ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

D' altra parte le stesse (1) rappresentano, in base al metodo di integrazione di Jacobi, quando vi si faccia $X_1 = t - t_0$, l' integrale generale del sistema (C); le P, t_0, X_2, X_3, ..., X_n sono allora le costanti di integrazione.

Ciò posto, eseguendo la trasformazione (1), le equazioni del moto divengono

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dP_1}{dt} = 0\,, \quad \frac{dX_1}{dt} = 1\,; \quad \frac{dP_i}{dt} = \frac{dX_i}{dt} = 0 \quad (i = 2\,, 3\,, \ldots, n).$$

Ogni loro soluzione si potrebbe evidentemente dire stazionaria, prendendo alla lettera la definizione del sig. Routh. In particolare dunque la soluzione Σ, donde abbiam preso le mosse.

Meccanica. — *Sulla determinazione dei moti sismici.* Nota I del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

Sebbene la parte del presente lavoro che tratta del microsismografo a componenti orizzontali si possa estendere a tutti i pendoli verticali del tipo « Brassart-Agamennone », io però intendo senz' altro di riferirmi ai microsismografi « Vicentini » minutamente illustrati in apposite pubblicazioni dell' Istituto di Fisica dell' Università di Padova, alle quali rimando il lettore per tutto ciò che riguarda la loro costruzione ed il loro funzionamento [1].

In una Nota pubblicata in questi Rendiconti [2] il dott. Burgatti risolve il problema dell' interpretazione dei sismogrammi, determinando gli elementi d' una traslazione pendolare orizzontale del terreno mediante semplici proprietà geometriche del diagramma; però le ipotesi ch' egli fa, mi sembrano troppo restrittive perchè si possano applicare a qualche caso pratico i risultati da lui ottenuti.

In questo lavoro invece, supponendo noto il movimento *relativo* degli strumenti [3], facendo certe ipotesi praticamente giustificate sulle varie resistenze, e considerando tutti i punti di attacco, sia delle masse pendolari che delle leve registratrici, come costituenti un sistema rigido col terreno,

(1) Fra queste cito soltanto le seguenti: G. Pacher, *I microsismografi dell'Istituto di Fisica della R. Università di Padova*, R. Istituto Veneto 1897; G. Vicentini e G. Pacher, *Microsismografo per la componente verticale*, id. id. 1899; T. Gnesotto, *Sull' impiego del microsismografo a due componenti per lo studio dei movimenti lenti del suolo*, id. id. 1899.

(2) *Sul moto di un pendolo verticale* ecc., seduta del 18 novembre 1900.

(3) Vedi a questo proposito le pubblicazioni citate e specialmente la terza, in cui il dott. T. Gnesotto determina il movimento relativo del pendolo verticale partendo dalla considerazione del diagramma.

mi avvio alla soluzione completa del problema, costruendo intanto le equazioni differenziali che reggono il movimento *assoluto* degli strumenti sismici rispetto ad una terna d'assi cartesiani ortogonali trascinata nel movimento generale della terra.

§ 1. *Teoria del microsismografo a due componenti orizzontali (Pendolo sferico).*

Sia (fig. 1) $\Omega(\xi\,\eta\,\zeta)$ questa terna, con l'asse ζ rivolto in basso; sia S(X Y Z) un sistema d'assi fisso nel terreno coll'origine S nel punto di sospensione del pendolo, e infine $S(x, y, z)$ un terzo sistema fisso rigidamente nel pendolo, con l'asse z passante per il baricentro: allo stato di perfetta quiete questi tre sistemi siano sovrapposti.

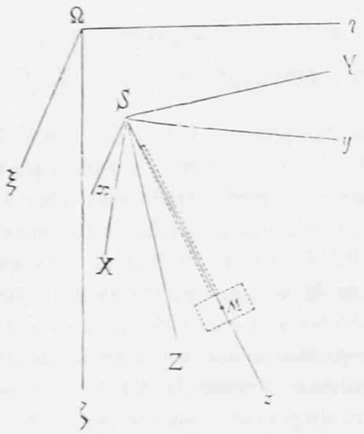

Fig. 1.

Il movimento *relativo* del pendolo consiste in una rotazione intorno ad S, di valore assoluto sempre tanto piccolo da potersi scomporre in tre rotazioni successive λ, μ, ν intorno ai tre assi X, Y, Z; cosicchè, convenendo che il senso positivo di queste rotazioni sia rispettivamente Y Z, Z X, X Y, e supponendo trascurabili i termini di secondo grado in λ, μ, ν, le coordinate rispetto al terreno d'un punto qualunque del pendolo saranno

$$(1) \qquad \begin{cases} X_i = x_i + \mu z_i - \nu y_i \\ Y_i = y_i + \nu x_i - \lambda z_i \\ Z_i = z_i + \lambda y_i - \mu x_i . \end{cases}$$

Per ipotesi il terreno, nella regione prossima allo strumento, costituisce un sistema rigido con gli assi S(X Y Z); quindi il suo movimento più generale consisterà in una traslazione ed una rotazione, con le quali si può passare dal sistema $\Omega(\xi\,\eta\,\zeta)$ al sistema S(X Y Z). Chiamando ξ, η, ζ le componenti della traslazione (coordinate dell' origine mobile S) e supponendo ancora la rotazione tanto piccola da potersi scomporre in tre rotazioni successive α, β, γ intorno agli assi ξ, η, ζ, la posizione assoluta d' un punto $(X_i\,Y_i\,Z_i)$ del terreno o riferito al terreno sarà allora definita dalle equazioni

$$(2)\quad \begin{cases} \xi_i = \xi + X_i + \beta Z_i - \gamma Y_i \\ \eta_i = \eta + Y_i + \gamma X_i - \alpha Z_i \\ \zeta_i = \zeta + Z_i + \alpha Y_i - \beta X_i\,. \end{cases}$$

Cioè, ricordando le (1), trascurando sempre i termini di secondo grado nelle variabili, e ponendo per brevità

$$(A)\qquad \alpha + \lambda = \pi\,,\quad \beta + \mu = \chi\,,\quad \gamma + \nu = \varrho\,,$$

il movimento *assoluto* del pendolo è definito dalle equazioni

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_i = \xi + x_i + \chi z_i - \varrho y_i \\ \eta_i = \eta + y_i + \varrho x_i - \pi z_i \\ \zeta_i = \zeta + z_i + \pi y_i - \chi x_i \end{cases}$$

($i = 0\,, 1\,, 2\,....$ esteso a tutti i punti del pendolo).

Per ottenere gli spostamenti virtuali con l' approssimazione propostaci, conviene prescindere dall' ipotesi che tutte le variabili sono infinitesime: applicando allora le formole generali dei sistemi rigidi, chiamando $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta, \delta\pi, \delta\chi, \delta\varrho$ le componenti delle traslazioni e delle rotazioni virtuali e conservando a tutte le lettere il significato convenuto, si avrebbe allora

$$\delta\xi_i = \delta\xi + \delta\chi(\zeta_i - \zeta) - \delta\varrho(\eta_i - \eta) \text{ ecc.}$$

Ma nel nostro caso

$$\delta\pi = \delta\alpha + \delta\lambda\,,\quad \delta\chi = \delta\beta + \delta\mu\,,\quad \delta\varrho = \delta\gamma + \delta\nu\,;$$

e siccome $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$ hanno in ogni istante un valore perfettamente determinato, così le loro variazioni arbitrarie $\delta\xi, \ldots, \delta\gamma$ saranno tutte nulle, e resterà

$$(4)\quad \begin{cases} \delta\xi_i = \delta\mu(\zeta_i - \zeta) - \delta\nu(\eta_i - \eta) \\ \delta\eta_i = \delta\nu(\xi_i - \xi) - \delta\lambda\,(\zeta_i - \zeta) \\ \delta\zeta_i = \delta\lambda(\eta_i - \eta) - \delta\mu(\xi_i - \xi)\,. \end{cases}$$

Invece per avere le componenti delle velocità e delle accelerazioni basterà ricorrere alle (3) e derivarle una o due volte rapporto al tempo, ricordando che sono variabili tutte le lettere greche. Quindi:

$$(5)\quad \begin{aligned} \xi'_i &= \xi' + \chi' z_i - \varrho' y_i \text{ ecc.} \\ \xi''_i &= \xi'' + \chi'' z_i - \varrho'' y_i \text{ ecc.} \end{aligned}$$

(per le altre basta permutare circolarmente tutte le lettere).

Se $\Xi_i\, H_i\, Z_i$ sono le proiezioni sugli assi fissi della risultante di tutte le forze che agiscono sul punto di massa m_i, partendo dall'equazione simbolica dei lavori virtuali

$$\Sigma_i[(\Xi_i - m_i\xi''_i)\,\delta\xi_i + (H_i - m_i\eta''_i)\,\delta\eta_i + (Z_i - m_i\zeta''_i)\,\delta\zeta_i] = 0,$$

sostituendovi per le accelerazioni e gli spostamenti virtuali le espressioni trovate (5) e (4), raccogliendo ed eguagliando a zero i coefficienti delle tre variazioni $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$, avremo le tre equazioni effettive del moto:

$$\begin{aligned} &\Sigma_i((\eta_i - \eta)\, Z_i - (\zeta_i - \zeta)\, H_i) + \eta''\Sigma m_i(\zeta_i - \zeta) - \zeta''\Sigma m_i(\eta_i - \eta) - \\ &- \pi''\Sigma m_i(z_i(\zeta_i - \zeta) + y_i(\eta_i - \eta)) + \chi''\Sigma m_i x_i(\eta_i - \eta) + \varrho''\Sigma m_i x_i(\zeta_i - \zeta) = 0 \end{aligned}$$

ecc. (basta permutare circolarmente le lettere).

Sostituendo infine ai binomi $(\xi_i - \xi)$, $(\eta_i - \eta)$, $(\zeta_i - \zeta)$ le loro espressioni ricavate dalle (3) ed omettendo tutti i termini di secondo grado rispetto alle variabili o alle loro derivate, avremo

$$(6) \quad \begin{aligned} &\Sigma_i(y_i - \pi z_i + \varrho x_i)\, Z_i - \Sigma(z_i - \chi x_i + \pi y_i)\, H_i + \\ &+ \eta''\, \Sigma m_i z_i - \zeta''\, \Sigma m_i y_i - \pi''\, \Sigma m_i(z_i^2 + y_i^2) + \chi''\Sigma m_i x_i y_i + \varrho''\Sigma m_i x_i z_i = 0 \end{aligned}$$

ecc.

Ora chiamando M la massa del pendolo, l la distanza del punto di sospensione S dal baricentro, e ricordando che questo si trova sull'asse della z abbiamo:

$$(B) \quad \begin{cases} \Sigma m_i x_i = \Sigma m_i y_i = 0 \\ \Sigma m_i z_i = \mathrm{M}l \end{cases}$$

D'altra parte per la forma del pendolo l'asse della z è un asse principale d'inerzia e gli altri due sono paralleli ad altri due assi principali d'inerzia, cosicchè

$$(B_1) \qquad \Sigma m_i x_i y_i = \Sigma m_i y_i z_i = \Sigma m_i z_i x_i = 0\,;$$

Facendo infine le solite posizioni

$$(B_2) \quad \Sigma_i m_i(y_i^2 + z_i^2) = \mathrm{M}_x\,, \quad \Sigma m_i(z_i^2 + x_i^2) = \mathrm{M}_y\,, \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2) = \mathrm{M}_z$$

le equazioni differenziali del moto diventano

$$(6_1) \quad \begin{cases} \Sigma_i(y_i - \pi z_i + \varrho x_i)\, Z_i - \Sigma_i(z_i - \chi x_i + \pi y_i)\, H_i - \pi''\mathrm{M}_x + \eta''\mathrm{M}l = 0 \\ \Sigma_i(z_i - \chi x_i + \pi y_i)\, \Xi_i - \Sigma_i(x_i - \varrho y_i + \chi z_i)\, Z_i - \chi''\mathrm{M}_y - \xi''\mathrm{M}l = 0 \\ \Sigma_i(x_i - \varrho y_i + \chi z_i)\, H_i - \Sigma_i(y_i - \pi z_i + \varrho x_i)\, \Xi_i - \varrho''\mathrm{M}_z \qquad = 0 \end{cases}$$

Restano a calcolare le componenti delle forze: A tal fine tengo conto:

1°) della *gravità* che si può ritenere applicata al baricentro $(0, 0, l)$ ed ha per componenti secondo gli assi fissi

$$0\,,\ 0\,,\ \mathrm{M}g\,,$$

2°) *dell'attrito delle leve scriventi* che suppongo opposto e proporzionale alla velocità relativa del pendolo: trascurando la resistenza che esso può opporre alle rotazioni intorno all'asse delle z, (la quale resistenza sarebbe nulla se l'estremità superiore della leva amplificatrice fosse esattamente sull'asse z), noi possiamo rappresentarlo con una forza applicata al baricentro: chiamando allora s, s_1, due coefficienti variabili (perchè l'attrito varia nei singoli punti del nastro), le componenti secondo gli assi x, y, z, e quindi con la voluta approssimazione anche secondo gli assi fissi, saranno

$$-s\mu', \quad +s_1\lambda', \quad 0;$$

3°) della *forza elastica* dovuto alla *flessione* del filo di sospensione (supposto cilindrico ed omogeneo) proporzionale ed opposta alle flessioni μ e λ, e dall'*attrito interno* di flessione, proporzionale ed opposto alle velocità μ' e λ'. — Chiamando f ed f_1 i relativi coefficienti (costanti) e supponendoli calcolati in modo che queste forze si possano ritenere applicate al baricentro, le proiezioni della loro risultante sugli assi x, y, z, e quindi a meno di quantità trascurabili anche sugli assi fissi sono:

$$-(f\mu + f_1\mu'), \quad +(f\lambda + f_1\lambda'), \quad 0;$$

4°) della *resistenza dell'aria* che è applicata effettivamente ai singoli punti della superficie, ma si può sostituire con una forza applicata al baricentro ed una coppia intorno all'asse della z (¹). Ritenendola proporzionale ed opposta alla velocità, ed essendo a, a_1, a_2 tre coefficienti costanti, le componenti della forza saranno

$$-a\xi'_0, \quad -a\eta'_0, \quad -a_1\zeta'_0$$

ed il momento della coppia sarà $-a_2\varrho'$. Ossia, ricavando dalle (5) i valori di ξ'_0, η'_0, ζ'_0 le componenti della forza saranno

$$-a(\xi' + l\chi'), \quad -a(\eta' - l'\pi'), \quad -a_1\zeta';$$

e sostituendo alla coppia una unica forza equivalente applicata nel punto $(0, 1, 0)$ e costantemente normale al piano yz, le sue componenti secondo gli assi mobili e quindi anche secondo gli assi fissi saranno

$$+a_2\varrho', \quad 0, \quad 0;$$

5°) infine del *momento di torsione* del filo e dell'*attrito interno di torsione* proporzionali ed opposti rispettivamente alla rotazione ν ed alla velocità ν'; chiamato τ e τ_1 i coefficienti (costanti) relativi alla forza elastica e allo smorzamento, e sostituendo alla coppia un'unica forza costantemente parallela all'asse x applicata al punto $(0, 1, 0)$ le sue componenti saranno

$$+(\tau\nu + \tau_1\nu'), \quad 0, \quad 0.$$

Riassumendo tutte queste considerazioni tengo conto dunque delle seguenti forze: Nel baricentro $(0, 0, l)$

$$\begin{aligned} \Xi_0 &= -s\mu' - (f\mu + f_1\mu') - a(\xi' + l\chi') \\ H_0 &= s_1\lambda' + (f\lambda + f_1\lambda') - a(\eta' - l\pi') \\ Z_0 &= \mathrm{M}g - a_1\zeta'; \end{aligned}$$

(¹) Ometto per brevità la dimostrazione di una tale asserzione, alla quale si arriva ricordando la forma del pendolo, simmetrica rispetto all'asse delle z: osservo che da quanto precede le costanti a, a_1, a_2 sono proporzionali alla resistenza opposta dall'aria ad un movimento traslatorio orizzontale, traslatorio verticale, rotatorio intorno all'asse delle z, con velocità traslatoria o angolare eguale all'unità.

nel punto $(0\,,\,1\,,\,0)$

$$\begin{gathered}\Xi_1 = a_2\varrho' + \tau\nu + \tau_1\nu' \\ H_1 = Z_1 = 0\end{gathered}$$

in tutti gli altri punti: $\Xi_i = H_i = Z_i = 0$.

Sostituendo queste espressioni nelle (6_1), le somme dei primi membri prendono rispettivamente la forma seguente

$$\begin{aligned}&-l(\pi g\mathrm{M} + al\,\pi' - a\eta' + f\lambda + (f_1 + s_1)\,\lambda') \\ &-l(\chi g\mathrm{M} + al\,\chi' + a\zeta' + f\mu + (f_1 + s)\,\mu') \\ &-(a_2\varrho' + \tau\nu + \tau_1\nu')\,;\end{aligned}$$

cosicchè infine sostituendo alle variabili $\pi\ \chi\ \varrho$ e alle loro derivate i valori dati delle (A), dividendo le due prime equazioni per l e raccogliendo in ciascuna delle tre equazioni tutti i termini indipendenti dalle incognite mediante le posizioni

$$(\mathrm{C})\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{M}_x}{l}\,\lambda'' + (al + f_1 + s_1)\,\lambda' + (g\mathrm{M} + f)\,\lambda = \Psi \\ &\frac{\mathrm{M}_y}{l}\,\mu'' + (al + f_1 + s)\,\mu' + (g\mathrm{M} + f)\,\mu = \Phi \\ &\mathrm{M}_z\,\nu'' + (a_2 + \tau_1)\,\nu' \qquad + \tau\nu \qquad\qquad = X\,,\end{aligned}\right.$$

le equazioni diventeranno:

$$(7)\qquad\begin{aligned}&+\mathrm{M}\xi'' + a\xi' + \frac{\mathrm{M}_y}{l}\beta'' + al\,\beta' + g\mathrm{M}\,\beta + \Phi = 0 \\ &-\mathrm{M}\eta'' - a\eta' + \frac{\mathrm{M}_x}{l}\alpha'' + al\,\alpha' + g\mathrm{M}\,\alpha + \Psi = 0 \\ &\qquad\qquad\mathrm{M}_z\gamma'' + a_2\,\gamma' \qquad\qquad + X = 0\,.\end{aligned}$$

Da queste apparisce che il moto del terreno si può scomporre in due movimenti piani ortogonali fra loro e all'orizzonte ed in una rotazione intorno alla verticale, tutti e tre fra loro indipendenti: apparisce ancora che le traslazioni verticali del terreno non hanno influenza sensibile sul moto generale del pendolo; cosicchè per determinarle è necessario un apparecchio di natura diversa.

§ 2. *Teoria del microsismografo a componente verticale.*

La ricerca delle equazioni generali analoghe alle (7) sarebbe un problema analiticamente assai complicato, qualora si volesse tener conto del movimento della sbarra elastica: perciò suppongo senz'altro che lo strumento sia ridotto ad un punto materiale (centro della sezione libera della sbarra) di massa m, soggetto alla gravità, alla forza elastica della sbarra e alle varie resistenze. Suppongo ancora: che gli assi fissi nel terreno siano paralleli a quelli omonimi del problema precedente; che l'asse Z passi per il centro della sezione incastrata della sbarra, l'asse Y per il centro della sezione libera quando questa è in quiete *assoluta* e l'asse X sia parallela alla larghezza della sbarra (fig. 2); che questa sia tanto grande rispetto alla grossezza da rendere trascurabili le oscillazioni parallele all'asse delle X; infine che la tangente all'asse longitudinale della sbarra nel suo estremo libero si conservi sensibilmente parallela all' asse delle Y. Cosicchè, osservando che quando la massa è in quiete *relativa* essa ha rispetto al terreno le coordi-

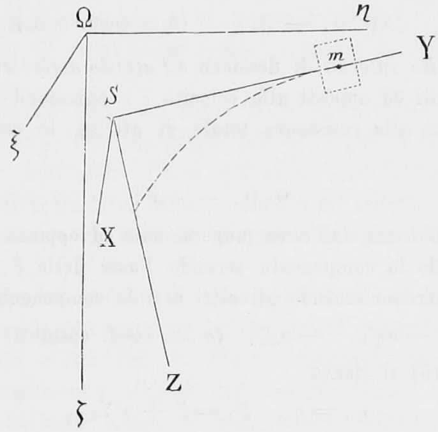

Fig. 2.

nate sensibilmente costanti (¹) $(0\,,\ Y_0\,,\ 0)$, chiamando z lo spostamento dalla posizione d'equilibrio, il suo movimento relativo è dato dalle equazioni

$$X_1 = 0\,,\quad Y_1 = Y_0\,,\quad Z_1 = z \tag{8}$$

Si osservi ora che questo movimento relativo si può considerare come una rotazione intorno ad S le cui componenti sono

$$\lambda = \frac{z}{Y_0}\,,\quad \mu = \nu = 0\,;$$

quindi per la trattazione analitica del problema, fino alla deduzione delle equazioni differenziali del moto, potremo senz'altro adoperare i risultati ottenuti nella trattazione del problema precedente. Nel caso attuale è da considerare soltanto la (6), che corrisponde allo spostamento arbitrario $\delta\lambda = \frac{\delta z}{Y_0}$; e questa, dando all'indice i il valore $i=1$ e ponendo $x_1 = z_1 = 0, y_1 = Y_0$, si ridurrà alla forma:

$$Y_0(Z_1 - \pi H_1) - \zeta'' m Y_0 - \pi'' M_x = 0\,. \tag{9}$$

(¹) Veramente anche quando m è in quiete relativa la coordinata Z ha un valore variabile con α; ma le sue variazioni sono proporzionali al coseno di α, e quindi trascurabili perchè dell'ordine di α^2. Anche di ciò om tto la dimostrazione per brevità.

Rimangono da calcolare le componenti delle forze attive. Quando m è in quiete relativa, le sue coordinate rispetto agli assi X Y Z corrispondono a certe deformazioni della sbarra, per le quali si sviluppano forze elastiche equilibrate dal peso di m: restano quindi da considerare soltanto:

1°) la *forza elastica* di flessione corrispondente alle oscillazioni z, le cui componenti secondo X Y Z sono

$$0\,,\,0\,,\,-kz \qquad (k = \text{coeff. cost.})$$

2°) l'*attrito interno* di flessione e *l'attrito delle leve scriventi*, ambedue proporzionali ed opposti alle velocità z': chiamando k_1 il coefficiente (variabile) relativo alla resistenza totale di attrito, le componenti di essa saranno

$$0\,,\,0\,,\,-k_1 z'\,;$$

3°) la *resistenza dell'aria* proporzionale ed opposta alla velocità assoluta: trascurando la componente secondo l'asse delle ξ, che non comparisce nelle (9), avremo secondo gli altri assi le componenti

$$-a\eta'_1\,, \quad -a_3\zeta'_1 \quad (a\,,\,a_3 \text{ coeff. costanti})$$

e siccome dalle (5) si ricava

$$\eta'_1 = \eta'\,, \quad \zeta'_1 = \zeta' + \pi' Y_0\,,$$

avremo infine le espressioni

$$-a\eta'\,, \quad -a_3(\zeta' + \pi' Y_0)\,.$$

Ricordando che anche le forze 1° e 2° si possono riguardare come componenti secondo gli assi fissi, sarà dunque

$$H_1 = -a\eta'\,; \quad Z_1 = -kz - k_1 z' - a_3(\zeta' + \pi' Y_0)\,;$$

e sostituendo questi valori nelle (9), trascurando i termini di secondo grado nelle variabili, dividendo l'equazione per Y_0, e raccogliendo i termini noti mediante la posizione

$$mz'' + (k_1 + a_3)\,z' + kz = V \tag{D}$$

questa prenderà infine la forma

$$m(\zeta'' + Y_0\alpha'') + a_3(\zeta' + Y_0\alpha') + V = 0\,. \tag{10}$$

Per un altro strumento simile a questo, ma disposto in modo che il suo movimento relativo sia dato dalle equazioni

$$X_1 = X_0\,,\; Y_1 = 0\,,\; Z_1 = z\,, \tag{8_1}$$

l'equazione differenziale del movimento sarebbe invece

$$m_1(\zeta'' - X_0\beta'') + a_4(\zeta' - X_0\beta') + V_1 = 0\,, \tag{10_1}$$

avendo i simboli m_1, a_4, V_1 significato analogo ad m, a_3, V del caso precedente.