{1/2} + \frac{3}{64} \frac{1}{x\varphi} - \frac{5}{64} \frac{x\varphi'^2}{\varphi^3} + \frac{1}{32} \frac{\varphi'}{\varphi^2} \right] + \frac{\gamma^2}{2} A \frac{\varphi}{x} \right\}$$

$$= A^{-1/4} \left(\frac{x}{\varphi}\right)^{1/4} \left\{ 1 + \frac{1}{A} Q + \frac{\gamma^2}{x} A \frac{\varphi}{x} \right\} ; \quad A = 2 Z\mu/a$$

TABELLA III.

x	$\int_{0,3}^x \left(\frac{\varphi_0}{x}\right)^{1/2} dx$	$\int_{0,3}^x \frac{\eta \cdot 10^{-4}}{(x\varphi_0)^{1/2}} dx$	$\int_{0,3}^x \left(\frac{x}{\varphi_0}\right)^{1/2} dx$	Ω	$\int_{0,3}^x \frac{\varphi_0'}{x^{3/2} \varphi_0^{1/2}} dx - \int_{0,3}^x \frac{\varphi_0^{1/2}}{x^{5/2}} dx$	$\int_{0,3}^x \left(\frac{\varphi_0}{x}\right)^{3/2} dx$
0.3	0.000	0.000	0.0000	0.00	— 0.000	0.000
0.4	0.141	0.000	0.0712	0.05	— 1.552	0.282
0.5	0.260	0.000	0.156	0.08	— 2.377	0.452
0.6	0.363	0.000	0.253	0.11	— 2.863	0.562
0.7	0.454	0.000	0.362	0.12	— 3.195	0.639
0.8	0.563	0.000	0.484	0.14	— 3.412	0.693
0.9	0.611	0.000	0.619	0.15	— 3.584	0.735
1.0	0.678	0.000	0.766	0.17	— 3.701	0.766
1.2	0.799	0.000	1.098	0.18	— 3.872	0.811
1.4	0.924	0.000	1.482	0.20	— 3.981	0.839
1.6	0.995	0.000	1.919	0.21	— 4.056	0.859
1.8	1.077	0.000	2.410	0.22	— 4.109	0.872
2.0	1.150	0.000	2.956	0.23	— 4.152	0.882
2.5	1.306	0.000	4.565	0.25	— 4.217	0.898
3.0	1.432	0.001	6.551	0.27	— 4.251	0.906
3.5	1.538	0.001	8.937	0.28	— 4.276	0.911
4.0	1.627	0.003	11.749	0.29	— 4.289	0.913
4.5	1.703	0.004	15.023	0.30	— 4.299	0.915
5.0	1.771	0.006	18.727	0.31	— 4.306	0.916
6	1.883	0.012	27.728	0.32	— 4.316	0.918
7	1.972	0.022	38.919	0.33	— 4.321	0.919
8	2.047	0.037	52.440	0.34	— 4.325	0.919
9	2.109	0.061	68.555	0.35	— 4.327	0.919
10	2.162	0.095	87.385	0.35	— 4.329	0.919
12	2.248	0.211	134.322	0.35	— 4.331	0.919
14	2.313	0.434	195.416	0.35	— 4.331	0.919
16	2.366	0.819	271.812	0.36	— 4.331	0.919
18	2.410	1.446	362.388	0.36	— 4.331	0.919
20	2.447	2.447	472.728	0.36	— 4.332	0.919
22	2.478	3.989	602.022	0.36	— 4.332	0.919
24	2.504	6.247	752.892	0.36	— 4.332	0.919
26	2.528	9.516	924.858	0.36	— 4.332	0.919
28	2.548	14.057	1120.032	0.36	— 4.332	0.919
30	2.566	20.356	1339.366	0.36	— 4.332	0.919
32	2.582	28.867	1589.066	0.36	— 4.332	0.919
34	2.597	40.136	1858.014	0.36	— 4.332	0.919

$$\Theta = \Theta(0,3) + A^{1/2} \left\{ \int_{0,3}^x \left(\frac{\varphi_0}{x}\right)^{1/2} dx - \frac{k}{2} \int_{0,3}^x \frac{\eta}{(x\varphi_0)^{1/2}} dx + \frac{I}{2Zx_0} \int_{0,3}^x \left(\frac{x}{\varphi_0}\right)^{1/2} dx \right\} - A^{-1/2} \Omega$$

$$+ \frac{\Upsilon^2}{2} \left\{ A^{1/2} \left[\int_{0,3}^x \frac{\varphi_0'}{x^{3/2} \varphi_0^{1/2}} dx - \int_{0,3}^x \frac{\varphi_0^{1/2}}{x^{5/2}} dx \right] + A^{3/2} \int_{0,3}^x \left(\frac{\varphi_0}{x}\right)^{3/2} dx \right\}$$

dove

$$\Omega = \frac{I}{32} \left[\int_{3,0}^x \frac{x^{1/2} \varphi_0'^2}{\varphi_0^{3/2}} dx + \int_{0,3}^x \frac{dx}{\varphi_0^{1/2} x^{3/2}} dx - \int_{0,3}^x \frac{\varphi_0'}{x^{1/2} \varphi_0^{3/2}} dx \right] + \frac{I}{8} \left(\frac{x^{1/2} \varphi_0'}{\varphi_0^{3/2}} - \frac{I}{(x\varphi_0)^{1/2}} \right)_{0,3}^x;$$

$$A = 2Z \mu/a$$

$$Z = 10; \text{Ne}$$

$$x_0 = 10.8; k = 8.300 \cdot 10^{-5}; \frac{\mu}{a} = 0.449; \beta = 0.002656; K = 0.1902;$$

$$B = 0.197; C = 1.88; D = 3.71; \alpha_s = 1.68.$$

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 3.80341	u_1	— 4.41286
v_2	7.68997	u_2	8.38845
v_3	— 11.13019	u_3	— 11.30318
v_4	12.5582	u_4	12.2680
v_5	— 11.8498	u_5	— 11.0713
v_6	9.700	u_6	8.705
v_7	— 7.023	u_7	— 6.107
v_8	4.59	u_8	3.87
v_9	— 2.75	u_9	— 2.25
v_{10}	1.5	u_{10}	1.2
v_{11}	— 0.8	u_{11}	— 0.6
v_{12}	0.4	u_{12}	0.3

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.476	2.40	+ 0.0613	2.0	0.971	5.81	— 0.084
0.4	0.521	2.80	+ 0.0331	2.5	1.08	6.30	+ 0.004
0.5	0.561	3.15	— 0.0057	3.0	1.18	6.70	+ 0.092
0.6	0.597	3.45	— 0.0338	3.5	1.26	7.04	+ 0.165
0.7	0.632	3.71	— 0.0643	4.0	1.34	7.34	+ 0.222
0.8	0.661	3.95	— 0.0909	4.5	1.41	7.61	+ 0.260
0.9	0.691	4.17	— 0.115	5	1.47	7.85	+ 0.279
1.0	0.720	4.38	— 0.129	6	1.59	8.28	+ 0.274
1.2	0.779	4.75	— 0.148	7	1.68	8.66	+ 0.220
1.4	0.831	5.06	— 0.148	8	1.75	9.01	+ 0.133
1.6	0.885	5.34	— 0.136	9	1.81	9.34	+ 0.028
1.8	0.931	5.58	— 0.114	10	1.85	9.64	— 0.077

$$Z = 14; \text{ Si}$$

$$x_0 = 13.0 ; k = 3.025 \cdot 10^{-5} ; \frac{\mu}{a} = 0,3859 ; \beta = 0.005238 ; K = 0.1726 ;$$

$$B = 0.185 ; C = 1.76 ; D = 4.84 ; \alpha_s = 2.04.$$

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 4.47174	u_1	— 5.41506
v_2	10.19540	u_2	12.09815
v_3	— 16.39938	u_3	— 18.37971
v_4	20.5019	u_4	22.1655
v_5	— 21.2791	u_5	— 22.1621
v_6	19.085	u_6	19.164
v_7	— 15.116	u_7	— 14.731
v_8	10.78	u_8	10.21
v_9	— 7.02	u_9	— 6.47
v_{10}	4.2	u_{10}	3.8
v_{11}	— 2.3	u_{11}	— 2.1
v_{12}	1.2	u_{12}	1.1
v_{13}	— 1	u_{13}	0

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.451	2.72	+ 0.0317	2.5	1.04	6.99	+ 0.117
0.4	0.494	3.17	— 0.0025	3.0	1.14	7.42	+ 0.179
0.5	0.532	3.55	— 0.0369	3.5	1.23	7.79	+ 0.212
0.6	0.566	3.89	— 0.0660	4.0	1.31	8.10	+ 0.218
0.7	0.599	4.18	— 0.0892	4.5	1.39	8.38	+ 0.206
0.8	0.630	4.45	— 0.105	5.0	1.46	8.63	+ 0.180
0.9	0.660	4.69	— 0.114	6	1.58	9.07	+ 0.093
1.0	0.688	4.91	— 0.116	7	1.69	9.45	— 0.009
1.2	0.743	5.31	— 0.106	8	1.75	9.79	— 0.109
1.4	0.795	5.65	— 0.082	9	1.83	10.11	— 0.201
1.6	0.845	5.95	— 0.048	10	1.91	10.40	— 0.274
1.8	0.892	6.22	— 0.010	12	2.00	10.93	— 0.345
2.0	0.939	6.46	+ 0.029				

$$Z = 19; K$$

$$x_0 = 15.4 ; \dot{k} = 1.210 \cdot 10^{-5} ; \frac{\mu}{a} = 0.3440 ; \beta = 0.009620 ; K = 0.1580 ;$$

$$B = 0.175 ; C = 1.66 ; D = 6.06 ; \alpha_s = 2.46.$$

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 5.23710	u_1	— 6.56779
v_2	13.47003	u_2	17.17568
v_3	— 24.02038	u_3	— 29.42806
v_4	33.1374	u_4	39.3365
v_5	— 37.7148	u_5	— 43.3937
v_6	36.926	u_6	41.140
v_7	— 31.861	u_7	— 34.515
v_8	24.69	u_8	26.05
v_9	— 17.44	u_9	— 17.94
v_{10}	11.3	u_{10}	11.4
v_{11}	— 6.8	u_{11}	— 6.7
v_{12}	4	u_{12}	4
v_{13}	— 2	u_{13}	— 2
v_{14}	1	u_{14}	1

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.429	3.06	+ 0.0056	2.5	0.985	7.73	+ 0.153
0.4	0.470	3.56	— 0.0299	3.0	1.08	8.21	+ 0.160
0.5	0.507	3.98	— 0.0595	3.5	1.17	8.60	+ 0.136
0.6	0.539	4.35	— 0.0795	4.0	1.26	8.94	+ 0.090
0.7	0.570	4.67	— 0.0901	4.5	1.34	9.23	+ 0.040
0.8	0.600	4.96	— 0.0919	5.0	1.41	9.51	— 0.020
0.9	0.628	5.23	— 0.0861	6	1.55	9.87	— 0.126
1.0	0.655	5.47	— 0.0752	7	1.67	10.35	— 0.212
1.2	0.708	5.91	— 0.0410	8	1.77	10.69	— 0.267
1.4	0.754	6.28	0.0000	9	1.87	10.99	— 0.296
1.6	0.801	6.62	+ 0.0421	10	1.94	11.27	— 0.294
1.8	0.843	6.92	+ 0.0800	12	2.04	11.79	— 0.225
2.0	0.885	7.18	+ 0.110	14	2.14	12.25	— 0.103

$$Z = 26; \text{Fe}$$

$$x_0 = 18.2 ; \quad h = 4.722 \cdot 10^{-6} ; \quad \frac{\mu}{a} = 0.3068 ; \quad b = 0.01809 ; \quad K = 0.1451 ;$$

$$B = 0.166 ; \quad C = 1.57 ; \quad D = 7.43 ; \quad \alpha_s = 2.86.$$

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 6.22180	u_1	— 8.05918
v_2	18.31498	u_2	25.01708
v_3	— 36.59013	u_3	— 49.02616
v_4	56.1379	u_4	73.3901
v_5	— 70.5984	u_5	— 90.0127
v_6	75.977	u_6	94.277
v_7	— 71.843	u_7	— 86.914
v_8	60.85	u_8	71.88
v_9	— 46.85	u_9	— 54.09
v_{10}	33.2	u_{10}	37.5
v_{11}	— 21.8	u_{11}	— 24.1
v_{12}	13.3	u_{12}	14.5
v_{13}	— 7.7	u_{13}	— 8.2
v_{14}	4	u_{14}	4
v_{15}	— 2	u_{15}	— 2

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.408	3.46	— 0.0186	3.0	1.04	9.14	+ 0.042
0.4	0.446	4.01	— 0.0496	3.5	1.13	9.58	— 0.026
0.5	0.481	4.48	— 0.0680	4.0	1.21	9.94	— 0.087
0.6	0.512	4.88	— 0.0732	4.5	1.29	10.27	— 0.141
0.7	0.542	5.25	— 0.0677	5	1.32	10.54	— 0.172
0.8	0.570	5.57	— 0.0540	6	1.49	11.02	— 0.216
0.9	0.597	5.87	— 0.0348	7	1.64	11.43	— 0.216
1.0	0.623	6.13	— 0.0137	8	1.74	11.78	— 0.178
1.2	0.673	6.61	+ 0.0318	9	1.86	12.08	— 0.125
1.4	0.720	7.03	+ 0.0710	10	1.95	12.36	— 0.056
1.6	0.765	7.39	+ 0.0994	12	2.10	12.85	+ 0.087
1.8	0.808	7.72	+ 0.116	14	2.20	13.29	+ 0.214
2.0	0.850	8.01	+ 0.122	16	2.26	13.70	+ 0.298
2.5	0.951	8.63	+ 0.098	18	2.36	14.08	+ 0.342

$$Z = 31; \text{Ga}$$

$$x_0 = 19.9 ; k = 2.786 \cdot 10^{-6} ; \frac{\mu}{a} = 0.2881 ; \beta = 0.02582 ; K = 0.1394 ;$$

$$B = 0.161 ; C = 1.52 ; D = 8,24 ; \alpha_r = 3.12.$$

v_0	1.00000	u_0	1.000000
v_1	— 6.88517	u_1	— 9.07047
v_2	21.97258	u_2	31.13193
v_3	— 46.96643	u_3	— 66.10849
v_4	76.6782	u_4	105.8425
v_5	— 102.2175	u_5	— 138.1137
v_6	— 116.237	u_6	153.302
v_7	— 115.906	u_7	— 149.318
v_8	103.35	u_8	130.21
v_9	— 83.66	u_9	— 103.14
v_{10}	62.2	u_{10}	75.1
v_{11}	— 42.8	u_{11}	— 50.7
v_{12}	27.5	u_{12}	32.0
v_{13}	— 17	u_{13}	— 19
v_{14}	9	u_{14}	11
v_{15}	— 5	u_{15}	— 6

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.396	3.71	— 0.0298	3.5	1.09	10.18	— 0.105
0.4	0.434	4.30	— 0.0555	4.0	1.18	10.51	— 0.146
0.5	0.468	4.79	— 0.0650	4.5	1.26	10.90	— 0.175
0.6	0.498	5.22	— 0.0605	5	1.34	11.15	— 0.184
0.7	0.527	5.60	— 0.0460	6	1.48	11.65	— 0.163
0.8	0.554	5.95	— 0.0252	7	1.62	12.07	— 0.106
0.9	0.580	6.26	— 0.0015	8	1.73	12.42	— 0.034
1.0	0.605	6.54	+ 0.0218	9	1.84	12.74	+ 0.046
1.2	0.654	7.05	+ 0.0634	10	1.95	13.02	+ 0.120
1.4	0.699	7.49	+ 0.0913	12	2.10	13.50	+ 0.236
1.6	0.744	7.88	+ 0.104	14	2.21	13.94	+ 0.303
1.8	0.785	8.22	+ 0.102	16	2.31	14.33	+ 0.315
2.0	0.826	8.53	+ 0.090	18	2.38	14.70	+ 0.279
2.5	0.924	9.19	+ 0.030	20	2.44	15.04	+ 0.210
3.0	1.02	9.72	— 0.042				

$Z = 37; \text{Rb}$
 $x_0 = 21.8 ; k = 1.639 \cdot 10^{-6} ; \frac{\mu}{a} = 2.2706 ; \beta = 0.3699 ; K = 0.1345 :$
 $B = 0.157 ; C = 1.47 ; D = 9.26 ; \alpha_s = 3.45.$

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 7.65289	u_1	— 10.24861
v_2	26.59775	u_2	39.05686
v_3	— 61.04338	u_3	— 90.25280
v_4	106.3173	u_4	155.0727
v_5	— 150.5607	u_5	— 215.7854
v_6	181.248	u_6	254.380
v_7	— 190.889	u_7	— 262.235
v_8	179.44	u_8	241.45
v_9	— 152.89	u_9	— 201.60
v_{10}	119.5	u_{10}	154.5
v_{11}	— 86.4	u_{11}	— 109.7
v_{12}	58.3	u_{12}	72.7
v_{13}	— 37	u_{13}	— 45
v_{14}	22	u_{14}	27
v_{15}	— 12	u_{15}	— 15

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.385	3.99	— 0.0388	3.5	1.08	10.84	— 0.143
0.4	0.421	4.61	— 0.0564	4.0	1.17	11.24	— 0.153
0.5	0.454	5.13	— 0.0557	4.5	1.24	11.59	— 0.138
0.6	0.484	5.59	— 0.0415	5	1.32	11.90	— 0.109
0.7	0.512	6.00	— 0.0194	6	1.46	12.42	— 0.027
0.8	0.539	6.36	+ 0.0056	7	1.59	12.85	+ 0.062
0.9	0.564	6.69	+ 0.0304	8	1.70	13.22	+ 0.141
1.0	0.588	6.99	+ 0.0514	9	1.83	13.54	+ 0.204
1.2	0.637	7.53	+ 0.0810	10	1.92	13.82	+ 0.246
1.4	0.680	8.00	+ 0.0905	12	2.10	14.31	+ 0.278
1.6	0.722	8.40	+ 0.0828	14	2.23	14.74	+ 0.246
1.8	0.763	8.77	+ 0.0628	16	2.31	15.14	+ 0.165
2.0	0.803	9.09	+ 0.0348	18	2.39	15.49	+ 0.067
2.5	0.898	9.79	— 0.0437	20	2.46	15.83	— 0.043
3.0	0.991	10.36	— 0.107	22	2.52	16.15	— 0.147

$$Z = 42; \text{ Mo}$$

$$x_0 = 23.2 ; k = 1.120 \cdot 10^{-6} ; \frac{\mu}{a} = 0.2588 ; \beta = 0.04793 ; K = 0.1322 ;$$

$$B = 0.156 ; C = 1.44 ; D = 9.98 ; \alpha_s = 3.68.$$

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 8.27771	u_1	— 11.21535
v_2	30.66223	u_2	46.17681
v_3	— 74.21031	u_3	— 113.64649
v_4	135.5737	u_4	205.8257
v_5	— 200.7285	u_5	— 300.3176
v_6	251.969	u_6	370.041
v_7	— 276.207	u_7	— 397.697
v_8	269.87	u_8	381.09
v_9	— 238.74	u_9	— 330.67
v_{10}	— 193.5	u_{10}	263.1
v_{11}	— 145.1	u_{11}	— 193.7
v_{12}	101.3	u_{12}	133.0
v_{13}	— 66	u_{13}	— 86
v_{14}	41	u_{14}	52
v_{15}	— 24	u_{15}	— 30

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.377	4.20	— 0.0436	3.5	1.06	11.34	— 0.131
0.4	0.413	4.85	— 0.0540	4.0	1.15	11.76	— 0.109
0.5	0.445	5.40	— 0.0453	4.5	1.22	12.12	— 0.069
0.6	0.474	5.88	— 0.0247	5	1.27	12.44	— 0.021
0.7	0.501	6.30	+ 0.0014	6	1.44	12.99	+ 0.079
0.8	0.528	6.68	+ 0.0269	7	1.54	13.43	+ 0.156
0.9	0.552	7.03	+ 0.0495	8	1.69	13.80	+ 0.212
1.0	0.576	7.34	+ 0.0662	9	1.81	14.13	+ 0.239
1.2	0.622	7.90	+ 0.0821	10	1.92	14.41	+ 0.244
1.4	0.666	8.38	+ 0.0758	12	2.09	14.92	+ 0.197
1.6	0.708	8.81	+ 0.0539	14	2.25	15.34	+ 0.104
1.8	0.747	9.19	+ 0.0229	16	2.35	15.71	— 0.031
2.0	0.786	9.53	— 0.0110	18	2.44	16.06	— 0.112
2.5	0.879	10.26	— 0.0859	20	2.50	16.39	— 0.212
3.0	0.971	10.83	— 0.127	22	2.56	16.71	— 0.286

$$Z = 47; \text{Ag}$$

$$x_0 = 24.5 ; k = 7.994 \cdot 10^{-7} ; \frac{\mu}{a} = 0.2489 ; \beta = 0.06041 ; K = 0.1310 ;$$

$$B = 0.157 ; C = 1.41 ; D = 10.66 ; \alpha_s = 3.89.$$

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 8.89816	u_1	— 12.18270
v_2	34.96173	u_2	53.85006
v_3	— 88.87276	u_3	— 140.47200
v_4	169.6367	u_4	267.0624
v_5	— 261.5827	u_5	— 406.9550
v_6	341.132	u_6	522.120
v_7	— 387.796	u_7	— 582.809
v_8	392.43	u_8	579.05
v_9	— 359.12	u_9	— 520.29
v_{10}	300.8	u_{10}	428.1
v_{11}	— 232.9	u_{11}	— 325.7
v_{12}	167.9	u_{12}	231.0
v_{13}	— 113	u_{13}	— 154
v_{14}	72	u_{14}	96
v_{15}	— 44	u_{15}	— 57

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.370	4.41	— 0.0463	4.0	1.13	12.25	— 0.045
0.4	0.405	5.08	— 0.0495	4.5	1.20	12.62	+ 0.009
0.5	0.437	5.65	— 0.0336	5	1.27	12.96	+ 0.065
0.6	0.465	6.15	— 0.0082	6	1.42	13.52	+ 0.152
0.7	0.492	6.59	+ 0.0194	7	1.55	13.97	+ 0.200
0.8	0.518	6.98	+ 0.0436	8	1.67	14.36	+ 0.213
0.9	0.542	7.34	+ 0.0619	9	1.80	14.69	+ 0.200
1.0	0.565	7.66	+ 0.0727	10	1.90	14.98	+ 0.163
1.2	0.611	8.25	+ 0.0739	12	2.09	15.49	+ 0.057
1.4	0.653	8.75	+ 0.0535	14	2.24	15.91	— 0.061
1.6	0.695	9.19	+ 0.0211	16	2.36	16.29	— 0.172
1.8	0.734	9.59	— 0.0157	18	2.44	16.63	— 0.256
2.0	0.772	9.94	— 0.0498	20	2.54	16.97	— 0.318
2.5	0.863	10.69	— 0.108	22	2.60	17.26	— 0.340
3.0	0.953	11.30	— 0.119	24	2.66	17.57	— 0.333
3.5	1.04	11.82	— 0.103				

$$Z = 53; I$$

$$x_0 = 26.1 ; k = 5.575 \cdot 10^{-7} ; \frac{\mu}{a} = 0.2387 ; \beta = 0.007750 ; K = 0.1313 ;$$

$$B = 0.158 ; C = 1.38 ; D = 11.46 ; \alpha_s = 4.14.$$

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 9.63756	u_1	— 13.34733
v_2	40.42145	u_2	63.78886
v_3	— 108.47731	u_3	— 177.42538
v_4	217.2471	u_4	355.8605
v_5	— 350.1901	u_5	— 568.6572
v_6	476.055	u_6	762.310
v_7	— 562.943	u_7	— 886.774
v_8	591.68	u_8	916.24
v_9	— 561.66	u_9	— 854.82
v_{10}	487.6	u_{10}	729.4
v_{11}	— 390.8	u_{11}	— 575.1
v_{12}	291.5	u_{12}	422.1
v_{13}	— 204	u_{13}	— 290
v_{14}	134	u_{14}	188
v_{15}	— 83	u_{15}	— 115

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.363	4.64	— 0.0476	4.0	1.10	12.80	+ 0.034
0.4	0.397	5.35	— 0.0420	4.5	1.18	13.19	+ 0.090
0.5	0.429	5.94	— 0.0188	5	1.25	13.54	+ 0.135
0.6	0.456	6.45	+ 0.0104	6	1.39	14.11	+ 0.182
0.7	0.483	6.91	+ 0.0373	7	1.52	14.58	+ 0.199
0.8	0.508	7.32	+ 0.0575	8	1.64	14.98	+ 0.142
0.9	0.532	7.70	+ 0.0690	9	1.77	15.33	+ 0.083
1.0	0.554	8.03	+ 0.0716	10	1.89	15.62	+ 0.019
1.2	0.599	8.64	+ 0.0555	12	2.06	16.13	— 0.112
1.4	0.641	9.16	+ 0.0215	14	2.24	16.57	— 0.225
1.6	0.681	9.62	— 0.0175	16	2.36	16.94	— 0.293
1.8	0.719	10.03	— 0.0531	18	2.44	17.29	— 0.320
2.0	0.757	10.40	— 0.0822	20	2.54	17.61	— 0.314
2.5	0.846	11.18	— 0.109	22	2.60	17.91	— 0.273
3.0	0.934	11.82	— 0.084	24	2.68	18.20	— 0.202
3.5	1.02	12.35	— 0.028	26	2.72	18.48	— 0.126

$$Z = 58; \text{Ce}$$

$$i = 27.2 ; k = 4.254 \cdot 10^{-7} ; \frac{\mu}{a} = 0.2314 ; \beta = 0.09359 ; K = 0.1324 ;$$

$$B = 0.161 ; C = 1.36 ; D = 12.00 ; \alpha_s = 4.32.$$

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 10.26104	u_1	— 14.33995
v_2	45.29885	u_2	72.84333
v_3	— 126.84384	u_3	— 213.04123
v_4	263.7147	u_4	445.5261
v_5	— 439.9598	u_5	— 738.7314
v_6	617.593	u_6	1024.593
v_7	— 752.852	u_7	— 1230.258
v_8	814.63	u_8	1310.01
v_9	— 795.30	u_9	— 1258.10
v_{10}	709.5	u_{10}	1103.9
v_{11}	— 583.9	u_{11}	— 894.1
v_{12}	447.0	u_{12}	673.9
v_{13}	— 320	u_{13}	— 476
v_{14}	216	u_{14}	316
v_{15}	— 138	u_{15}	— 196

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.358	4.84	— 0.0470	4 0	1.09	13.24	+ 0.0900
0.4	0.392	5.56	— 0.0342	4 5	1.16	13.63	+ 0.134
0.5	0.422	6 18	— 0.0260	5	1.24	14.00	+ 0.163
0 6	0.450	6 70	+ 0 0244	6	1.37	14.59	+ 0.162
0.7	0.476	7.17	+ 0.0490	7	1.51	15 07	+ 0.118
0.8	0.500	7 60	+ 0 0649	8	1 64	15.47	+ 0.049
0.9	0.524	7 98	+ 0.0688	9	1.76	15.82	— 0.028
1.0	0.546	8.33	+ 0.0543	10	1.88	16 12	— 0.101
1.2	0.590	8 96	+ 0.0353	12	2.06	16.64	— 0.221
1.4	0.631	9.50	— 0.0060	14	2.23	17.08	— 0.200
1.6	0.671	9 97	— 0.0459	16	2.40	17.45	— 0.313
1.8	0.709	10.39	— 0 0773	18	2 50	17 78	— 0.280
2.0	0.746	10.77	— 0.0952	20	2.59	18.09	— 0.234
2.5	0.834	11.57	— 0.0924	22	2.71	18.38	— 0.157
3.0	0.920	12.23	— 0 0405	24	2.75	18 65	— 0.069
3.5	1.00	12.78	+ 0.0280	26	2.81	18.92	+ 0.300

Z = 67; Ho

 $x_0 = 29,2$; $k = 2.760 \cdot 10^{-7}$; $\frac{\mu}{a} = 0.2202$; $\beta = 0.1271$; $K = 0.1378$;B = 0.170 : C = 1.33 ; D = 13.05 ; $\alpha_s = 4.66$.

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 11.40902	u_1	— 16.19716
v_2	54.90957	u_2	91.14407
v_3	— 165.13950	u_3	— 289.98981
v_4	365.3936	u_4	650.3858
v_5	— 645.2426	u_5	— 1146.5478
v_6	954.923	u_6	1681.828
v_7	— 1223.606	u_7	— 2127.846
v_8	1388.64	u_8	2380.52
v_9	— 1419.33	u_9	— 2396.89
v_{10}	1323.7	u_{10}	2200.9
v_{11}	— 1137.7	u_{11}	— 1863.2
v_{12}	908.3	u_{12}	1465.7
v_{13}	— 679	u_{13}	— 1079
v_{14}	477	u_{14}	747
v_{15}	— 317	u_{15}	— 489

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0 350	5.17	— 0.0433	4.5	1.13	14.40	+ 0.151
0.4	0.383	5.93	-- 0.0182	5	1.20	14.77	+ 0.132
0.5	0.413	6.57	+ 0.0163	6	1.34	15.39	+ 0.056
0.6	0.439	7.13	+ 0 0454	7	1.47	15.89	— 0.039
0.7	0.465	7.62	+ 0 0624	8	1.60	16 32	— 0.128
0.8	0 489	8.07	+ 0 0658	9	1.73	16.68	— 0.198
0.9	0 512	8.47	+ 0.0573	10	1.84	16.99	— 0.244
1.0	0.533	8.83	+ 0.0409	12	2.05	17.51	— 0.274
1.2	0.576	9 49	— 0.0054	14	2.24	17.95	— 0.239
1.4	0.616	10.06	— 0.0504	16	2.37	18.32	— 0.161
1.6	0.655	10.55	— 0.0816	18	2.48	18.67	— 0.056
1.8	0.692	11.00	— 0.0954	20	2.59	18.97	+ 0.046
2.0	0.728	11.39	— 0.0925	22	2.67	19.27	+ 0.153
2.5	0.814	12.24	-- 0.0360	24	2.73	19.54	+ 0.242
3.0	0.899	12.92	+ 0.0434	26	2.84	19.81	+ 0.323
3.5	0.979	13.50	+ 0.108	28	2.84	20.06	+ 0.368
4.0	1.06	13.99	+ 0.145				

$$Z = 74; W$$

$$x_0 = 30.6 ; k = 2.048 \cdot 10^{-7} ; \frac{\mu}{a} = 0.2128 ; \beta = 0.1577 ; K = 0.1444 ,$$

$$B = 0.179 ; C = 1.30 ; D = 13.89 ; \alpha_s = 4.91.$$

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 12.34398	u_1	— 17.74078
v_2	63.31604	u_2	107.63765
v_3	— 200.65021	u_3	— 364.22553
v_4	464.4998	u_4	859.5821
v_5	— 854.4885	u_5	— 1583.9396
v_6	1313.250	u_6	2418.610
v_7	— 1743.566	u_7	— 3176.116
v_8	2047.03	u_8	3679.78
v_9	— 2161.18	u_9	— 3831.46
v_{10}	2079.5	u_{10}	3633.2
v_{11}	— 1842.5	u_{11}	— 3172.2
v_{12}	1515.3	u_{12}	2571.9
v_{13}	— 1165	u_{13}	— 1949
v_{14}	843	u_{14}	1390
v_{15}	— 575	u_{15}	— 937

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.345	5.42	— 0.0378	4.5	1.11	14.96	+ 0.109
0.4	0.377	6.21	— 0.0040	5	1.18	15.35	+ 0.058
0.5	0.406	6.88	+ 0.0328	6	1.33	15.99	— 0.056
0.6	0.432	7.45	+ 0.0574	7	1.46	16.50	— 0.151
0.7	0.457	7.96	+ 0.0656	8	1.58	16.94	— 0.216
0.8	0.481	8.42	+ 0.0586	9	1.71	17.31	— 0.246
0.9	0.503	8.84	+ 0.0401	10	1.84	17.66	— 0.246
1.0	0.525	9.21	+ 0.0159	12	2.04	18.15	— 0.189
1.2	0.567	9.89	— 0.0369	14	2.23	18.62	— 0.070
1.4	0.606	10.48	— 0.0761	16	2.41	18.97	+ 0.045
1.6	0.645	10.99	— 0.0931	18	2.48	19.34	+ 0.172
1.8	0.681	11.45	— 0.0884	20	2.54	19.62	+ 0.258
2.0	0.716	11.86	— 0.0673	22	2.68	19.95	+ 0.347
2.5	0.801	12.73	+ 0.0191	23	2.73	20.19	+ 0.386
3.0	0.884	13.44	+ 0.0978	26	2.79	20.50	+ 0.402
3.5	0.963	14.03	+ 0.138	28	2.84	20.71	+ 0.392
4.0	1.04	14.54	+ 0.139	30	2.94	21.00	+ 0.353

$Z = 80; \text{Hg}$ $x_0 = 31.7$; $k = 1.621 \cdot 10^{-7}$; $\frac{\mu}{a} = 0.2072$; $\beta = 0.1873$; $K = 0.1529$; $B = 0.191$; $C = 1.29$; $D = 14.44$; $\alpha_s = 5.11$.

v_0	1.00000	u_0	1.00000
v_1	— 13.18965	u_1	— 19.16232
v_2	71.34381	u_2	123.79120
v_3	— 236.11635	u_3	— 440.82317
v_4	567.3108	u_4	1085.0355
v_5	— 1079.0323	u_5	— 2073.0997
v_6	1710.227	u_6	3270.884
v_7	— 2336.974	u_7	— 4427.212
v_8	2819.23	u_8	5276.88
v_9	— 3055.06	u_9	— 5643.47
v_{10}	3014.5	u_{10}	5490.8
v_{11}	— 2736.5	u_{11}	— 4915.0
v_{12}	2304.6	u_{12}	4082.0
v_{13}	— 1814	u_{13}	— 3167
v_{14}	1341	u_{14}	2311
v_{15}	— 939	u_{15}	— 1592

x	R	Θ	\bar{U}	x	R	Θ	U
0.3	0.341	5.65	— 0.0307	4.5	1.10	15.45	+ 0.044
0.4	0.372	6.46	+ 0.0101	5	1.18	15.84	— 0.024
0.5	0.401	7.15	+ 0.0466	6	1.31	16.49	— 0.142
0.6	0.427	7.74	+ 0.0648	7	1.44	17.02	— 0.213
0.7	0.451	8.26	+ 0.0632	8	1.57	17.46	— 0.236
0.8	0.475	8.73	+ 0.0462	9	1.69	17.84	— 0.217
0.9	0.497	9.16	+ 0.0197	10	1.81	18.16	— 0.174
1.0	0.518	9.55	— 0.0097	12	2.01	18.71	— 0.040
1.2	0.560	10.24	— 0.0625	14	2.20	19.16	+ 0.106
1.4	0.597	10.85	— 0.0904	16	2.38	19.54	+ 0.235
1.6	0.636	11.37	— 0.0906	18	2.49	19.87	+ 0.326
1.8	0.672	11.84	— 0.0682	20	2.56	20.19	+ 0.381
2.0	0.707	12.26	— 0.0325	22	2.67	20.48	+ 0.407
2.5	0.791	13.16	+ 0.0671	24	2.80	20.76	+ 0.402
3.0	0.873	13.88	+ 0.129	26	2.86	21.01	+ 0.363
3.5	0.950	14.49	+ 0.136	28	2.90	21.26	+ 0.292
4.0	1.03	15.01	+ 0.102	30	2.92	21.49	+ 0.209

$$Z = 92; U$$

$$x_0 = 34.1 ; k = 1.066 \cdot 10^{-7} ; \frac{\mu}{a} = 0.1976 ; \beta = 0.2577 ; K = 0.1805 ;$$

$$B = 0.228 ; C = 1.26 ; D = 15.60 ; \alpha_0 = 5.46.$$

v_0	1.00000	u_0	— 1.00000
v_1	— 15.07648	u_1	— 22.42622
v_2	90.60110	u_2	164.07771
v_3	— 326.47690	u_3	— 645.84395
v_4	843.0255	u_4	1725.1473
v_5	— 1709.4048	u_5	— 3534.0590
v_6	— 2872.335	u_6	5934.641
v_7	— 4143.935	u_7	— 8504.130
v_8	5261.69	u_8	10690.65
v_9	— 5987.33	u_9	— 120274.55
v_{10}	6190.5	u_{10}	1227.9
v_{11}	— 5879.1	u_{11}	— 11506.5
v_{12}	5173.1	u_{12}	9991.9
v_{13}	— 4248	u_{13}	— 8096
v_{14}	3274	u_{14}	6161
v_{15}	— 2381	u_{15}	— 4423

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0.3	0.334	6.11	— 0.0105	5	1.14	16.79	— 0.182
0.4	0.364	6.69	+ 0.0411	6	1.28	17.47	— 0.227
0.5	0.393	7.68	+ 0.0699	7	1.41	18.02	— 0.189
0.6	0.418	8.30	+ 0.0682	8	1.53	18.48	— 0.099
0.7	0.442	8.85	+ 0.0434	9	1.67	18.87	+ 0.009
0.8	0.464	9.34	+ 0.0070	10	1.78	19.20	+ 0.113
0.9	0.485	9.79	— 0.0314	12	1.99	19.76	+ 0.286
1.0	0.506	10.19	— 0.0636	14	2.22	20.22	+ 0.394
1.2	0.547	10.92	— 0.0985	16	2.36	20.59	+ 0.420
1.4	0.585	11.55	— 0.0894	18	2.53	20.93	+ 0.397
1.6	0.622	12.10	— 0.0501	20	2.66	21.22	+ 0.332
1.8	0.657	12.60	+ 0.0035	22	2.72	21.50	+ 0.227
2.0	0.691	13.04	+ 0.0566	24	2.80	21.76	+ 0.111
2.5	0.773	13.98	+ 0.138	26	2.85	22.02	— 0.020
3.0	0.853	14.73	+ 0.127	28	2.91	22.26	— 0.145
3.5	0.929	15.38	+ 0.055	30	2.96	22.49	— 0.260
4.0	1.01	15.91	— 0.037	32	2.98	22.72	— 0.363
4.5	1.07	16.37	— 0.129	34	3.06	22.94	— 0.453