

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

Poichè questo vale qualunque sia il numero n , possiamo dire che se sapremo determinare una deformazione del cilindro per cui si abbia sulla superficie laterale

$$\tau_1 = g, \quad \tau_2 = h, \quad \tau_3 = l,$$

g, h, l essendo quantità assegnate, costanti lungo ciascuna generatrice, sapremo anche determinare una deformazione tale che si abbia

$$\tau_1 = g s^n, \quad \tau_2 = h s^n, \quad \tau_3 = l s^n,$$

essendo n un numero intero e positivo qualunque; e quindi ancora una deformazione in cui la tensione agente sulla superficie laterale abbia per componenti:

$$\tau_1 = \Sigma g_n s^n, \quad \tau_2 = \Sigma h_n s^n, \quad \tau_3 = \Sigma l_n s^n.$$

Le tensioni agenti sulle basi non assumeranno, in generale, i valori assegnati: per conseguenza il problema sarà ridotto a determinare la deformazione di un cilindro sollecitato soltanto alle basi.

Rimane ora a vedersi come si possa determinare la deformazione del cilindro, in modo che τ_1, τ_2 e τ_3 assumano sulla superficie laterale valori assegnati, *costanti lungo ciascuna generatrice*. Ciò sarà mostrato in una Nota successiva.

Meccanica. — *Sui moti stazionari di un corpo rigido nel caso della Kowalevsky.* Nota I di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

1. Le equazioni di Eulero, che reggono il movimento di un solido pesante, fissato per un punto Ω , sono, colle notazioni abituali,

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} = (B - C) qr + P(y_0 \gamma_3 - z_0 \gamma_2), \\ B \frac{dq}{dt} = (C - A) rp + P(z_0 \gamma_1 - x_0 \gamma_2), \\ C \frac{dr}{dt} = (A - B) pq + P(x_0 \gamma_2 - y_0 \gamma_1), \end{array} \right.$$

(l'asse fisso ζ intendendosi verticale e diretto verso il basso).

Nel caso integrato dalla Kowalevsky, $A = B = 2C$; inoltre $z_0 = 0$, cioè il baricentro O è situato nel piano equatoriale dell'ellissoide di inerzia. Essendo indifferente la scelta della coppia x, y in questo piano, si può supporre il semiasse positivo delle x diretto secondo la ΩO , talchè $y_0 = 0$, $x_0 > 0$ (e non $x_0 = 0$, intendendo così di escludere il caso di Eulero, in cui O coincide con Ω).

Rappresenterò con s^2 la frazione essenzialmente positiva $\frac{Px_0}{C}$. Questa costante s ha le dimensioni $\frac{[Px_0]^{\frac{1}{2}}}{[C]} = \frac{[ml^2 t^{-2}]^{\frac{1}{2}}}{[ml^2]^{\frac{1}{2}}} = [t^{-1}]$ e risulta quindi omogenea a p, q, r .

Aggiungendo alle equazioni precedenti le formole di Poisson, relative ai tre coseni $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, si ha in definitiva il sistema differenziale

$$(K) \quad \begin{cases} 2 \frac{dp}{dt} = qr, & 2 \frac{dq}{dt} = -rp - s^2 \gamma_3, & \frac{dr}{dt} = s^2 \gamma_2; \\ \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q, & \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r, & \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p. \end{cases}$$

La forza viva del corpo vale $\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = C(p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2)$, il potenziale, dovuto alla gravità, $Px_0 \gamma_1 = Cs^2 \gamma_1$.

La energia totale H è dunque espressa (sopprimendo il fattore costante C , che si può del resto sempre supporre eguale ad 1 con opportuna scelta dell'unità di massa) da

$$H = p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2 - s^2 \gamma_1.$$

Le (K) ammettono, oltre all'integrale delle forze vive $H = \text{cost.}$ e all'identità geometrica $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, i due integrali algebrici

$$(A) \quad \begin{cases} (1) & 2(\gamma_1 p + \gamma_2 q) + \gamma_3 r = \lambda s, \\ (2) & \{(p + iq)^2 + s^2(\gamma_1 + i\gamma_2)\} \{p - iq\}^2 + s^2(\gamma_1 - i\gamma_2)\} = \\ & = (s^2 \gamma_1 + p^2 - q^2)^2 + (s^2 \gamma_2 + 2pq)^2 = \mu^4 s^4 \quad (i = \sqrt{-1}), \end{cases}$$

nei secondi membri dei quali sono posti in evidenza i fattori di omogeneità s, s^4 , affinché le costanti λ e μ si presentino come puri numeri. (È poi lecito, nel secondo membro della (2), scrivere μ^4 , pur intendendo μ reale, poichè la forma del primo membro mostra che si tratta di quantità ≥ 0).

La (1) è chiaramente l'integrale delle aree per i piani orizzontali; la (2) l'integrale scoperto dalla Kowalevsky. Essi sono tra loro in involuzione, in quanto, adottando per es. come variabili canoniche gli angoli ϑ, f, φ di Kirchhoff e le loro coniugate $p_\vartheta, p_f, p_\varphi$, la (1) diviene $p_\varphi = \text{cost.}$ come è ben noto, mentre $p, q, r; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, e per conseguenza anche il primo membro della (2), rimangono indipendenti dall'angolo di precessione φ .

2. *Soluzioni particolari del sistema (K), per cui $r = 0$.*

Supponendo $r = 0$, la $\frac{dr}{dt} = s^2 \gamma_2$ mostra che anche γ_2 è identicamente nulla; inoltre, da $2 \frac{dp}{dt} = qr$, segue $p = \text{cost.}$ La equazione $\frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r$ si riduce a $\gamma_3 p = 0$, il che porta $\gamma_3 = 0$, ovvero $p = 0$. Nel primo caso, dovrà essere $\gamma_1 = \pm 1$, e quindi, in causa della $\frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p, q = 0$, con che le (K) rimangono tutte soddisfatte. Si tratta evidentemente ($q = r = 0$,

$p = \text{cost}$) di rotazioni uniformi attorno all'asse baricentrico ΩO , diretto verticalmente ($\gamma_1 = \pm 1$).

Se invece $p = 0$, le (K) divengono

$$r = \gamma_2 = p = 0; \quad 2 \frac{dq}{dt} = -s^2 \gamma_3, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = -\gamma_3 q, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q.$$

Le soluzioni, che ne rimangono definite corrispondono, per essere $r = p = 0$, a rotazioni attorno all'asse y , necessariamente fisso anche nello spazio e orizzontale ($\gamma_2 = 0$).

È chiaro che il corpo si comporta in tale movimento come un pendolo composto. Possiamo del resto verificarlo sulle nostre equazioni. Le ultime tre, ponendovi $\gamma_1 = \cos u$, $\gamma_3 = \sin u$, con che u rappresenta la deviazione dalla verticale dell'asse baricentrico (contata positivamente in verso opportuno), si riassumono nella equazione tipica del moto pendolare

$$2 \frac{d^2 u}{dt^2} = -s^2 \sin u.$$

3. Moti stazionari e loro distinzione in tre categorie.

Il nostro problema possiede ∞^4 soluzioni stazionarie Σ , che corrispondono ai due integrali (A) e si caratterizzano (1), eliminando da H due variabili a mezzo delle (A) e ponendo eguale a zero il differenziale dH dell'espressione ridotta \mathbf{H} di H.

Tra queste Σ sono evidentemente comprese le due sotto classi di ∞^2 soluzioni, che corrispondono a ciascuno dei due integrali (1) e (2), isolatamente considerati. Infatti porre eguale a zero il differenziale di H, dopo aver tenuto conto della sola (1), ovvero della sola (2), implica pur sempre $d\mathbf{H} = 0$.

Giova tuttavia, come apparirà dallo studio del caso generale, considerare a parte tali soluzioni. Comincerò pertanto da esse.

4. Moti stazionari, che provengono dall'integrale delle aree.

Data la forma semplicissima, che assume l'integrale delle aree (1) in variabili canoniche $\mathcal{J}, f, \varphi; p_z, p_f, p_\varphi$, ci sarà comodo usufruirne.

In generale si ha

$$(3) \quad \gamma_1 = \sin \mathcal{J} \cos f, \quad \gamma_2 = \sin \mathcal{J} \sin f, \quad \gamma_3 = \cos \mathcal{J},$$

$$(4) \quad \begin{cases} Ap = \sin f p_z + \cos f \frac{\cos \mathcal{J}}{\sin \mathcal{J}} p_f + \frac{\cos f}{\sin \mathcal{J}} p_\varphi, \\ Bq = -\cos f p_z + \sin f \frac{\cos \mathcal{J}}{\sin \mathcal{J}} p_f + \frac{\sin f}{\sin \mathcal{J}} p_\varphi, \\ Cr = -p_f, \end{cases}$$

donde

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = p_\varphi,$$

(1) Il lettore voglia riferirsi alla regola enunciata nella Nota: *Sui moti stazionari dei sistemi olonomi*, § 5, in questi Rendiconti, 3 marzo 1901, fasc. 5°.

e, dovendosi ora porre $A = B = 2$, $C = 1$,

$$\begin{aligned} H &= p^2 + q^2 + \frac{1}{2} r^2 - s^2 \gamma_1 = \\ &= \frac{1}{4} \left(p_z^2 + \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} p_f^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} p_\varphi^2 + 2 \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} p_f p_\varphi \right) + \frac{1}{2} p_r^2 - s^2 \sin \vartheta \cos f, \\ (1') \quad & p_\varphi = s\lambda. \end{aligned}$$

Portiamo in H il valore (1'), e sostituiamo in pari tempo a p_f una variabile ε , definita come segue:

$$(5) \quad \varepsilon = \frac{(1 + \sin^2 \vartheta) p_f + s\lambda \cos \vartheta}{\sin \vartheta \sqrt{1 + \sin^2 \vartheta}}.$$

La H diventa una funzione di $p_z, \varepsilon, \vartheta, f$ e precisamente

$$H = \frac{1}{4} (p_z^2 + \varepsilon^2) + \frac{1}{2} s^2 \left(\frac{\lambda^2}{1 + \sin^2 \vartheta} - 2 \sin \vartheta \cos f \right).$$

È bene osservare che il cambiamento di variabili (3), (4), (5) può essere eseguito senza timore di lasciar sfuggire alcuna soluzione particolare. Infatti la trasformazione, definita dalle (3), (4), (5), è biunivoca e regolare per tutti i valori finiti delle variabili, eccettuato soltanto il valore $\sin \vartheta = 0$, cioè $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Ora il sistema (K) non ammette alcuna soluzione particolare, per la quale possano annullarsi ad un tempo (qualunque sia t) γ_1 e γ_2 (1).

Secondo la regola generale, le soluzioni stazionarie, di cui andiamo in cerca, debbono soddisfare alla equazione $dH = 0$, cioè

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{2} p_z = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} \varepsilon = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial f} = s^2 \sin \vartheta \cos f = 0. \end{aligned}$$

Ne deduciamo (dovendosi escludere, come s'è detto or ora, che $\sin \vartheta$ si annulli per tutti i valori di t)

$$p_z = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \sin f = 0,$$

mentre ϑ soddisferà alla equazione $\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0$, ossia (ponendovi oramai $\cos f = \pm 1$) alla

$$(6) \quad \left(\frac{\lambda^2 \sin \vartheta}{(1 + \sin^2 \vartheta)^2} \pm 1 \right) \cos \vartheta = 0.$$

Si vede che $p_z, \varepsilon, f, \vartheta$ assumono tutte valori costanti; costante rimane pure p_f , in virtù della (5), e, per conseguenza $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; p, q, r$. Si tratta dunque di *rotazioni uniformi*.

(1) Supponendo $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (e quindi $\gamma_3 = \pm 1$), dalle $\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q$, $\frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r$ risulta $q = 0, p = 0$, nè può quindi essere soddisfatta la $2 \frac{dq}{dt} = -rp - s^2 \gamma_3$, che è pure una delle equazioni (K).

Da $p_z = 0$, $\text{sen } f = 0$ segue che γ_2 e q si annullano, cioè che l'asse y è orizzontale ($\gamma_2 = 0$) e che l'asse di rotazione appartiene al piano meridiano contenente il baricentro ($q = 0$). Combinando queste due circostanze, risulta che l'asse di rotazione è, rispetto allo spazio, necessariamente orientato secondo la verticale; lo si può del resto anche desumere dalla formula $\gamma_3 p - \gamma_1 r = 0$, che è diretta conseguenza di $\gamma_2 = 0$.

Per fissare la posizione dell'asse di rotazione nel corpo, bisogna ricorrere alla (6), distinguendo le due eventualità

$$(6_a) \quad \cos \vartheta = 0,$$

$$(6_b) \quad \frac{\lambda^2 \text{sen } \vartheta}{(1 + \text{sen}^2 \vartheta)^2} = \mp 1.$$

a) Se si annulla $\cos \vartheta$, cioè γ_3 , la (5), facendovi $\varepsilon = 0$, porge $p_f = 0$; quindi anche $r = 0$ e siamo ricondotti alle rotazioni intorno all'asse baricentrico. I valori costanti degli argomenti p_z , ε , ϑ , ed f , da cui dipende \mathbf{H} , sono in questo caso 0 , 0 , $\frac{\pi}{2}$; e 0 , ovvero π , secondochè $\cos f = \pm 1$, secondochè cioè il baricentro O cade al disotto o al disopra del punto di sospensione Ω . Risguardando come variabili indipendenti p_z , ε e $\gamma_3 = \cos \vartheta$, $\varepsilon' = \text{sen } f$, dovremo di conformità porre in \mathbf{H}

$$\text{sen } \vartheta = |1 - \gamma_3^2|^{\frac{1}{2}}, \quad \cos f = \pm |1 - \varepsilon'^2|^{\frac{1}{2}}.$$

Formiamo la $d^2\mathbf{H}$ relativa ai valori $p_z = 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$, o, ciò che torna lo stesso, sviluppiamo \mathbf{H} in serie di Mac-Laurin, lasciando i termini d'ordine superiore al secondo. Avremo

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} s^2 \left(\frac{\lambda^2}{2} \mp 2 \right) + \frac{1}{4} \left\{ p_z^2 + \varepsilon^2 + \left(\frac{\lambda^2}{2} \pm 2 \right) s^2 \gamma_3^2 \pm 2 s^2 \varepsilon'^2 \right\} + \dots$$

I termini in parentesi costituiscono una forma definita, quando si adottano i segni superiori, e in questo caso soltanto (O sotto Ω). È la ben nota condizione di stabilità.

b) Se ϑ soddisfa alla (6_b), siccome l'angolo ϑ è, per sua definizione, compreso fra 0 e π e quindi $\text{sen } \vartheta > 0$, deve intanto anche il secondo membro essere positivo, talchè $f = \pi$ (e non $f = 0$). Ciò posto, già lo sviluppo di \mathbf{H} in funzione degli argomenti p_z , ε , $\varepsilon' = \text{sen } f$ (trattando ϑ come un parametro) mostra che c'è instabilità. Si ha infatti, a meno di termini d'ordine superiore al secondo in ε' ,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} s^2 \left(\frac{\lambda^2}{1 + \text{sen}^2 \vartheta} + 2 \text{sen } \vartheta \right) + \frac{1}{4} (p_z^2 + \varepsilon^2) - \frac{1}{2} s^2 \text{sen } \vartheta \cdot \varepsilon'^2,$$

e la parte di secondo ordine non è una quadrica definita.

5. Moti stazionari, che provengono dall'integrale della Kowalevsky.

Introducendo una variabile ausiliaria ε , si può evidentemente sostituire alla (2) il sistema equivalente

$$(2') \quad s^2 \gamma_1 = \mu^2 s^2 \cos \varepsilon - p^2 + q^2,$$

$$(2'') \quad s^2 \gamma_2 = \mu^2 s^2 \text{sen } \varepsilon - 2pq.$$

Ci converrà, in questa ricerca, riguardare come parametri indipendenti, atti a fissare lo stato di moto del sistema (oltre l'angolo di precessione φ , che non interviene esplicitamente nelle formule) p, q, r, γ_1 ed ε , rimanendo γ_2 definita dalla (2''), e, si intende, γ_3 dalla identità $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$. Rispetto a queste variabili (la cui sostituzione alle primitive è senza riserve legittima, data la forma lineare delle (2'')) si rapporto a γ_2 che a sen ε l'integrale (2) della Kowalevsky è sostituito dalla (2'). Per trovare i moti stazionari corrispondenti, cominceremo coll'eliminare γ_1 da \mathbf{H} a mezzo della (2'), ciò che porge

$$\mathbf{H} = 2p^2 + \frac{1}{2}r^2 - \mu^2 s^2 \cos \varepsilon.$$

Ponendo eguale a zero il differenziale di questa funzione \mathbf{H} , si ha

$$p = 0, \quad r = 0, \quad \text{sen } \varepsilon = 0.$$

Dacchè si annullano insieme p ed r , si tratta di rotazioni attorno all'asse y , le quali avvengono (S 2) come se il detto asse fosse tenuto fisso in posizione orizzontale.

Per la stabilità si richiede che $d^2\mathbf{H}$ equivalga ad una quadrica definita in quattro argomenti ($2(n - m)$, dice la regola). La funzione \mathbf{H} dipende da tre variabili soltanto, p, r, ε ; $d^2\mathbf{H}$ equivale per conseguenza ad una forma irriducibile con tre argomenti al più. Dovremmo dedurne che c'è instabilità.

Effettivamente non si può concludere in modo diverso, se si vuol proprio aver riguardo alla completa (1) stabilità. Giova tuttavia osservare in generale che quando, come nel caso presente, si tratta di una funzione \mathbf{H} , che dipende da meno di $2(n - m)$ parametri, quelli che mancano assumono sostanzialmente il carattere di coordinate ignorate. Ha allora interesse, per i corrispondenti moti stazionari, la questione della stabilità, anche se, o meglio anzi, in quanto la si restringa ai soli parametri, da cui \mathbf{H} effettivamente dipende.

Ciò posto, nell'esempio attuale, saranno da considerare i soli parametri p, r, ε .

Come si rileva immediatamente dalla espressione di \mathbf{H} , si ha stabilità od instabilità secondochè ε ha il valore 0, oppure ha il valore π (nel caso generale, in cui la costante μ non è zero) (2).

Per interpretare questo risultato, ricorriamo alla (2'), la quale, per le soluzioni in questione, si riduce a

$$s^2 \gamma_1 = \pm \mu^2 s^2 + q^2.$$

(1) Per quanto, si intende bene *relativa* (agli integrali, o relazioni invarianti generatrici).

(2) Per $\mu = 0$, anche il parametro ε sparisce dall'espressione di \mathbf{H} , la quale si riduce a $2p^2 + \frac{1}{2}r^2$. Dovendosi aver riguardo a questi soli parametri, le corrispondenti soluzioni sono stabili.

Supponendo $\varepsilon = 0$, bisogna prendere nel secondo membro il segno $+$, e allora γ_1 rimane costantemente positivo: se invece $\varepsilon = \pi$, allora γ_1 assume anche valori negativi. Infatti, ponendo, come a § 2, $\gamma_1 = \cos u$, la (2') diviene

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = s^2(u^2 + \cos u).$$

Qualora $\cos u$ rimanesse costantemente positivo, non potrebbe u variare sempre nello stesso senso e dovrebbe quindi annullarsi $\frac{du}{dt}$, ossia $u^2 + \cos u$, il che implica contraddizione.

In definitiva dunque queste rotazioni attorno ad un asse orizzontale riescono stabili od instabili, secondochè il baricentro O rimane o non rimane costantemente al disotto dell'asse di rotazione.

6. *Relazioni invarianti, che caratterizzano gli ∞^4 moti stazionari Σ del caso generale.*

Dobbiamo eliminare da H due variabili a mezzo delle (A). In primo luogo ci è lecito ritenere γ_3 non identicamente nulla, poichè, per $\gamma_3 = 0$, la (1) non contiene r (la (2) ne è sempre indipendente), e quindi, rimanendo escluso che sia r tra quei parametri, che si eliminano da H a mezzo delle (A), si dovrebbe avere, per le conseguenti soluzioni stazionarie, $\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial r} = r = 0$; e si ricadrebbe quindi, rammentando il § 2, in uno dei due casi già considerati.

Ciò posto, adoteremo come variabili indipendenti p, q, ε (e il solito angolo di precessione φ) intendendo di eliminare, da H , γ_1 , a mezzo della (2'), ed r , a mezzo della (1), il che appunto può farsi per essere γ_3 non identicamente nulla. Va da sè che, nella (1) stessa, γ_1 e γ_2 sono a ritenersi definite dalle (2'), (2'') e $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Avremo così

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_1}{\partial p} &= -\frac{2}{s^2} p, & \frac{\partial \gamma_1}{\partial q} &= \frac{2}{s^2} q, & \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varepsilon} &= -\mu^2 \sin \varepsilon = -\frac{1}{s^2} (s^2 \gamma_2 + 2pq), \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial p} &= -\frac{2}{s^2} q, & \frac{\partial \gamma_2}{\partial q} &= -\frac{2}{s^2} p, & \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varepsilon} &= \mu^2 \cos \varepsilon = \frac{1}{s^2} (s^2 \gamma_1 + p^2 - q^2), \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial p} &= -\frac{1}{\gamma_3} \left(\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial p} \right) = \frac{2}{s^2 \gamma_3} (\gamma_1 p + \gamma_2 q), \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial q} &= -\frac{1}{\gamma_3} \left(\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial q} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial q} \right) = -\frac{2}{s^2 \gamma_3} (\gamma_1 q - \gamma_2 p), \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial \varepsilon} &= -\frac{1}{\gamma_3} \left(\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varepsilon} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{2\mu^2}{\gamma_3} (\gamma_1 \sin \varepsilon - \gamma_2 \cos \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{s^2 \gamma_3} \{ 2\gamma_1 pq - \gamma_2 (p^2 - q^2) \}. \end{aligned} \right.$$

D'altra parte, a norma della (1),

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dp} &= \frac{\partial r}{\partial p} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial p} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial p} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_3} \frac{\partial \gamma_3}{\partial p}, \\ \frac{dr}{dq} &= \frac{\partial r}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_3} \frac{\partial \gamma_3}{\partial q}, \\ \frac{dr}{d\varepsilon} &= \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_3} \frac{\partial \gamma_3}{\partial \varepsilon}, \end{aligned}$$

dalle quali, essendo

$$\frac{\partial r}{\partial p} = -\frac{2\gamma_1}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial q} = -\frac{2\gamma_2}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \gamma_1} = -\frac{2p}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} = -\frac{2q}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial \gamma_3} = -\frac{r}{\gamma_3},$$

segue immediatamente

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dr}{dp} &= \frac{2}{s^2 \gamma_3^2} \left\{ -s^2 \gamma_1 \gamma_3 + 2\gamma_3 (p^2 + q^2) - r(\gamma_1 p + \gamma_2 q) \right\}, \\ \frac{dr}{dq} &= \frac{2}{s^2 \gamma_3^2} \left\{ -s^2 \gamma_2 \gamma_3 + r(\gamma_1 q - \gamma_2 p) \right\}, \\ \frac{dr}{d\varepsilon} &= \frac{2}{s^2 \gamma_3^2} \left\{ -s^2 \gamma_3 (\gamma_1 q - \gamma_2 p) + \gamma_3 q (p^2 + q^2) - \gamma_1 p q r + \frac{1}{2} \gamma_2 (p^2 - q^2) r \right\}. \end{aligned} \right.$$

Siamo ora in grado di calcolare le derivate di $\mathbf{H}(p, q, \varepsilon)$. Infatti, sostituendo nella H , a $s^2 \gamma_1$, il suo valore (2') e seguitando a ritenere r definita dalla (1), si può scrivere

$$\mathbf{H} = 2p^2 + \frac{1}{2}r^2 - \mu^2 s^2 \cos \varepsilon,$$

donde

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}}{dp} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \frac{dr}{dp} = 4p + \frac{2r}{s^2 \gamma_3^2} \left\{ -s^2 \gamma_1 \gamma_3 + 2\gamma_3 (p^2 + q^2) - r(\gamma_1 p + \gamma_2 q) \right\}, \\ \frac{d\mathbf{H}}{dq} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \frac{dr}{dq} = \frac{2r}{s^2 \gamma_3^2} \left\{ -s^2 \gamma_2 \gamma_3 + r(\gamma_1 q - \gamma_2 p) \right\}, \\ \frac{d\mathbf{H}}{d\varepsilon} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \frac{dr}{d\varepsilon} = \mu^2 s^2 \sin \varepsilon + r \frac{dr}{d\varepsilon} = s^2 \gamma_2 + 2pq + r \frac{dr}{d\varepsilon}, \end{aligned} \right.$$

ed è facile verificare che sussiste la identità

$$(10) \quad \frac{d\mathbf{H}}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ q \frac{d\mathbf{H}}{dp} - \left(p + \frac{s^2 \gamma_3}{r} \right) \frac{d\mathbf{H}}{dq} \right\}.$$

Le soluzioni stazionarie sono contraddistinte dalle condizioni

$$\frac{d\mathbf{H}}{dp} = 0, \quad \frac{d\mathbf{H}}{dq} = 0, \quad \frac{d\mathbf{H}}{d\varepsilon} = 0,$$

le quali, in causa della (10), si riducono alle prime due (numero appunto conforme alla regola).

Dacchè, come già abbiamo notato, è da escludersi che si annulli r , la $\frac{dH}{dq} = 0$ equivale a

$$-s^2 \gamma_2 \gamma_3 + r(\gamma_1 q - \gamma_2 p) = 0.$$

Questa equazione ha un significato semplicissimo. Essendo per le (K)

$$\frac{dr}{dt} = s^2 \gamma_2, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p,$$

essa esprime che $\gamma_3 \frac{dr}{dt} - r \frac{d\gamma_3}{dt} = 0$, ossia che fra r e γ_3 passa, durante tutto il movimento un rapporto costante, *non nullo, nè infinito*, perchè nè r , nè γ_3 sono identicamente nulli. Potremo pertanto ritenere

$$(11) \quad r = s \gamma_3,$$

designando con r una costante finita e diversa da zero.

Con questa osservazione il nostro sistema

$$\frac{dH}{dp} = 0, \quad \frac{dH}{dq} = 0$$

diventa

$$(12) \quad \begin{cases} (2vp - s\gamma_1)(p + rs) + (2vq - s\gamma_2)q = 0, \\ -\gamma_2(p + rs) + \gamma_1 q = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni stazionarie corrispondenti hanno caratteri diversi, secondochè per esse il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2vp - s\gamma_1 & 2vq - s\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 2v(\gamma_1 p + \gamma_2 q) - s(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$$

è, o no, diverso da zero.

Geodesia. — Determinazione astronomica di azimuth eseguita a Monte Soratte nel 1900. Nota di VINCENZO REINA, presentata dal Socio CREMONA.

La mira notturna, consistente sostanzialmente in una lente dell'apertura di 15 cm., nel cui fuoco è disposta di coltello la fiamma di una lampada a petrolio, venne collocata in centro sul segnale trigonometrico di M. Mario, ad una distanza cioè di circa 35928 metri. La sua distanza zenitale rispetto all'Universale Bamberg, sistemato sullo stesso pilastro sul quale venne determinata la latitudine, risultò di 91° 00'.

Il metodo d'osservazione fu quello della misura reiterata dell'angolo fra la Mira e la Polare, distribuendo le determinazioni in serie di quattro cia-

scuna, due fatte in una posizione e due nella posizione coniugata dello strumento. Una serie risultava quindi da otto puntamenti fatti secondo lo schema

Oculare a destra M, P, P, M
 " " sinistra M, P, P, M.

Dai puntamenti fatti sulla Mira, e da quelli fatti sulla Polare, in modo indipendente, si ricavava la costante di collimazione. Ogni due serie si ruotava il cerchio orizzontale di 30°.

I singoli valori ottenuti per l'azimut, non ancora corretti per l'aberrazione diurna, sono riassunti nei seguenti specchi. I valori di ogni serie sono disposti in colonna verticale, ed in testa alle coppie di serie osservate nelle diverse posizioni del cerchio, sono registrate le posizioni apparenti della Polare introdotte in calcolo. Le lettere S (sinistra) e D (destra) definiscono la posizione dell'oculare.

9 luglio 1900.

Cerchio 0°				Cerchio 30°			
$\alpha = 1^h.23^m.00^s.52$		$\delta = 88^{\circ}.46'.21''.17$		$\alpha = 1^h.23^m.00^s.62$		$\delta = 88^{\circ}.46'.21''.18$	
S	{ $A' = 186^{\circ}.35'.30''.4$	D	{ $A' = 186^{\circ}.35'.28''.4$	S	{ $A' = 186^{\circ}.35'.30''.1$	D	{ $A' = 186^{\circ}.35'.32''.2$
	{28.9		{29.1		{29.2		{31.4
D	{28.7	S	{28.2	S	{31.0	D	{30.0
	{30.3		{29.6		{28.3		{33.6
Cerchio 60°							
$\alpha = 1^h.23^m.00^s.72$		$\delta = 88^{\circ}.46'.21''.18$		$\alpha = 1^h.23^m.00^s.72$		$\delta = 88^{\circ}.46'.21''.18$	
	{ $A' = 186^{\circ}.35'.29''.9$	S	{ $A' = 186^{\circ}.35'.32''.5$	S	{ $A' = 186^{\circ}.35'.32''.5$	D	{ $A' = 186^{\circ}.35'.32''.5$
D	{31.7		{29.8		{29.8		{31.4
	{31.4	S	{33.0	D	{33.0		{31.7
	{31.5		{31.3		{31.3		{31.3

10 luglio.

Cerchio 90°				Cerchio 120°			
$\alpha = 1^h.23^m.01^s.66$		$\delta = 88^{\circ}.46'.21''.26$		$\alpha = 1^h.23^m.01^s.72$		$\delta = 88^{\circ}.46'.21''.27$	
S	{ $A' = 186^{\circ}.35'.32''.6$	D	{ $A' = 186^{\circ}.35'.33''.7$	S	{ $A' = 186^{\circ}.35'.30''.7$	D	{ $A' = 186^{\circ}.35'.32''.5$
	{30.7		{31.5		{31.0		{32.3
D	{31.6	S	{32.5	D	{31.6	S	{31.7
	{31.6		{32.9		{29.9		{33.3
Cerchio 150°				Cerchio 180°			
$\alpha = 1^h.23^m.01^s.79$		$\delta = 88^{\circ}.46'.21''.27$		$\alpha = 1^h.23^m.01^s.85$		$\delta = 88^{\circ}.46'.21''.28$	
D	{ $A' = 186^{\circ}.35'.30''.9$	S	{ $A' = 186^{\circ}.35'.29''.6$	D	{ $A' = 186^{\circ}.35'.30''.8$	S	{ $A' = 186^{\circ}.35'.30''.0$
	{29.8		{31.4		{31.4		{30.0
S	{31.5	D	{31.1	S	{30.1	D	{30.9
	{29.4		{29.6		{32.1		{29.2

15 luglio.

Cerchio 180°				Cerchio 270°			
$\alpha = 1^h.23^m.06^s.72$		$\delta = 88^{\circ}.46'.21''.75$		$\alpha = 1^h.23^m.06^s.76$		$\delta = 88^{\circ}.46'.21''.75$	
S	{ $A' = 186^{\circ}.35'.31''.7$	D	{ $A' = 186^{\circ}.35'.33''.1$	D	{ $A' = 186^{\circ}.35'.32''.8$	S	{ $A' = 186^{\circ}.35'.31.0$
	{32.5		{33.2		{31.6		{32.0
D	{32.5	S	{33.8	S	{32.1	D	{32.3
	{31.8		{32.4		{32.2		{30.8

I valori medi risultanti delle singole serie, corretti per l'aberrazione diurna, sono ancora riassunti nel seguente specchio, dove sono aggiunte le espressioni differenziali.

DATA	Posizione del cerchio	A	c_m	c_*	$c_m - c_*$	Espressioni differenziali
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
9 luglio 1900	0°	186° 35' 29".89	- 5".6	+ 6".4	- 12".0	$dA = -0.25 da^s - 1.09 d\delta + 0.02 dq''$
		29. 14	- 5. 3	+ 7. 9	- 13. 2	- 0.18 da - 1.23 d\delta + 0.02 dq
		29. 97	- 5. 5	+ 7. 4	- 12. 9	- 0.03 da - 1.35 d\delta + 0.03 dq
" " "	30°	32. 12	- 6. 3	+ 9. 1	- 15. 4	+ 0.05 da - 1.35 d\delta + 0.03 dq
		31. 44	- 6. 0	+ 8. 1	- 14. 1	+ 0.20 da - 1.22 d\delta + 0.02 dq
		31. 97	- 6. 8	+ 7. 3	- 14. 1	+ 0.26 da - 1.10 d\delta + 0.02 dq
" " "	60°	31. 94	- 4. 0	+ 8. 5	- 12. 5	+ 0.17 da - 1.25 d\delta + 0.02 dq
		32. 97	- 5. 4	+ 9. 3	- 14. 7	- 0.10 da - 1.31 d\delta + 0.02 dq
		31. 12	- 5. 9	+ 9. 0	- 14. 9	- 0.02 da - 1.35 d\delta + 0.03 dq
" " "	120°	32. 77	- 3. 9	+ 9. 7	- 13. 6	+ 0.01 da - 1.35 d\delta + 0.03 dq
		30. 72	- 6. 0	+ 9. 1	- 15. 1	+ 0.15 da - 1.29 d\delta + 0.02 dq
		30. 72	- 5. 5	+ 9. 1	- 14. 6	+ 0.21 da - 1.20 d\delta + 0.02 dq
" " "	150°	31. 42	- 5. 6	+ 8. 4	- 14. 0	+ 0.27 da - 1.08 d\delta + 0.02 dq
		30. 34	- 5. 4	+ 8. 2	- 13. 6	+ 0.31 da - 0.95 d\delta + 0.02 dq
		32. 44	- 11. 9	- 2. 2	- 9. 7	+ 0.20 da - 1.21 d\delta + 0.02 dq
15 " "	180°	33. 44	- 11. 8	- 2. 1	- 9. 7	+ 0.26 da - 1.10 d\delta + 0.02 dq
		32. 50	- 13. 0	- 1. 6	- 11. 4	+ 0.32 da - 0.95 d\delta + 0.02 dq
		31. 85	- 13. 2	- 0. 4	- 12. 8	+ 0.35 da - 0.79 d\delta + 0.02 dq

Le costanti di collimazione c_m e c_* dedotte dai puntamenti fatti sulla Mira e sulla Polare rispettivamente, e le loro differenze $c_m - c_*$, registrate nelle colonne (4), (5), (6) mostrano la dipendenza del valore di tal costante dalla inclinazione del cannocchiale. Qui è a notarsi che il reticolo venne spostato la sera del 12 luglio, ciò che ha avuto per effetto di mutare i valori numerici delle costanti c_m e c_* , senza portare una variazione notevole alla loro differenza.

Dalla combinazione dei valori della terza colonna si ricava

$$A = 186^\circ 35' 31''.49 \pm 0''.14.$$

La media delle espressioni differenziali

$$dA = + 0.10 da^s - 1.18 d\delta'' + 0.02 dq'',$$

può assumersi come esprime la modificazione da apportarsi a questo risultato, per tener conto di eventuali variazioni nelle posizioni apparenti della Polare, oppure nella latitudine g .

Riduzioni in centro.

Per ridurre le osservazioni dal punto S, occupato dallo strumento, al centro trigonometrico C, si collegò S a C per mezzo di un triangolo di cui

si misurarono un lato ed i tre angoli. Dalla sua risoluzione risultò l'eccentricità

$$CS = e = 22^m.436.$$

Misurato poi in C l'angolo compreso fra la direzione di M. Mario e la direzione dello strumento, ed aggiuntovi l'azimut noto di M. Mario, si ottenne l'azimut della direzione dal Centro allo Strumento

$$\alpha = 324^\circ.20'.20''.$$

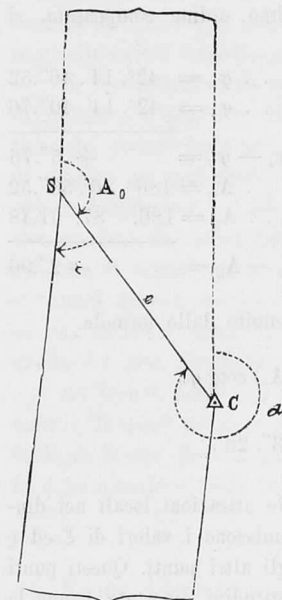
Se con questo si determinano i due angoli A_0 ed ϵ segnati in figura, si ha

$$A_0 = 144^\circ.20'20'' \quad \epsilon = 42^\circ.15'.11''.$$

La riduzione in centro della latitudine risulta quindi

$$\Delta\varphi = -\frac{e \cos \alpha}{R \text{ arc } 1''} = -0''.59.$$

Per l'azimut invece, detta s la distanza Centro-M. Mario ($\log s = 4,55525$) si ha



Correzione per il centramento della direzione. $= \frac{e \text{ sen } \epsilon}{s \text{ arc } 1''} = 1'.26''.65$

Convergenza dei meridiani fra S e C $= \frac{e \text{ sen } A_0}{N \text{ arc } 1''} \text{ tg } \varphi = 0''.38$

Riduzione in centro dell'azimut $\Delta A = 1'.27''.03$

Queste due riduzioni, applicate ai valori precedentemente determinati, conducono ai risultati finali:

Latitudine astronomica di M. Soratte (centro del segnale)

$$\varphi = 42^\circ.14'.46''.52 \pm 0''.10 \quad (\text{Epoca } 1900.53)$$

Azimut astronomico della direzione M. Soratte - M. Mario

$$A = 186^\circ.36'.58''.52 \pm 0''.15 \quad (\text{Epoca } 1900.52)$$

• *Attrazione locale.*

Se si fa il confronto fra questi valori astronomici e quelli geodetici provenienti da Castanèa (assunto come punto origine) e calcolati dall'Istituto Geografico Militare, attraverso alla rete di primo ordine compensata, si ottiene

$$\begin{array}{l}
 \text{Latitudine di M. Soratte} \left\{ \begin{array}{l} \text{astronomica } \varphi_a = 42^\circ. 14'. 46''. 52 \\ \text{geodetica } \varphi_g = 42^\circ. 14'. 40''. 76 \end{array} \right. \\
 \\
 \varphi_a - \varphi_g = + 5''. 76 \\
 \text{Asimut della direzione M. Soratte - M. Mario} \left\{ \begin{array}{l} \text{astronomico } A_a = 186^\circ. 36'. 58''. 52 \\ \text{geodetico } A_g = 186. 37. 01. 48 \end{array} \right. \\
 \\
 A_a - A_g = - 2''. 96
 \end{array}$$

Le due componenti dell'attrazione locale, definite dalle formole

$$\xi = \varphi_a - \varphi_g \quad \eta = (A_a - A_g) \cotg \varphi_a$$

risultano quindi

$$\xi = + 5''. 76 \quad \eta = - 3''. 26.$$

Per formarsi un concetto dell'andamento delle attrazioni locali nei dintorni di Roma, nello specchio seguente si riuniscono i valori di ξ ed η ora trovati, a quelli precedentemente ottenuti negli altri punti. Questi punti vi sono disposti per latitudini crescenti: le longitudini riportate hanno la loro origine a Castanèa.

Punto	Latitudine geodetica	Longitudine geodetica	ξ	η
Monte Pisarello.	41° 28' 36". 24	- 2° 54' 44". 61	- 0". 04	- 2". 16
Monte Cavo	41. 45. 02. 12	- 2. 48. 39. 87	+ 1. 44	—
Fiumicino	41. 46. 12. 86	- 3. 17. 33. 23	+ 1. 88	- 2. 17
Monte Mario	41. 55. 24. 38	- 3. 04. 06. 32	+ 1. 91	- 0. 84
Monte Soratte	42. 14. 40. 76	- 3. 01. 06. 70	+ 5. 76	- 3. 26

Di qui emerge come la componente meridiana della attrazione locale vada sempre crescendo nel procedere da Sud a Nord, fino a raggiungere a M. Soratte un valore abbastanza rilevante.

I precedenti valori delle attrazioni locali non sono però, e non possono ancora essere, definitivi. In primo luogo le coordinate astronomiche introdotte in calcolo sono riferite alle *posizioni istantanee* del Polo e non alla *posizione media*. Ciò si sarebbe potuto fare per i primi quattro punti, ma non

per il quinto, determinato in epoca alla quale ancora non si estendono gli elementi di riduzione dell'ultimo Rapporto di Albrecht ⁽¹⁾.

Ma anche le coordinate geodetiche dovranno subire delle variazioni, in seguito alla nuova compensazione cui la rete di primo ordine dovrà essere assoggettata, almeno parzialmente, per stabilire l'accordo geometrico delle basi fra loro. Le norme generali, da adottarsi in tale compensazione, furono fissate nella seduta della Commissione Geodetica Italiana del 27 giugno 1900 ⁽²⁾.

In tale seduta venne riaffermata la risoluzione, precedentemente adottata, di assumere il punto di Monte Mario come origine delle coordinate geodetiche dei vertici della rete. Su proposta del prof. Schiaparelli venne stabilito di eseguire in quel punto una nuova stazione astronomica completa di latitudine, longitudine ed azimut, sia per uniformarsi alle prescrizioni della Commissione Geodetica Internazionale, la quale vuole che le stazioni astronomiche di primo ordine (punti di Laplace) siano eseguite in doppio, con strumenti diversi, metodi diversi ed anche diversi osservatori, sia per venire ad una decisione circa la discordanza che la mia latitudine presenta con quella del prof. Respighi.

Ed io non posso che affrettare col desiderio la esecuzione di tali operazioni, le quali avranno per effetto di sostituire in modo definitivo l'ellissoide di Monte Mario a quello di Castanèa, nelle ricerche aventi per oggetto la determinazione della forma del Geoide.

Fisica terrestre. — Sul terremoto del 24 aprile 1901 nei pressi di Palombara Sabina. Nota del dott. LUIGI PALAZZO, presentata dal Socio TACCHINI.

Compito della presente Nota è di dare breve comunicazione all'Accademia sul terremoto che, nel giorno 24 aprile 1901 intorno a 15^h 20^m, fu avvertito dalla maggior parte della cittadinanza di Roma e che ebbe la sua origine nei pressi di Palombara Sabina.

Nel giorno e nell'ora anzidetta, io mi trovavo all'ultimo piano dell'Ufficio Centrale di Meteorologia e casualmente stavo in osservazione dinanzi ad un pendolo regolatore. Avvertita, per successivi sussulti del pavimento, la leggiera ma pur ben sensibile scossa, potei rilevare tosto dall'orologio a pendolo l'ora del fenomeno, che, tenuto conto della correzione spettante all'orologio, risultò essere 15^h 20^m 25^s. Giudicai di 5-6 secondi la durata

⁽¹⁾ *Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation am Schlusse des Jahres 1899.* Berlin 1900.

⁽²⁾ *Processo verbale delle sedute della Commissione Geodetica Italiana tenute in Milano nel settembre 1895 e nel giugno 1900.* Firenze 1900.