ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 aprile 1901.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui prodotti infiniti divergenti.* Nota II (1) del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

II.

7. Sia dato il prodotto infinito

$$(1)\qquad \begin{cases} \prod\limits_1^\infty (1 + \mathrm{A}_n) \\ 0 < \mathrm{A}_n \end{cases},$$

e supponiamo prima che sia

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty} \mathrm{A}_n = 0 .$$

Se si definisce una funzione $f(x)$ con le condizioni *che per $x=0$ assuma il valore*

$$(3)\qquad f(0) = 1 ,$$

che per il valore $x = n$, si abbia

$$(4)\qquad f(n) = \mathrm{P}_n ,$$

che in tutti i punti a distanza finita dell'asse reale sia continua e monotòna ed ammetta derivata determinata, avremo, per la ipotesi (2),

$$(5)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim_{n=\infty} (1 + \mathrm{A}_n) = 1 .$$

(1) V. pag. 236.

L'esistenza di una tale funzione è messa fuori di dubbio quando si consideri che, per prodotti infiniti che non divergono più rapidamente di $n!$, le formule note di interpolazione [1] dànno modo di costruire immediatamente una funzione analitica $f(x)$ con le proprietà richieste. Per successioni $\{P_n\}$ divergenti più rapidamente di $n!$, trovato un numero intero p abbastanza grande perchè il logaritmo di indice p: $\log_{(p)} P_n$, non diverga più rapidamente di $n!$, si costruirà una funzione analitica $\varphi(n)$ soddisfacente le condizioni

$$\varphi(n) = \log_{(p)} P_n \,,$$

poi si prenderà

$$f(x) = e^{e^{\cdots e^{\varphi(x)}}} .$$

Dalle condizioni imposte alla $f(x)$ si deduce che *il limite della* $f(x)$ *per* $x = \infty$, *non può essere diverso da quello della successione* $\{P_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *se quest'ultimo è finito, e che, quando sia infinito, anche* $f(x)$ *è per* $x = \infty$ *infinita dello stesso ordine.*

Dalla (5) poi si ricava che la funzione $f(x)$ appartiene alla prima classe [2], e cioè che si ha

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} f(x) = e^{x \,.\, \varepsilon(x)} \\ \varepsilon(x) \text{ infinitesima per } x = \infty \,. \end{cases}$$

8. Di qui in particolare: *I prodotti infiniti* $\Pi(1 + A_n)$ *pei quali è soddisfatta la condizione*

$$\lim_{n=\infty} A_n = 0,$$

soddisfano la relazione

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} e^{-an} \prod\limits_{1}^{n} (1 + A_n) = 0 \\ a \text{ reale positivo qualunque} \,. \end{cases}$$

9. Se consideriamo la funzione

$$\text{(8)} \qquad \alpha(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)} - 1 \,,$$

questa, per le ipotesi poste per la $f(x)$, è finita continua, e derivabile in

(1) Cfr. p. es. *Bendixon*. Acta Matematica, t. IX, pag. 1, 1886.

(2) Cfr. nel citato lavoro *Sulla determinazione dell'ordine di infinito,* il § dove sono studiate le funzioni della prima classe.

tutti i punti a distanza finita della parte positiva dell'asse reale, e nei punti $x = n$, assume i valori

(9) $$\alpha(n) = A_n .$$

Si avrà dunque

(10) $$\begin{cases} x > 0 , \ \alpha(x) > 0 \\ \lim\limits_{x=\infty} \alpha(x) = 0 . \end{cases}$$

Dalla (8) si ricava

(11) $$\alpha(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{f'(x+\theta)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{f'(x+\theta)}{f'(x)},$$

ed anche

(12) $$\frac{\alpha(x)}{\dfrac{d}{dx}(\log f(x))} = \frac{f'(x+\theta)}{f'(x)} .$$

Ho però dimostrato al loc. cit. che: *Se una funzione infinita per* $x = \infty$, *appartiene alla prima classe, anche le sue derivate di qualunque ordine vi appartengono*; ciò prova che $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{f'(x+\theta)}{f'(x)} = 1$, ed in conseguenza di ciò

(13) $$\lim_{x=\infty} \frac{\alpha(x)}{\dfrac{d}{dx}(\log f(x))} = 1 .$$

Da ciò si conclude:

Se il prodotto $P_n = \prod\limits_1^n (1 + A_r)$ *si rappresenta mediante il valore che nel punto* $x = n$ *assume una funzione* $f(x)$ *continua e monotòna della variabile reale* x, *la quantità* A_n *è, per* $n = \infty$, *infinitesima dello stesso ordine, e con la stessa parte principale della derivata logaritmica di* $f(x)$ *nel punto* $x = \infty$.

Si noti che la formula (13) è valida sotto la condizione che la $f'(x)$ appartenga alla prima classe; ciò non avviene solo per funzioni $f(x)$ infinite, per $x = \infty$, cioè per prodotti infiniti divergenti; ma si verifica anche per funzioni $f(x)$, finite nel punto $x = \infty$, che hanno derivate logaritmiche appartenenti alla prima classe, (cfr. il n.° 38 del citato lavoro: *Sulla determinazione* ecc.).

Osservando che quando $f(x)$ è finita, $f'(x)$ è infinitesima e che il rapporto $\dfrac{f'(x+\theta)}{f'(x)}$ non può tendere a limite maggiore di 1, si conclude che *la* $\alpha(x)$ *non è in nessun caso infinitesima di ordine inferiore a quello della derivata logaritmica di* $f(x)$, *e che, condizione sufficiente per la validità* *delle* (13) *è che la* $\alpha(x)$ *sia della prima classe, cioè che* A_n *tenda allo zero meno rapidamente di* $\frac{1}{e^n}$.

Si può infine notare, e ciò risulterà anche da quel che segue, che i prodotti infiniti corrispondenti a successioni A_n infinitesime di ordine superiore a quello di $\frac{1}{e^n}$, sono molto rapidamente convergenti, e si possono quindi studiare anche coi metodi ordinari.

D'ora innanzi, quando parleremo di prodotti convergenti, supporremo sempre che la condizione (13) sia per essi soddisfatta.

10. È noto che se una funzione è infinita di ordine finito, la sua derivata logaritmica è infinitesima del primo ordine: di qui si deduce:

Se il prodotto $\prod_1^\infty (1+A_n)$ *non diverge più rapidamente di* n^a *(a reale positivo) la quantità* A_n *è infinitesima del primo ordine per* $n=\infty$.

11. Supponiamo che $\alpha(x)$ *sia, per* $x=\infty$, *infinitesima di ordine superiore od uguale al primo.*

Dalla formula (13) avremo in questo caso:

$$\tag{14} \begin{cases} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\varepsilon(x)}{x} \\ (x > x_0 \ |\varepsilon(x)| < a\,,\ a \text{ positivo determinato}) \end{cases}$$

e, nel caso che $f(x)$ ammetta anche la derivata seconda,

$$\tag{15} \begin{cases} \dfrac{f''(x)}{f(x)} = \dfrac{\varepsilon_1(x)}{x^2} \\ (x > x_0 \ |\varepsilon_1(x)| < a) \text{ (}^1\text{)} \end{cases}$$

Ora si ha:

$$\tag{16} \begin{cases} \alpha(x) = \dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)} + \dfrac{f''(x+\theta)}{2f(x)} \\ \qquad = \dfrac{f'(x)}{f(x)} + \dfrac{f''(x)}{2f(x)} \cdot \dfrac{f''(x+\theta)}{f''(x)}. \end{cases}$$

Ricordando che $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{f''(x+\theta)}{f''(x)} = 1$, facendo uso delle (14), (15), avremo:

$$\tag{17} \begin{cases} \alpha(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} + \dfrac{\varepsilon_2(x)}{x^2} \\ (x > x_0 \ |\varepsilon_2(x)| < a\,,\ a \text{ reale positivo}). \end{cases}$$

(1) *Sulla determinazione* ecc. Cfr. il § in cui studio le proprietà infinitesimali delle derivate.

Si noti che, se $\varepsilon(x)$ è infinitesimo, $\varepsilon_2(x)$ lo è di ordine non minore, donde risulta che nel secondo membro della (17), il secondo termine è infinitesimo di ordine inferiore, almeno per una unità, al primo termine.

Ricordando che $f(0) = 1$, avremo, integrando,

$$\int_0^x \alpha(x)\, dx = \lg f(x) + \frac{\varepsilon_3(x)}{x} \qquad (18)$$
$$(x > x_0 \; |\varepsilon_3(x)| < a)$$

ed anche qui si può notare che, se $\log f(x)$ è infinitesimo per $x = \infty$, $\frac{\varepsilon_3(x)}{x}$ lo è di ordine superiore.

In particolare: *Se $\alpha(x)$ è atta alla integrazione definita nell'intervallo $(0, \infty)$, si ha*

$$\int_0^\infty \alpha(x)\, dx = \lim_{x=\infty} \log f(x), \qquad (19)$$

ed anche, per la osservazione fatta al n. 7,

$$\int_0^\infty \alpha(x)\, dx = \lg \prod_1^\infty (1 + A_n), \qquad (20)$$

e di qui

$$\left\{ \begin{aligned} &\prod_1^\infty (1 + A_n) = e^{\int_0^\infty \alpha(x)\, dx} \\ &\alpha(n) = A_n. \end{aligned} \right. \qquad (21)$$

Questa formula ci dà una espressione, che mi pare notevole, del prodotto infinito nel caso che esso sia convergente. Dalla condizione poi che la $\alpha(x)$ sia integrabile, sufficiente come abbiamo visto per la sua validità, si ricavano facili *criterî di convergenza* per il prodotto stesso.

In particolare avremo [1]:

Il prodotto infinito $\Pi(1 + A_n)$ converge tutte le volte che A_n, per $n = \infty$ diventa infinitesima di ordine non minore di quello di una qualunque delle espressioni:

$$\frac{1}{n^{1+\mu}}, \quad \frac{1}{n (\log n)^{1+\mu}}, \quad \frac{1}{n \log n (\log\log n)^{1+\mu}}, \quad \ldots$$

nelle quali μ è un numero determinato differente da zero e positivo, diverge se diventa infinitesima di ordine non maggiore di una qualunque delle espressioni:

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n \log n}, \quad \frac{1}{n \log n \log\log n}, \ldots\ldots$$

(1) Dini, *Fondamenti*, pag. 360.

13. La formula (18), *nel caso che $\alpha(x)$ non sia infinitesima di ordine inferiore al primo*, ci dà modo di determinare l' ordine di infinito del prodotto $\prod_1^\infty (1 + A_n)$, quando questo diverga.

Ed infatti da essa si ricava

$$
(22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} e^{\int_0^x \alpha(x)\,dx} = f(x)\, e^{\frac{\varepsilon_3(x)}{x}} \\ (x > x_0\,,\ |\varepsilon_3(x)| < a \quad , \quad a \text{ reale finito positivo}) \end{array} \right.
$$

e, di qui

$$
(23) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{e^{\int_0^x \alpha(x)\,dx}}{f(x)} = 1\,.
$$

E cioè, *il prodotto infinito $\Pi(1 + A_n)$ è infinito del medesimo ordine ed ha la medesima parte principale della funzione $\varphi(x) = \int_0^x \alpha(x)\,dx$*, per $x = \infty$.

Sia per esempio

$$
\lim_{x=\infty} (nA_n) = p\ ;
$$

sarà anche

$$
\lim_{x=\infty} x\alpha(x) = p\ ,
$$

(p positivo per le formule (10))

e di qui

$$
\left\{ \begin{array}{l} \int_0^x \alpha(x)\,dx = p \log x + \varepsilon(x) \log x \\ (x > x_0 |\varepsilon(x)| < \varepsilon\,, \qquad \varepsilon \text{ positivo arbitrario minore di } p)\,; \end{array} \right.
$$

tenendo conto delle (23), avremo

$$
(24) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\prod_{r=1}^{n} (1 + A_r)}{n^p} = 1
$$

Cioè: *Se A_n è infinitesima del primo ordine ed è p la sua parte principale, il prodotto infinito diverge come n^p.*

Come secondo esempio, sia

$$
\lim_{u=\infty} (n \log n)\, A_n = p;
$$

troveremo in modo analogo

(25) $$\lim_{n=\infty} \frac{\prod_{r=1}^{n} (1+\mathrm{A}_r)}{(\log n)^p} = 1 .$$

14. Quando A_n *diventi infinitesima di ordine inferiore al primo*, rimarrà ancora valida la formula

(26) $$\begin{cases} \alpha(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} + \dfrac{f''(x)}{2f(x)} \cdot \eta(x) \\ \lim\limits_{x=\infty} \eta(x) = 1 . \end{cases}$$

Si osservi però che dalla $f' = f \, . \, \alpha$ si trae $f'' = f' \, . \, \alpha + f\alpha'$, cioè $\frac{f''}{f} = \alpha^2 + \alpha'$. Si vede da ciò, e dall'esame della (26) che: *Se la funzione* $(\alpha(x))^2$ *è atta alla integrazione definita nell'intervallo* $(0, \infty)$, *lo è anche la funzione* $\eta(x) \frac{f''(x)}{f(x)}$.

Ad ogni modo sia la $\alpha^2(x)$ atta o no alla integrazione nell'intervallo $(0, \infty)$, lo sarà certamente in ogni intervallo $(0, x)$, x positivo qualunque: poniamo dunque

(27) $$\int_0^x \eta(x) \frac{f''(x)}{f(x)} \, dx = \varphi(x) ,$$

da cui verrà:

(28) $$\int_0^x \alpha(x) \, dx = \log f(x) + \varphi(x) ,$$

$$e^{\int_0^x \alpha(x)\, dx} = f(x) \, e^{\varphi(x)} ,$$

(29) $$\frac{e^{\int_0^x \alpha(x)\, dx}}{f(x)} = e^{\varphi(x)} .$$

In particolare *se* $\lim\limits_{x=\infty} \varphi(x) = \mathrm{C}$, *ciò che sicuramente ha luogo quando la* $\alpha^2(x)$ *è atta alla integrazione definita da* 0 *ad* ∞, *cioè quando* A_n *è infinitesima di ordine non minore di quello di una delle funzioni:*

$$\frac{1}{\sqrt{n^\mu}} , \quad \frac{1}{\sqrt{n(\log n)^\mu}} , \ldots , \qquad (\mu \text{ positivo diverso da zero})$$

il prodotto $\prod_1^\infty (1 + A_n)$ *ha ordine di infinito eguale a quello della funzione*

$$(30) \qquad \begin{cases} e^{\int_0^x \alpha(x)\,dx} \\ \alpha(n) = A_n \end{cases}$$

per $x = \infty$.

Qualunque poi sia l'ordine di infinitesimo della A_n, potremo sempre asserire che *il prodotto* $\prod_1^\infty (1 + A_n)$ *non diverge più rapidamente di quel che faccia la funzione* (30) *per* $x = \infty$.

15. L' applicazione di questo criterio è spesso assai facile. Sia per esempio A_n infinitesimo come $\frac{\lg n}{n}$; troveremo, con calcoli assai semplici, che il prodotto $\prod_1^\infty (1 + A_n)$ diverge come $n^{\lg n}$. Il suo ordine di infinito, usando i simboli introdotti al loc. cit. si può dunque esprimere col numero transfinito λ_1.

III.

17. Si abbia ora un prodotto infinito $\Pi(1 + A_n)$ per il quale *non è soddisfatta la condizione*

$$\lim_{n=\infty} A_n = 0 .$$

Supponiamo ancora di rappresentare con $\alpha(x)$ una funzione finita, continua, derivabile in tutto l'intervallo $(0, \infty)$ e soddisfacente le condizioni

$$\alpha(n) = A_n .$$

Osserviamo anzitutto che, se si ha

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1 + A_{n+1}}{1 + A_n} = 1 ,$$

cioè se

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} (A_{n+1} - A_n) = 0 ,$$

il prodotto dato *appartiene alla seconda classe, ed il suo ordine di infinito non è minore di quello della espressione*

$$(5) \qquad e^{an} \qquad (a \text{ reale positivo qualunque})$$

ed è minore di quello della

$$(6)\qquad e^{an^2}.$$

Una determinazione più esatta si fa usando la formula

$$(7)\qquad \log(1+\alpha)=\log\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}\frac{\frac{d}{dx}(\log f(x+\theta))}{\frac{d}{dx}(\log f(x))}\;(^1)$$

dalla quale, sapendo già che $\frac{d}{dx}(\lg f(x))$ appartiene alla prima classe, si ricava

$$(8)\qquad \lim_{x=\infty}\frac{\log(1+\alpha(x))}{\frac{d}{dx}\log f(x)}=1\,.$$

In particolare, se fosse $\lim_{x=\infty}(1+A_n)=C$, si avrebbe anche $\lim_{x=\infty}\frac{d}{dx}\lg f(x)=\lg C$ e si concluderebbe che il prodotto $\Pi_1^\infty(1+A_n)$ diverge come C^n, ciò che è evidente anche per altra strada.

18. In questi prodotti appartenenti alla seconda classe, la successione dei fattori appartiene alla prima classe.

Se la successione dei fattori diverge come una funzione della seconda classe, cioè *se non è* $\Delta A_n=0$, *ed è invece*

$$(9)\qquad \lim_{n=\infty}\left(\frac{1+A_n}{1+A_{n-1}}:\frac{1+A_{n-1}}{1+A_{n-2}}\right)=1$$

il prodotto $\Pi(1+A_n)$ *non diverge meno rapidamente di* e^{an^2}, *e diverge meno rapidamente di* e^{an^3}.

La formula (8) servirà ancora alla determinazione più esatta del suo ordine di infinito, perchè le derivate logaritmiche di funzioni aventi classe finita appartengono tutte alla prima classe.

19. In generale si scorge che: *Se la quantità* $\log(1+A_n)$ *è, per* $n=\infty$ *infinita di ordine non minore di quello di* n^{p-1} *e minore di quello di* n^p, *il prodotto infinito* $\Pi(1+A_n)$ *ha ordine di infinito non minore di quello della funzione* e^{an^p} *e minore di quello di* $e^{an^{p+1}}$.

20. Quando la successione $\log(1+A_n)$ diventi infinita di ordine transfinito, il prodotto $\Pi(1+A_n)$ non avrà classe finita e se ne potrà ancora determinare il carattere infinitesimale applicando le cose dette su tali funzioni nel citato lavoro.

(1) Loc. cit. cfr. il § sulle funzioni aventi classe finita, cfr. anche la formula (5) data al n. 45.