ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

Meccanica. — *Sull' equilibrio delle piastre elastiche incastrate.* Nota del dott. TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio VOLTERRA.

Il problema di determinare i piccoli spostamenti ζ perpendicolari alle basi di una piastra piana elastica (nel caso che vi sia isotropia nelle direzioni parallele alle sue basi), dà luogo all' integrazione dell' equazione:

$$(1) \qquad \Delta^4\zeta - k' \mathrm{T}\, \Delta^2\zeta = kf(x, y), \quad \left(\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},\ \Delta^4 = \Delta^2\Delta^2\right),$$

ove k, k' sono costanti dipendenti dalla natura della piastra, T indica una trazione normale al contorno della piastra, eguale in tutti i punti, e stimata per unità di superficie, ed f è una funzione finita e continua, dipendente dalle forze esterne che agiscono nei punti dell'interno della piastra (vedasi: Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traduite par MM. Barré de Saint-Vénant et Flamant, pag. 688).

Se la piastra è incastrata, hanno luogo le seguenti condizioni limiti, cioè relative ai punti del contorno della piastra:

$$(2) \qquad \zeta = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0$$

ove n è la normale interna al contorno della piastra.

Se $\mathrm{T} = 0$, vale a dire se non si esercita sulla piastra nessuna tensione nel piano della superficie media di essa, l' equazione (1) si riduce a quest' altra:

$$(1') \qquad \Delta^4\zeta = kf(x, y).$$

Quest' equazione colle condizioni (2) è stata integrata, nel caso di una piastra circolare, dal Clebsch (op. cit., § 75) e dal Lauricella [1]; però mentre il procedimento del Clebsch, fondato su sviluppi in serie, conduce a calcoli assai laboriosi, quello del Lauricella, invece, è assai semplice: egli ottiene

[1] Lauricella, *Sull' equazione delle vibrazioni delle placche elastiche incastrate* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, tomo XLVI, a. 1896). Id., *Integrazione dell'equazione $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ in un campo di forma circolare* (Atti id., vol. XXXI, a. 1896).

la funzione cercata espressa mediante un integrale definito nel quale comparisce la seconda funzione di Green.

Se la piastra è ellittica e se $f(x, y)$ è un polinomio si può risolvere il problema in questione in modo abbastanza semplice (1).

Il Clebsch tratta anche il caso particolare (§ 76) in cui la piastra è caricata unicamente da un peso applicato in un punto qualunque di essa; però anche in questo caso le formole definitive che egli ottiene sono assai complicate.

In questa Nota prendo le mosse (§ 1) dalla formola stabilita dal Lauricella e mostro come da essa si possa ottenere facilmente la soluzione del caso particolare trattato dal Clebsch; la formola che ne risulta è assai semplice e si presta bene allo studio della forma della piastra deformata; ne deduco poi una interpretazione meccanica di un mio teorema di reciprocità, la quale vale per una piastra qualunque.

Nel § 2 determino mediante approssimazioni successive l'integrale dell'equazione (1) colle condizioni (2), considero dapprima una piastra circolare, poi passo (§ 3) ad una piastra piana qualunque. Il problema in questione non è che un caso particolare di un altro assai più generale che ho risolto in una mia Memoria di prossima pubblicazione; a causa di ciò ometterò alcune dimostrazioni, rinviando per maggiori ragguagli alla mia Memoria predetta.

1. Sia σ un campo circolare di centro O e raggio R; indichiamo con s il suo contorno.

La *seconda funzione di Green* è quella funzione G, regolare in σ, che soddisfa nei punti di σ all'equazione $\Delta^4 G = 0$, e nei punti di s alle altre:

$$G = r^2 \log r\,, \quad \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial (r^2 \log r)}{\partial n}\,,$$

ove r è la distanza di un punto M di σ (polo di G) da un punto qualunque P pure di σ.

Se r' indica la distanza di P dall'*immagine thomsoniana* M' di M rispetto ad s e si pone $r_1 = \frac{\varrho}{R} r'$, ove $\varrho = \mathrm{OM}$, è facile verificare che la funzione G è data dalla formola:

$$G = -\frac{1}{2}(r_1^2 - r^2) + r^2 \log r_1 \ (^2)\,;$$

(1) Cfr. Boggio, *Sopra alcune funzioni armoniche o biarmoniche in un campo ellittico od ellissoidico* (Atti del R. Istituto Veneto; in corso di stampa).

(2) Questa funzione G è stata ottenuta, sotto una forma leggermente diversa, dal prof. Lauricella nella sua Nota citata.

ponendo:

(3) $$\Gamma = r^2 \log r - G$$

ne segue:

(4) $$\Gamma = \frac{1}{2}(r_1^2 - r^2) - r^2 \log \frac{r_1}{r}.$$

Questa funzione Γ dipende evidentemente dalle coordinate del polo M e dalle coordinate di P; si può però dimostrare che è simmetrica rispetto a queste due coppie di variabili ([1]).

Ciò posto, l'integrale della (1'), colle condizioni (2), è dato dalla formula (Lauricella, Memoria cit.):

(5) $$\zeta(x', y') = \frac{k}{8\pi}\int_\sigma \Gamma(x', y'; x, y)\, f(x, y)\, d\sigma, \qquad (d\sigma = dx\,dy)$$

e poichè la funzione Γ è conosciuta, essendo data dalla (4), il primo membro risulta completamente noto.

Supponiamo ora che la piastra σ, supposta orizzontale, sia caricata unicamente da un peso P che vi agisce in un punto determinato A, di coordinate x, y; si può, con grande approssimazione, immaginare, col Clebsch, in luogo di un tale peso una forza grandissima C' che agisca uniformemente su tutto l'elemento cilindrico verticale passante per A, di cui la base è l'elemento $d\sigma$ della superficie media della piastra e l'altezza è eguale alla grossezza della piastra; forza supposta tale che $C'd\sigma$ tenda ad un limite finito eguale al peso dato P; al di fuori di questo elemento, C' è ovunque zero.

Allora si può mostrare facilmente che il secondo membro della (1) deve esser ridotto a kC'; dimodochè la (5) diventa:

$$\zeta(x', y') = \frac{k}{8\pi}\int_\sigma \Gamma(x', y'; x, y)\, C'd\sigma.$$

Questa formola si può però semplificare notevolmente. Descriviamo perciò una circonferenza di centro A e raggio δ, piccolo in modo che questo cerchio sia tutto contenuto in σ. Chiamando σ_1 questo cerchio, è evidente che la formola precedente si riduce a quest'altra:

$$\zeta(x', y') = \frac{k}{8\pi}\int_{\sigma_1} \Gamma(x', y'; x, y)\, C'd\sigma;$$

facendo tendere il raggio δ a zero e osservando che C' non differisce da zero

([1]) Questo teorema è un caso assai particolare di un altro che ho dimostrato nella mia Nota: *Un teorema di reciprocità sulle funzioni di Green d'ordine qualunque* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXV, a. 1900).

che nel punto $A(x, y)$ ove si trova il peso P, e che, in questo punto, $C' d\sigma$ assume il valore finito P, si ha:

$$\zeta(x', y') = \frac{k}{8\pi} \Gamma(x', y'; x, y) P. \tag{6}$$

Questa formola semplicissima risolve il nostro problema.

Introducendo coordinate polari e sviluppando in serie la funzione Γ si otterrebbero due sviluppi diversi a seconda che il punto (x', y') è più vicino o più lontano dal centro O che il punto A; le formole che così si otterrebbero coinciderebbero con quelle ottenute dal Clebsch (¹).

In modo analogo si può procedere se invece di un peso solo si hanno varî pesi applicati in differenti punti della piastra; la formola che si otterrebbe è la seguente:

$$\zeta(x', y') = \frac{k}{8\pi} \sum_i \Gamma(x', y'; x_i, y_i) P_i, \tag{6'}$$

ove (x_i, y_i) indica il punto d'applicazione del peso P_i. Ne segue che lo spostamento prodotto in tal guisa non è altro che la somma di quelli che sarebbero prodotti da quegli stessi pesi, supposti però agire isolatamente.

La formola (5) vale per un'area qualunque σ', Γ essendo sempre data dalla (3), ove G indica la seconda funzione di Green relativa all'area che si considera; ne segue che anche le (6), (6′) sono valide per l'area σ'. La funzione G la si sa costruire per varie classi di aree (²).

Vediamo qualche proprietà dedotta dalla (6), relativamente ad una piastra qualunque σ'.

Indicando con M il punto (x', y') potremo scrivere la (6) brevemente così:

$$\zeta(M) = \frac{k}{8\pi} \Gamma(M, A) P; \tag{6₁}$$

togliamo ora il peso P dal punto A ed applichiamolo nel punto M, allora avremo nel punto A:

$$\zeta(A) = \frac{k}{8\pi} \Gamma(A, M) P,$$

(¹) Notiamo a questo proposito che nell'espressione delle funzioni Z_1 del Clebsch (pag. 776) vi è una lieve inesattezza, perchè nel trinomio entro la prima parentesi (....) bisogna cambiare di segno l'ultimo termine e scrivere cioè $-r_0$ invece di $+r_0$.

(²) Cfr. ad es. Levi-Civita, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2\Delta_2 u = 0$ (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXIII, a. 1898); Almansi, *Integrazione della doppia equazione di Laplace* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. IX, 1° semestre 1900).

ma $\Gamma(\mathrm{M}, \mathrm{A}) = \Gamma(\mathrm{A}, \mathrm{M})$, come risulta dal teorema di reciprocità che ho dimostrato nella mia Nota già citata, onde

$$\zeta(\mathrm{M}) = \zeta(\mathrm{A}),$$

quindi il teorema: *Lo spostamento (verticale) del punto* M, *prodotto dal peso* P *applicato in* A, *è eguale allo spostamento che si avrebbe nel punto* A, *qualora il peso* P *fosse applicato in* M.

È evidente, dall'interpretazione fisica della (6_1) che gli spostamenti ζ hanno lo stesso segno del peso P che li ha prodotti; ne segue quindi dalla (6_1) stessa: $\Gamma(\mathrm{M}, \mathrm{A}) > 0$, cioè: *La funzione* Γ *è positiva in ogni punto dell'area* σ'.

2. Cerchiamo ora l'integrale delle equazioni (1), (2), regolare nel cerchio σ.

Sia v una funzione che soddisfa all'equazione;

$$\Delta^4 v - k'\mathrm{T}\,\Delta^2 v = kf(x, y)$$

ed è regolare in σ e su s; è chiaro che esistono infinite di queste funzioni. Poniamo poi nelle (1), (2):

$$\zeta = u + v,$$

se ne trae che la funzione u deve soddisfare alle equazioni:

$$(7) \qquad \begin{cases} \Delta^4 u - k'\mathrm{T}\,\Delta^2 u = 0 & \text{in } \sigma \\ u = -v, \quad \dfrac{\partial u}{\partial n} = -\dfrac{\partial v}{\partial n} & \text{su } s; \end{cases}$$

queste due ultime equazioni le scriveremo così:

$$u = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi.$$

Ciò posto, incominciamo a trovare l'integrale u delle equazioni:

$$(7') \qquad \begin{cases} \Delta^4 u = \xi\Delta^2 u & \text{in } \sigma \\ u = \varphi, \quad \dfrac{\partial u}{\partial n} = \psi & \text{su } s \end{cases}$$

ove ξ è una indeterminata qualunque; ponendo poi $\xi = k'\mathrm{T}$ avremo l'integrale delle (7).

Ricordiamo perciò che se $\mathrm{F}(x, y)$ è una funzione finita e continua in σ, l'integrale U delle equazioni:

$$\begin{cases} \Delta^4 \mathrm{U} = \mathrm{F}(x, y) & \text{in } \sigma \\ \mathrm{U} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial n} = 0 & \text{su } s \end{cases}$$

il quale, come già si vide, è dato dalla formola:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_\sigma \Gamma F \, d\sigma ,$$

soddisfa, nei punti di σ e di s alle diseguaglianze:

$$(8) \qquad |D^i U| < \lambda_i R^{4-i} \Phi \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

ove Φ è il massimo valore assoluto di F in σ, le λ_i sono costanti numeriche positive, e $D^i U$ indica una derivata parziale qualsiasi di ordine i della funzione U.

Ciò premesso, poniamo:

$$(9) \qquad u = u_0 + \xi u_1 + \xi^2 u_2 + \ldots .$$

allora dalle (7′) otteniamo i seguenti sistemi di equazioni:

$$\begin{array}{llll}
\Delta^4 u_0 = 0 & \text{in } \sigma; & u_0 = \varphi, \ \dfrac{\partial u_0}{\partial n} = \psi & \text{su } s \\
\Delta^4 u_1 = \Delta^2 u_0 & \text{"} & u_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = 0 & \text{"} \\
\cdots & & \cdots & \\
\cdots & & \cdots & \\
\Delta^4 u_j = \Delta^2 u_{j-1} & \text{"} & u_j = \dfrac{\partial u_j}{\partial n} = 0 & \text{"} \\
\cdots & & \cdots & \\
\cdots & & \cdots &
\end{array}$$

La funzione u_0 è data dalla formola di Lauricella (Nota cit.):

$$u_0(\varrho, \theta) = \frac{(R^2 - \varrho^2)^2}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{R - \varrho \cos(\alpha - \theta)}{\{R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho \cos(\alpha - \theta)\}^2} \varphi \, d\alpha + $$
$$+ \frac{(R^2 - \varrho^2)^2}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{\psi \, d\alpha}{R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho \cos(\alpha - \theta)},$$

e le altre, dalle seguenti:

$$u_j = \frac{1}{8\pi} \int_\sigma \Gamma \Delta^2 u_{j-1} \, d\sigma, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sotto certe condizioni per le funzioni φ, ψ, la funzione u_0 risulta finita, colle sue derivate parziali dei tre primi ordini, in σ e su s; diciamo Φ

il massimo valore assoluto di $\Delta^2 u_0$, allora ricordando le (8) avremo:

(10) $$|D^i u_1| < \lambda_i R^{4-i} \Phi \text{ (1)}$$

onde:

$$|\Delta^2 u_1| < \lambda R^2 \Phi, \qquad (\lambda = 2\lambda_2)$$

quindi:

(10') $$|D^i u_2| < \lambda_i R^{4-i} \lambda R^2 \Phi,$$

da cui:

$$|\Delta^2 u_2| < (\lambda R^2)^2 \Phi,$$

e in generale:

(10'') $$|D^i u_j| < \lambda_i R^{4-i} (\lambda R^2)^{j-1} \Phi$$
$$|\Delta^2 u_j| < (\lambda R^2)^j \Phi.$$

Prendiamo ora le serie:

(11) $$D^i u = D^i u_0 + \xi D^i u_1 + \xi^2 D^i u_2 + \dots$$

e diciamo T il massimo valore assoluto di $D^i u_0$; se ne deducono, in virtù delle (10), (10'), (10''), le disuguaglianze seguenti:

$$|D^i u| < T + \lambda_i R^{4-i} \Phi |\xi| \sum_0^\infty {}_j |\xi \lambda R^2|^j,$$

dalle quali risulta che le serie (11) sono assolutamente ed uniformemente convergenti in σ e su s se è soddisfatta la condizione:

(12) $$|\xi| \lambda R^2 < 1.$$

Dopo ciò si ha dalle (11):

$$\Delta^2 u = \Delta^2 u_0 + \xi \Delta^2 u_1 + \xi^2 \Delta^2 u_2 + \dots$$

onde

$$\frac{1}{8\pi}\int_\sigma \Gamma \Delta^2 u \, d\sigma = \frac{1}{8\pi}\int_\sigma \Gamma \Delta^2 u_0 \, d\sigma + \xi \frac{1}{8\pi}\int_\sigma \Gamma \Delta^2 u_1 \, d\sigma + \dots$$

dalla quale segue facilmente:

$$u = u_0 + \xi \frac{1}{8\pi}\int_\sigma \Gamma \Delta^2 u \, d\sigma.$$

Le derivate di quarto ordine di u esistono e sono finite poichè, come è facile verificare, la funzione $\Delta^2 u$ ammette derivate di primo ordine continue; si trae poi senza difficoltà, dall'equazione precedente:

$$\Delta^4 u = \xi \Delta^2 u,$$

(1) In questa relazione e nelle seguenti è sottinteso che i assume i valori 0, 1, 2, 3.

che è precisamente la prima delle equazioni (7′). Si vede poi agevolmente che sono anche soddisfatte le rimanenti due delle equazioni (7′).

Ponendo $\xi = k'T$ otteniamo l'integrale delle equazioni (7), sotto la condizione (12), che attualmente diventa: $\lambda k' T R^2 < 1$; questa è certamente soddisfatta se una delle quantità k', T, R è abbastanza piccola. Dopo ciò si ha la funzione ζ cercata dall'equazione $\zeta = u + v$. Così il nostro problema è risoluto.

3. Consideriamo ora un'area qualunque σ' appartenente al piano $x'y'$. Supponiamo che la rappresentazione conforme di σ' sopra un cerchio σ di raggio R, appartenente al piano xy, si eseguisca colle formole:

$$x' = x'(x, y), \quad y' = y'(x, y);$$

ponendo

$$H^2 = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2,$$

la prima delle equazioni (7) si trasforma nella seguente:

$$\Delta^4 u - 2\frac{\partial \log H^2}{\partial x}\frac{\partial \Delta^2 u}{\partial x} - 2\frac{\partial \log H^2}{\partial y}\frac{\partial \Delta^2 u}{\partial y} + H^2 \Delta^2 \frac{1}{H^2}\Delta^2 u - k' T H^2 \Delta^2 u = 0$$

e sul contorno s di σ conosceremo u e $\frac{\partial u}{\partial n}$; facendo poi la sostituzione:

$$(\alpha) \qquad u = HU$$

le derivate di terzo ordine della funzione incognita spariscono, e l'equazione trasformata della precedente è della forma:

$$\Delta^4 U = F(U),$$

ove F(U) è un'espressione lineare in U e nelle sue derivate parziali dei due primi ordini; su s si conoscono poi i valori assunti da U, $\frac{\partial U}{\partial n}$, che indicheremo rispettivamente con φ e ψ. Indicando con ξ una indeterminata qualsiasi, cercheremo l'integrale delle equazioni:

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta^4 U = \xi F(U) & \text{in } \sigma \\ U = \varphi, \ \frac{\partial U}{\partial n} = \psi & \text{su } s \end{array} \right.$$

che sono dello stesso tipo delle (7′), salvo che nel secondo membro della prima vi è F(U) in luogo di $\Delta^2 u$.

Si può operare su questo sistema in modo analogo a quanto si fece pel sistema (7'); si troverà così una serie:

$$U = U_0 + \xi U_1 + \xi^2 U_2 + \dots$$

[che è l'analoga della (9)], la quale, sotto una condizione analoga alla (12), esprimerà l'integrale delle equazioni (13).

Ponendo poi $\xi = 1$ avremo la funzione U che risolve la questione proposta. Dalla U si ottiene u mediante la (α), e infine la funzione cercata ζ dalla formola $\zeta = u + v$, colla quale il problema è risoluto.

Matematica — *Sui prodotti infiniti divergenti.* Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla determinazione dei moti sismici.* Nota II del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In una Nota precedente, pubblicata col medesimo titolo in questi Rendiconti [1], avevo dedotto le equazioni differenziali che reggono il movimento del microsismografo a pendolo verticale e di quello a componente verticale. Ora, valendomi dei risultati ottenuti, risolvo interamente il problema propostomi, determinando in funzione del tempo i sei elementi del moto sismico.

§ 1. *Integrazione delle equazioni.*

Come apparisce dalle equazioni (7) e (10) della Nota citata, il movimento d'un pendolo verticale dipende da cinque incognite (ξ, η, α, β, γ) mentre non può dar luogo che a tre equazioni [2], e quello d'un sismografo a componente verticale dipende da due incognite (ζ, α oppure ζ, β secondo che il suo movimento relativo è dato dalla equazione (8) od (8_1)), mentre dà luogo ad una sola equazione: per determinare completamente il movimento del terreno, bisogna quindi ricorrere ad una opportuna combinazione di strumenti disposti tanto vicini che i loro moti relativi si possano riferire ad un

[1] V. fascicolo precedente, pag. 143. — Per tutto ciò che è necessario all'intelligenza della presente Nota mi riferisco alla Nota citata.

[2] Veramente gli ordinarî pendoli verticali dànno soltanto due tracciati ai quali corrispondono le due prime equazioni (7); in essi la rotazione relativa ν rimane sconosciuta al pari di γ, cosicchè per avere la componente *vorticosa* del movimento bisogna ricorrere ad altri strumenti.