ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

Si può operare su questo sistema in modo analogo a quanto si fece pel sistema (7'); si troverà così una serie:

$$U = U_0 + \xi U_1 + \xi^2 U_2 + \dots$$

[che è l'analoga della (9)], la quale, sotto una condizione analoga alla (12), esprimerà l'integrale delle equazioni (13).

Ponendo poi $\xi = 1$ avremo la funzione U che risolve la questione proposta. Dalla U si ottiene u mediante la (α), e infine la funzione cercata ζ dalla formola $\zeta = u + v$, colla quale il problema è risoluto.

Matematica — *Sui prodotti infiniti divergenti.* Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla determinazione dei moti sismici.* Nota II del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In una Nota precedente, pubblicata col medesimo titolo in questi Rendiconti [1], avevo dedotto le equazioni differenziali che reggono il movimento del microsismografo a pendolo verticale e di quello a componente verticale. Ora, valendomi dei risultati ottenuti, risolvo interamente il problema propostomi, determinando in funzione del tempo i sei elementi del moto sismico.

§ 1. *Integrazione delle equazioni.*

Come apparisce dalle equazioni (7) e (10) della Nota citata, il movimento d'un pendolo verticale dipende da cinque incognite (ξ, η, α, β, γ) mentre non può dar luogo che a tre equazioni [2], e quello d'un sismografo a componente verticale dipende da due incognite (ζ, α oppure ζ, β secondo che il suo movimento relativo è dato dalla equazione (8) od (8_1)), mentre dà luogo ad una sola equazione: per determinare completamente il movimento del terreno, bisogna quindi ricorrere ad una opportuna combinazione di strumenti disposti tanto vicini che i loro moti relativi si possano riferire ad un

(1) V. fascicolo precedente, pag. 143. — Per tutto ciò che è necessario all'intelligenza della presente Nota mi riferisco alla Nota citata.

(2) Veramente gli ordinarî pendoli verticali dànno soltanto due tracciati ai quali corrispondono le due prime equazioni (7); in essi la rotazione relativa ν rimane sconosciuta al pari di γ, cosicchè per avere la componente *vorticosa* del movimento bisogna ricorrere ad altri strumenti.

unico sistema S(XYZ) fisso nel terreno e tali che da tutti i diagrammi si possano dedurre le funzioni note del tempo che compariscono in sei equazioni tutte indipendenti e contenenti tutte le incognite. Supponendo per ora che i pendoli verticali possano dare anche un tracciato corrispondente alle rotazioni intorno alla verticale, io esaminerò le due combinazioni seguenti:

a) tre sismografi a componente verticale, non orientati in tre piani paralleli, ed un pendolo a componenti orizzontali.

Il caso più semplice è quello in cui i tre pendoli a componente verticale siano disposti: uno in un piano coordinato (p. e. nel piano ZX) e gli altri due, eguali fra loro, normalmente e simmetricamente rispetto a questo piano: il movimento del primo soddisferà allora all'equazione (10_1) che potremo scrivere così

$$m_1\zeta'' + a_4\zeta' - X_0(m_1\beta'' + a_4\beta') + V_1 = 0$$

e gli altri due alle equazioni

$$m\zeta'' + a_3\zeta' + Y_0(m\alpha'' + a_3\alpha') + V = 0$$
$$m\zeta'' + a_3\zeta' - Y_0(m\alpha'' + a_3\alpha') + W = 0\,.$$

Da queste due ultime per somma e per differenza avremo rispettivamente

$$\begin{cases} 2m\zeta'' + 2a_3\zeta' + (V + W) = 0 \\ 2Y_0(m\alpha'' + a_3\alpha') + (V - W) = 0 \end{cases}$$

donde con semplici quadrature i valori di ζ e di α in funzione del tempo; se poi nella (10_1) sostituiamo a ζ'' e a ζ' i loro valori che si possono considerare già noti in funzione del tempo, essa darà con quadratura i valori di β. — Noti α e β in funzione del tempo le due prime equazioni (7) relative al pendolo verticale daranno con quadrature ζ ed η; la terza delle (7) infine darà γ, cosicchè il problema propostoci è completamente risoluto.

b) due pendoli a componenti orizzontali ed uno a componente verticale.

Questa combinazione permette ancora di determinare tutte le incognite, purchè si supponga trascurabile rispetto alle masse dei pendoli verticali la resistenza opposta dall'aria ad una loro traslazione con velocità $= 1$.

Infatti le due prime fra le (7) divise per M, trascurando il rapporto $\frac{a}{M}$, e ponendo per brevità

$$\frac{M_x}{lM} = \frac{M_y}{lM} = A\,, \quad \frac{al}{M} = B\,, \quad \frac{\Phi}{M} = \varphi\,, \quad \frac{\Psi}{M} = \psi\,,$$

diventano

$$(7_1) \qquad \begin{aligned} \xi'' + A\beta'' + B\beta' + g\beta + \varphi &= 0 \\ -\eta'' + A\alpha'' + B\alpha' + g\alpha + \psi &= 0 \end{aligned}$$

Il secondo pendolo, *di costanti diverse*, avrà un movimento soddisfacente a due equazioni analoghe

$$(7_2) \qquad \begin{aligned} \xi'' + A_1\beta'' + B_1\beta' + g\beta + \varphi_1 = 0 \\ -\eta'' + A_1\alpha'' + B_1\alpha' + g\alpha + \psi_1 = 0 \end{aligned}$$

Ora dalla prima delle (7_1) e delle (7_2) per differenza avremo

$$(A - A_1)\ \beta'' + (B - B_1)\ \beta' + (\varphi - \varphi_1) = 0$$

donde, con quadrature, β in funzione del tempo; in modo identico dalla seconda delle (7_1) e delle (7_2) avremo il valore di α. In seguito, noti α e β, le (7_1) o le (7_2) daranno ξ ed η, e la (10) o la (10_1), corrispondente al movimento del microsismografo a componente verticale, darà il valore di ζ.

Per calcolare infine il valore di γ, si procederà come nel caso della combinazione precedente, e sarà indifferente ricorrere all' uno o all' altro dei due strumenti perchè i valori della funzione nota X (v. terza delle (7)) o della corrispondente X_1 relativa al secondo pendolo, sono dati dall'esperienza e devono quindi essere appunto tali da soddisfare identicamente alle due equazioni relative alla rotazione dei singoli pendoli intorno alla verticale.

§ 2. *Determinazione del valore dei coefficienti.*

Nei primi membri di tutte le equazioni considerate compariscono costanti che dipendono dalla massa e dalle dimensioni degli strumenti adoperati, il cui valore si può determinare con la massima esattezza, e costanti relative alla resistenza dell'aria, che si possono determinare con esattezza sufficiente, ma che in generale è lecito trascurare affatto. Invece, nelle funzioni Φ, Ψ, X, V, che finora si supposero note, compariscono coefficienti, costanti e variabili, di determinazione diretta quasi impossibile. Qualora però si supponga che per un tempo abbastanza breve anche i coefficienti variabili si conservino sensibilmente costanti, si può in pratica superare facilmente questa ultima difficoltà. Si provochi infatti un movimento oscillatorio negli strumenti quando il terreno è perfettamente immobile, cioè quando le funzioni incognite sono tutte nulle insieme con le loro derivate. Le oscillazioni dovranno allora soddisfare egualmente alle equazioni generali (7) e (10) o (10_1), ossia, per l'immobilità del terreno, alle equazioni

$$\Phi = \Psi = X = V = V_1 = 0 :$$

le quali tutte, prescindendo da un fattore costante di agevole determinazione diretta, sono del tipo

$$x'' + Ax' + Bx = 0 .$$

Siccome in tutti i nostri casi il binomio $A^2 - 4B$ è negativo (come risulta dall'osservazione delle (C) (D) e dal carattere oscillatorio del movimento provocato) questa equazione ammette sempre l'integrale particolare reale

$$x = e^{Ht} \cos Kt ,$$

in cui

$$H = -\frac{A}{2}, \quad K = \frac{1}{2}\sqrt{4B - A^2} .$$

Dal quale, com'è noto, si deduce: che le oscillazioni sono isocrone, annullandosi x per tutti i valori di t multipli di $\frac{\pi}{K}$, che i massimi e i minimi si succedono alternativamente ad intervalli di tempo di $\frac{\pi}{2K}$ e che i loro valori assoluti (ampiezze delle oscillazioni) formano una progressione geometrica col rapporto $e^{-\frac{H}{K}\pi}$. Allora misurata la durata T_n di n oscillazioni semplici, avremo

$$T_n = n\frac{\pi}{K} \qquad \text{donde} \qquad K = \frac{T_n}{n\pi} .$$

Chiamando x_0, x_1, ... x_n le ampiezze di $(n+1)$ oscillazioni semplici successive e misurando solamente x_0 ed x_n, avremo

$$H = \frac{K}{n\pi} (\log x_n - \log x_0) :$$

donde infine

$$A = -2H ; \quad B = H^2 + K^2 .$$

Ma mentre B è costante, A varia col tempo secondo una legge ignota. Potremo però supporre che A varii con continuità, in modo che conoscendone una successione di valori corrispondenti a certi istanti determinati, si potrà con interpolazione ricavarne il valore per un altro istante qualunque: a tal fine basterà determinare col metodo precedente un valore H_0 di H ed una successione K_0, K_1, ... K_r, ... K_m di valori per K, perchè avremo sempre nel tempo t_r

$$B = H_0^2 + K_0^2$$

$$A_r = -2\sqrt{B - K_r^2} .$$

In una prossima pubblicazione mi propongo di discutere i risultati ottenuti e dedurre alcune conclusioni relative alle più favorevoli disposizioni sperimentali.