ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

pressione, una larga faccia accuratamente pulita di hauerite a contatto con lastre di rame e di argento. Mentre l' annerimento del metallo procede come dissi già nella precedente Nota, con produzione cioè di deposito nero distintamente cristallino sul metallo, minute particelle di questo, di variabili dimensioni, dotate di perfetto splendore metallico e visibili ad occhio nudo, penetrano qua e là nella hauerite, od aderiscono a questa in modo da non poterle togliere strofinando fortemente con un panno la superficie del minerale. Le lastre metalliche erano state rese previamente ben terse. Nemmeno in questo caso si potrebbe pensare alla così detta soluzione solida, quale generalmente s' intende.

Matematica. — *Sui prodotti infiniti divergenti*. Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

La teoria dei prodotti infiniti, nonostante i lavori di Cauchy, Weierstrass, Stolz, Dini, Pincherle, Pringsheim [1], è delle meno sviluppate: poco o nulla si sa del modo di tendere verso lo zero o verso l' infinito di quelli che non convergono, ed anche nel caso della convergenza, non parve fino ad ora di poter scompagnare lo studio dei prodotti infiniti da quello delle serie. È innegabile, d' altra parte, l' importanza che quegli algoritmi hanno in analisi, specialmente nello studio delle trascendenti intere; ed ho perciò ritenuto che non fosse senza qualche pratica utilità lo stabilire alcune proprietà generali sul modo con cui essi si comportano nell' intorno dell' infinito.

Mi sono a tal uopo giovato di alcune mie recenti ricerche, *Sulla determinazione dell' ordine di infinito* [2], ed ho potuto trovare, in modo semplice ed elementare, facili e generali criterî di convergenza metodi e regole per l' assegnazione dell' ordine di infinito, nel caso della divergenza; senza bisogno di ricorrere allo studio di determinate serie, ma col semplice esame del carattere infinitesimale della successione dei fattori.

I.

1. *Se la successione* $\{ P_n = \prod_1^n (1 + C_r) \}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *ha limite determinato* (*finito, nullo od infinito*), *è sempre possibile, associando i fattori*

[1] Cauchy, Anal. Alg., pag. 562; Weierstrass, Crelle, vol. LI, pag. 18 (1856); Stolz, Vorlesungen Allg. Arithm., Bd. II, pag. 238; Dini, Ann. di mat., 2. ser., II, pag. 35 (1870); Pincherle, Rend. Acc. di Bologna (1883); Pringsheim, Mat. Annalen, XXII, pag. 478; XXXIII, pag. 119 (1889); XLIV, pag. 413 (1894). Per una bibliografia completa in questo argomento si rimanda all'articolo di Pringsheim nella Enciclopedia Matematica.

[2] Atti della Società dei naturalisti e matematici di Modena (1901).

in modo opportuno, dare al prodotto infinito una delle due forme:

$$\begin{cases}\prod\limits_1^\infty(1-A_n) \\ 0 \leqq A_n < 1\end{cases} \qquad \begin{cases}\prod\limits_1^\infty(1+A_n) \\ 0 \leqq A_n\end{cases}$$

delle quali la prima conviene a prodotti che sono infinitesimi, l'altra a quelli che sono infiniti per $n=\infty$.

Supponiamo prima che il prodotto $\prod\limits_1^\infty(1+C_n)$ sia infinitesimo. Poniamo

$$P_n = \prod_{r=1}^{n}(1+C_r) \tag{1}$$

e distinguiamo due casi:

α) per ogni n fissato ad arbitrio esiste un numero positivo m tale che $P_{n+m} > 0$.

β) . . . è invece $P_{n+m} < 0$.

Nel caso α) si estragga dalla successione P_n una successione monotòna di numeri positivi tendenti allo zero:

$$P_{\alpha_1},\ P_{\alpha_2},\ \ldots\ P_{\alpha_n},\ \ldots \tag{2}$$

Nel caso β) si costruisca una successione analoga alla (2) coi valori assoluti di una successione monotòna di numeri negativi tendenti allo zero.

In ogni modo, ponendo:

$$\left|\frac{P_{\alpha_{n+1}}}{P_{\alpha_n}}\right| = 1 - A_{n+1} \tag{3}$$

cioè:

$$|(1+C_{\alpha_n+1})(1+C_{\alpha_n+2})(1+C_{\alpha_n+3})\ldots(1+C_{\alpha_{n+1}})| = 1 - A_{n+1} \tag{4}$$

avremo:

$$|P_{\alpha_n}| = P_n{}^1 = (1-A_1)(1-A_2)\ldots(1-A_n) \tag{5}$$

ed il prodotto infinito si trasformerà nell' altro

$$\prod_1^\infty(1-A_n)\,, \tag{6}$$

dove è:

$$1 > A_n > 0. \tag{7}$$

2. Si osservi che è

(8) $$\alpha_n \geqq n$$

epperò che, se per $n > n_0$ si ha

(9) $$|P_n| < \varepsilon,$$

si ha ancora

(10) $$P_n^1 < \varepsilon.$$

Ciò prova che P_n^1 *non è infinitesimo di ordine minore di* P_n.

Potremo esser certi che P_n e P_n^1 sono infinitesimi dello stesso ordine, se il rapporto

(11) $$\frac{\alpha_n}{n},$$

non tende all'infinito per $n = \infty$, cioè se α_n è infinito del primo ordine. Se poi α_n è infinito di ordine finito o transfinito, ma determinato: potremo facilmente conoscere l'ordine di infinitesimo di P_n dopo calcolato quello di P_n^1 applicando le regole date al loc. cit. per la determinazione dell'ordine delle funzioni di funzioni.

In particolare, se l'ordine di infinito di α_n è il numero determinato e finito a, quello di P_n^1 è il numero pure determinato e finito b, si avrà quello P_n facendo il quoziente $\frac{b}{a}$.

3. Le considerazioni fatte per prodotti infinitesimi si estendono immediatamente a prodotti divergenti verso l'infinito (determinato di segno). Questi perciò, si potranno sempre trasformare in prodotti della forma:

(12) $$\begin{cases} \prod_1^\infty (1 + A_n) \\ 0 < A_n, \end{cases}$$

e, per la determinazione dell'ordine di infinito del prodotto primitivo in funzione di quello del trasformato varranno le cose dette al numero precedente.

4. Se il prodotto dato $\Pi(1 + C_n)$, converge verso un limite determinato e finito, anche se le C_n non sono, da un certo n in avanti, tutte dello stesso segno, potremo dare a quel prodotto una delle forme (6), (12), ed il limite delle successioni P_n, P_n^1, rimarrà in ogni caso il medesimo.

5. Il limite inferiore delle A_n può essere lo zero od un numero determinato maggiore di zero.

Nel primo caso, se zero non è anche limite, vi sarà una successione

(13) $$A_{\beta_1}, A_{\beta_2}, \ldots$$

di valori tutti maggiori di un numero assegnato: $\eta > 0$. Sieno

$$A_{\beta_r}\,,\ A_{\beta_r+1}\,,\ A_{\beta_r+2}\,,\ \ldots\ A_{\beta_{r+1}}\,,$$

due dei termini consecutivi della (13) insieme con tutti gli altri termini intermedî della successione totale $\{A_n\}$.

Considerando, per fissare le idee, il caso di prodotti della forma $\Pi(1-A_n)$, avremo dalla (7)

$$(1-A_{\beta_r+1})(1-A_{\beta_r+2})\ldots(1-A_{\beta_{r+1}}) < 1-A_{\beta_{r+1}}.$$

Ponendo dunque

$$(1-A_{\beta_r+1})(1-A_{\beta_r+2})\ldots(1-A_{\beta_{r+1}}) = 1-B_{\beta_r}\,, \tag{14}$$

avremo:

$$1 > B_{\beta_r} > A_{\beta_{r+1}} > \eta\,, \tag{15}$$

ed il dato prodotto infinito si trasformerà nell' altro:

$$\left\{\begin{array}{l} \prod\limits_1^\infty (1-B_{\beta_r}) \\ \eta < B_{\beta_r} < 1\,. \end{array}\right. \tag{16}$$

Sempre facendo sulla determinazione dell' ordine di infinito le riserve indicate al n. 2, si può dunque supporre che, *se le* A_n *delle formule* (6), (12), *non tendono al limite zero, abbiano limite inferiore diverso dallo zero.*

6. Le proprietà infinitesimali dei prodotti che sono infinitesimi per $n=\infty$, si desumono facilmente da quelle di prodotti che tendono all' infinito, poichè, se si ha:

$$P_n = \prod_{r=1}^{n}(1-B_r)\,, \tag{17}$$

ponendo:

$$B_r = \frac{A_r}{1+A_r}\,, \tag{18}$$

si trova:

$$P_n = \prod_1^n \frac{1}{(1+A_r)} = \frac{1}{\prod\limits_1^n (1+A_r)} \tag{19}$$

Segue da ciò che: Se $\lim\limits_{n=\infty} P_n = 0$, deve essere $\lim\limits_{n=\infty} \prod\limits_1^n (1+A_n) = \infty$.

L'ordine di infinitesimo di P_n è conosciuto quando si conosca quello di infinito di $\prod_1^n (1+A_r)$, e le proprietà delle B_n si ricavano immediatamente da quelle, supposte note, delle A_n.

Nel seguito ci occuperemo perciò solamente di prodotti infiniti della forma $\Pi(1+A_n)$.

Mineralogia. — *Su un pirosseno sodifero dei dintorni di Oropa, nel Biellese* (¹). Nota di FERRUCCIO ZAMBONINI, presentata dal Socio STRUEVER.

Precisamente nel tempo in cui il Fischer (²) sosteneva con maggior energia che la giadeite dei manufatti preistorici trovati in vari punti della Svizzera, della Stiria, del Piemonte ecc. non proveniva da giacimenti alpini, il Damour (³) pubblicava l'analisi di una roccia, che per la composizione chimica si avvicinava alla giadeite, e che Bertrand de Lome asseriva di aver raccolto in posto a St. Marcel, nella Val d'Aosta. E due anni dopo, nel 1883, A. B. Meyer e A. Arzruni (⁴) prognosticavano il ritrovamento della giadeite nelle Alpi occidentali. Qualche anno dopo lo stesso Meyer (⁵) riconosceva che i pezzi grezzi trovati nella Valle d'Aosta, presso St. Marcel, sono di giadeite. Un pirosseno sodifero di St. Marcel è stato analizzato più recentemente da S. L. Penfield (⁶), che lo ha descritto come giadeite, mentre per la forte percentuale (11,99 %) di ossido ferrico, sembra si tratti piuttosto di cloromelanite, che secondo il Damour (⁷) è una giadeite con elevato tenore in ferro.

Al Mrazec (⁸) si deve poi un interessante studio di un ciottolo di gia-

(¹) Lavoro eseguito nel Gabinetto di mineralogia della R. Università di Roma.

(²) Il Fischer ha pubblicato in proposito varie Note nel Neues Jahrbuch für Miner. Geol. u. s. w., specialmente negli anni 1879-1884: la questione è poi trattata a fondo nel suo libro: *Nephrit und Jadeit nach ihren mineralogischen Eigenschaften, sowie nach ihrer urgeschichtlichen und ethnographischen und etnographischen Bedeutung.* Stuttgart. 1880.

(³) *Nouvelles analyses sur la jadéite et sur quelques roches sodifères.* Bull. Soc. franç. de minér. 1881, IV, 157.

(⁴) *Neue Beobachtungen am Nephrit und Jadeit.* Zeitsch. f. Ethnologie XV. Jahrg. 1883, pag. 163.

(⁵) *Neue Beiträge zur Kenntniss des Nephrit und Jadeit.* Abhandl. und Berichte des k. zool. und anthrop. etnogr. Museums. Dresden 1891.

(⁶) *Minerals from the Manganese Mines of St. Marcel in Piemont, Italy.* American Journal of sciences and arts, 1893, XLVI, 288.

(⁷) *Nouveaux essais sur la chloromelanite.* Bull. Soc. franç. de minér. 1893, pag. 57.

(⁸) *Note sur une jadéite du Piemont.* Bulletin de la Société des sciences de Bukarest, 1898, VII, 187.