ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

maschio, che lo sperma contiene la quantità di veleno che, in un solo accoppiamento è necessario per determinare la morte per marasma di una coniglia, come pure la morte del feto od il suo ulteriore marasma nella vita estrauterina.

Nello stato attuale delle nostre conoscenze per la precocità delle morte delle coniglie abortite non possiamo pensare, che il veleno tubercolare passato dal padre al feto, acquisti una maggiore efficacia, poichè sopra abbiamo addotte le ragioni per spiegare il fatto, cioè la gravezza dell'intossicazione dello sperma dei conigli avanzati in tubercolosi, od il ripetuto coito, ma se vi contribuisca ancora l'azione dell'embrione per rendere più efficace il veleno tubercolare, sono cose, che si possono pensare, ma non abbiamo argomenti di prova.

Io credo, che si possa per ora conchiudere a questo modo: che la femina del maschio tubercolotico può essere non solamente contagiata per accoppiamento, ma ancora intossicata; se poi questi studî sperimentali possono essere applicati alla clinica umana, spetta alla stessa farne l'indagine.

Meccanica. — *Sopra la deformazione dei cilindri sollecitati lateralmente.* Nota I del prof. EMILIO ALMANSI, presentata dal Socio VOLTERRA.

1. Sia dato un cilindro elastico ed isotropo, avente una sezione di forma qualunque. Riferiamo i suoi punti ad un sistema di assi coordinati $O(x, y, z)$, assumendo come asse delle z l'asse del cilindro (luogo dei baricentri delle sezioni trasversali).

Sugli elementi della superficie esterna (basi e superficie laterale) agiscano delle tensioni; e siano τ_1, τ_2, τ_3 le componenti della tensione che agisce sugli elementi della superficie laterale.

Dimostreremo che ogni qualvolta le tensioni τ_1, τ_2, τ_3 sono espresse da polinomii della forma

$$\tau_1 = \Sigma g_n z^n \;,\quad \tau_2 = \Sigma h_n z^n \;,\quad \tau_3 = \Sigma l_n z^n \quad (n = \text{num. int. posit.})$$

ove g_n, h_n, l_n rappresentano quantità indipendenti da z, ossia costanti per ciascuna generatrice della superficie laterale (ma che del resto possono variare comunque da una generatrice all'altra), il problema di determinare la deformazione del cilindro si può ridurre all'altro di determinarne la deformazione, essendo la superficie laterale libera, e soltanto le basi soggette a tensione [1].

Supporremo che sopra il cilindro non agiscano forze di massa.

[1] Questo secondo problema fu studiato dal Saint-Venant che ha potuto risolverlo supponendo di conoscere la forza e la coppia risultante del sistema di tensioni che agiscono sugli elementi di una base (e quindi anche dell'altra), ma lasciando indeterminata la legge secondo cui queste tensioni sono distribuite.

2. Diciamo u, v, w le componenti dello spostamento del punto di coordinate x, y, z; $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}$, etc. le componenti delle tensioni che agiscono sugli elementi di superficie normali agli assi; E il *modulo di elasticità*, λ il *coefficiente di contrazione*, proprii al materiale di cui il cilindro è costituito. Si hanno le equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{21}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{31}}{\partial z} = 0\,, \\[2mm] \dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{32}}{\partial z} = 0\,, \\[2mm] \dfrac{\partial \tau_{13}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{23}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{33}}{\partial z} = 0\,. \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{E}}(\tau_{11} - \lambda\tau_{22} - \lambda\tau_{33}),\ \text{etc.},\quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{G}}\tau_{23} = \frac{1}{\mathrm{G}}\tau_{32}\,,\ \text{etc.}$$

$$\left(\mathrm{G} = \frac{\mathrm{E}}{2(1+\lambda)}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} &= 0\,, \\ \Delta^2 v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} &= 0\,, \\ \Delta^2 w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} &= 0\,, \end{aligned}\right\} \quad (3) \quad \left\{\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\,, \\ k &= \frac{1}{1-2\lambda}\,, \\ \Delta^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}\right.$$

Chiamando poi α e β gli angoli che in un punto qualunque della superficie laterale, la normale, uscente dal cilindro, forma cogli assi $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, sarà:

$$(4)\qquad \begin{cases} \tau_{11}\cos\alpha + \tau_{21}\cos\beta = \tau_1 \\ \tau_{12}\cos\alpha + \tau_{22}\cos\beta = \tau_2 \\ \tau_{13}\cos\alpha + \tau_{23}\cos\beta = \tau_3 \end{cases}$$

3. Consideriamo un caso particolare di sollecitazione del cilindro: le componenti della tensione che agisce sulla superficie laterale, siano date dalle formule:

$$(5)\qquad \tau_1' = gz^n\,,\quad \tau_2' = hz^n\,,\quad \tau_3' = lz^n\,,$$

ove n è un numero intero e positivo, e g, h, l sono quantità indipendenti da z.

Supponiamo di saper determinare una deformazione, che indicheremo con (D′), in cui siano soddisfatte le condizioni espresse dalle formule (5); e proponiamoci di determinare una deformazione (D), tale che le componenti della tensione che agisce sugli elementi della superficie laterale siano invece:

$$\tau_1 = g z^{n+1}, \quad \tau_2 = h z^{n+1}, \quad \tau_3 = l z^{n+1} \text{ (}^1\text{)}.$$

Perciò diciamo u', v', w' le componenti degli spostamenti nella deformazione (D′). Sarà:

$$(6) \qquad \Delta^2 u' + k \frac{\partial \theta'}{\partial x} = 0, \text{ etc. } \left(\theta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right).$$

Poniamo:

$$(7) \qquad \begin{cases} u'' = \int_0^z u' \, dz + u_1, \\ v'' = \int_0^z v' \, dz + v_1, \\ w'' = \int_0^z w' \, dz + w_1, \end{cases}$$

e cerchiamo di determinare le funzioni u_1, v_1, w_1 in modo che la deformazione (D″), definita dagli spostamenti u'', v'', w'', sia una deformazione possibile, vale a dire in modo che queste funzioni soddisfacciano ad equazioni analoghe alle (6).

Posto per brevità:

$$u''' = \int_0^z u' \, dz, \quad v''' = \int_0^z v' \, dz, \quad w''' = \int_0^z w' \, dz,$$

$$\theta''' = \frac{\partial u'''}{\partial x} + \frac{\partial v'''}{\partial y} + \frac{\partial w'''}{\partial z},$$

$$f_1 = \Delta^2 u''' + k \frac{\partial \theta'''}{\partial x}, \quad f_2 = \Delta^2 v''' + k \frac{\partial \theta'''}{\partial y}, \quad f_3 = \Delta^2 w''' + k \frac{\partial \theta'''}{\partial z},$$

e inoltre

$$\theta'' = \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z}, \quad \theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z},$$

dalle equazioni (7) si deduce:

$$(8) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u'' + k \dfrac{\partial \theta''}{\partial x} = f_1 + \Delta^2 u_1 + k \dfrac{\partial \theta_1}{\partial x}, \\ \Delta^2 v'' + k \dfrac{\partial \theta''}{\partial y} = f_2 + \Delta^2 v_1 + k \dfrac{\partial \theta_1}{\partial y}, \\ \Delta^2 w'' + k \dfrac{\partial \theta''}{\partial z} = f_3 + \Delta^2 w_1 + k \dfrac{\partial \theta_1}{\partial z}. \end{cases}$$

(1) Poichè lasciamo indeterminate le tensioni che agiscono sulle basi del cilindro, vi saranno infinite deformazioni (D) e (D′) che soddisfanno alle condizioni volute.

Affinchè (D″) sia una deformazione possibile, i primi membri di queste equazioni dovranno annullarsi; si dovrà quindi avere:

$$
(9)\qquad \begin{cases} \Delta^2 u_1 + k\,\dfrac{\partial \theta_1}{\partial x} = -f_1\,, \\ \Delta^2 v_1 + k\,\dfrac{\partial \theta_1}{\partial x} = -f_2\,, \\ \Delta^2 w_1 + k\,\dfrac{\partial \theta_1}{\partial z} = -f_3 \end{cases}
$$

Notiamo che $\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\Delta^2 u''' + k\,\dfrac{\partial \theta'''}{\partial x}\right) = \Delta^2\,\dfrac{\partial u'''}{\partial z} + k\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \theta'''}{\partial z}\right) =$ $= \Delta^2 u' + k\,\dfrac{\partial \theta'}{\partial x} = 0$; dunque f_1 non contiene la variabile z; e lo stesso accadrà di f_2 ed f_3. Vediamo allora se è possibile che le equazioni (9) siano soddisfatte, ponendo la condizione che $u_1, v_1\, w_1$ non contengano z. Dovrà aversi:

$$
(10)\quad \begin{cases} \Delta^2 u_1 + k\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right) = -f_1\,, \\ \Delta^2 v_1 + k\,\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right) = -f_2\,, \end{cases} \qquad \Delta^2 w_1 = -f_3. \quad \left(\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)
$$

Esistono infinite funzioni $w_1(x, y)$ che soddisfanno l'equazione $\Delta^2 w_1 = f_3$. Per ottenere $u_1(x, y)$ e $v_1(x, y)$ costruiremo successivamente le funzioni $u_2, v_2, \theta_2, \mathrm{P}, u_3, v_3$ delle sole variabili x ed y, che soddisfanno le equazioni:

$$
\Delta^2 u_2 = -f_1\,, \quad \Delta^2 v_2 = -f_2\,, \quad \theta_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\,, \quad \Delta^2 \mathrm{P} = -\frac{k}{1+k}\,\theta_2\,,
$$

$$
u_3 = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\,, \quad v_3 = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\,,
$$

e porremo

$$
u_1 = u_2 + u_3\,, \quad v_1 = v_2 + v_3\,.
$$

Si verifica immediatamente che le equazioni (10) sono soddisfatte. Se dunque poniamo tali funzioni u_1, v_1, w_1 nelle formule (7), la deformazione (D″) che esse definiscono sarà una deformazione possibile.

Ora dalle formule (7) si ricava $\dfrac{\partial u''}{\partial z} = u'$, ecc. Per conseguenza, se diciamo τ'_{11}, τ'_{12}, ecc., τ''_{11}, τ''_{12}, ecc. le componenti delle tensioni che si sviluppano sugli elementi normali agli assi, nelle deformazioni (D′) e (D″), sarà: $\dfrac{\partial \tau''_{11}}{\partial z} = \tau'_{11}$, $\dfrac{\partial \tau''_{12}}{\partial z} = \tau'_{12}$, etc.; e così pure, chiamando $\tau''_1, \tau''_2, \tau''_3$ le componenti della tensione che agisce sulla superficie laterale del cilindro nella deformazione (D''), sarà:

$$\frac{\partial \tau_1''}{\partial z} = \tau_1', \quad \frac{\partial \tau_2''}{\partial z} = \tau_2', \quad \frac{\partial \tau_3''}{\partial z} = \tau_3';$$

e per le formule (5):

$$\frac{\partial \tau_1'}{\partial z} = gz^n, \quad \frac{\partial \tau_2'}{\partial z} = hz^n, \quad \frac{\partial \tau_3'}{\partial z} = lz^n;$$

e integrando

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \tau_1'' &= \frac{1}{n+1} gz^{n+1} + g_0, \\ \tau_2'' &= \frac{1}{n+1} hz^{n+1} + h_0, \\ \tau_3'' &= \frac{1}{n+1} lz^{n+1} + l_0, \end{aligned} \right.$$

ove g_0, h_0, l_0 sono quantità indipendenti da z, ossia costanti per ciascuna generatrice della superficie laterale.

Consideriamo ora una deformazione (D_0), definita dagli spostamenti u_0, v_0, w_0, tale che la tensione agente sulla superficie laterale abbia per componenti g_0, h_0, l_0; e poniamo:

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= (n+1)(u'' - u_0), \\ v &= (n+1)(v'' - v_0), \\ w &= (n+1)(w'' - w_0). \end{aligned} \right.$$

Nella deformazione definita da questi spostamenti u, v, w, le componenti della tensione che agisce sulla superficie laterale saranno:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (n+1)(\tau_1'' - g_0), \\ \tau_2 &= (n+1)(\tau_2'' - h_0), \\ \tau_3 &= (n+1)(\tau_3'' - l_0); \end{aligned}$$

e per le formule (11):

$$\tau_1 = gz^{n+1}, \quad \tau_2 = hz^{n+1}, \quad \tau_3 = lz^{n+1}.$$

Le formule (12) definiscono dunque una deformazione (D) che soddisfa alle condizioni volute.

Così vediamo che per determinare una deformazione in cui le componenti τ_1, τ_2, τ_3 della tensione che agisce sulle superficie laterali siano gz^{n+1}, hz^{n+1}, lz^{n+1}, basta saper determinare due deformazioni in cui le componenti della stessa tensione siano rispettivamente gz^n, hz^n, lz^n, e g_0, h_0, l_0, ove g, h, l, e g_0, h_0, l_0 rappresentano quantità indipendenti da z.

Poichè questo vale qualunque sia il numero n, possiamo dire che se sapremo determinare una deformazione del cilindro per cui si abbia sulla superficie laterale

$$\tau_1 = g\,, \quad \tau_2 = h\,, \quad \tau_3 = l\,,$$

$g\,, h\,, l$ essendo quantità assegnate, costanti lungo ciascuna generatrice, sapremo anche determinare una deformazione tale che si abbia

$$\tau_1 = gz^n\,, \quad \tau_2 = hz^n\,, \quad \tau_3 = lz^n\,,$$

essendo n un numero intero e positivo qualunque; e quindi ancora una deformazione in cui la tensione agente sulla superficie laterale abbia per componenti:

$$\tau_1 = \Sigma g_n z^n\,, \quad \tau_2 = \Sigma h_n z^n\,, \quad \tau_3 = \Sigma l_n z^n\,.$$

Le tensioni agenti sulle basi non assumeranno, in generale, i valori assegnati: per conseguenza il problema sarà ridotto a determinare la deformazione di un cilindro sollecitato soltanto alle basi.

Rimane ora a vedersi come si possa determinare la deformazione del cilindro, in modo che $\tau_1\,, \tau_2$ e τ_3 assumano sulla superficie laterale valori assegnati, *costanti lungo ciascuna generatrice*. Ciò sarà mostrato in una Nota successiva.

Meccanica. — *Sui moti stazionari di un corpo rigido nel caso della Kowalevsky*. Nota I di T. Levi-Civita, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

1. Le equazioni di Eulero, che reggono il movimento di un solido pesante, fissato per un punto Ω, sono, colle notazioni abituali,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}\frac{dp}{dt} &= (\mathrm{B}-\mathrm{C})\,qr + \mathrm{P}(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2)\,,\\ \mathrm{B}\frac{dq}{dt} &= (\mathrm{C}-\mathrm{A})\,rp + \mathrm{P}(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_2)\,,\\ \mathrm{C}\frac{dr}{dt} &= (\mathrm{A}-\mathrm{B})\,pq + \mathrm{P}(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1)\,,\end{aligned}\right.$$

(l'asse fisso ζ intendendosi verticale e diretto verso il basso).

Nel caso integrato dalla Kowalevsky, $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 2\mathrm{C}$; inoltre $z_0 = 0$, cioè il baricentro O è situato nel piano equatoriale dell'ellissoide di inerzia. Essendo indifferente la scelta della coppia $x\,, y$ in questo piano, si può supporre il semiasse positivo delle x diretto secondo la $\Omega\mathrm{O}$, talchè $y_0 = 0$, $x_0 > 0$ (e non $x_0 = 0$, intendendo così di escludere il caso di Eulero, in cui O coincide con Ω).