

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 20 gennaio 1901.*

P. BLASERNA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*Meccanica. — Sulla determinazione di soluzioni particolari di un sistema canonico, quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante. Nota II<sup>(1)</sup> di T. LEVI-CIVITA.*

3. *Comportamento stazionario delle soluzioni  $\Sigma$ .* — Per maggior comodo, userò d'ora innanzi linguaggio dinamico, interpretando le (C) come equazioni del moto di un sistema, la cui energia totale sia rappresentata dalla funzione H.

Mi propongo di stabilire che *le soluzioni  $\Sigma$  corrispondono a moti stazionari del sistema.*

Per dimostrarlo, prenderò le mosse dalla circostanza che le  $m$  funzioni

$$P_r = p_r - f_r \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

sono in involuzione, talchè ne esistono altre  $n - m$  indipendenti  $P_i = F_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ), che costituiscono assieme ad esse un'ennupla involutoria<sup>(2)</sup>. Esiste allora eziandio una funzione S dei  $2n$  argomenti  $x$  e P, tale che le equazioni

$$(8) \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

<sup>(1)</sup> V. pag. 3.

<sup>(2)</sup> Cfr. per es. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, § 61.

definiscono precisamente le  $n$  funzioni  $P_r = p_r - f_r$ ,  $P_i = F_i$  delle  $x$  e delle  $p$  <sup>(1)</sup>.

Ponendo poi

$$(9) \quad X_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

si ha nelle (8), (9) una trasformazione fra le due coppie di serie di variabili  $x, p$ ;  $X, P$ , che, per una nota proposizione di Jacobi, conserva i sistemi canonici.

Le (C) si cambiano pertanto in

$$(C') \quad \frac{dP_i}{dt} = - \frac{\partial H'}{\partial X_i}, \quad \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_i},$$

designandosi per maggior chiarezza con  $H'$  la espressione di  $H$  nelle nuove variabili  $X, P$ .

Le (A<sub>1</sub>) assumono la forma più semplice

$$(A'_1) \quad P_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Riferendoci ormai a queste variabili  $X, P$ , poniamo, secondo il procedimento indicato a § 1,  $P_r = 0$  in  $H'$ , e poi, detto  $H'$  il risultato di questa sostituzione,

$$(B') \quad \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial X_i} = 0 \quad (i = m + 1, \dots, n).$$

Le (5), applicate al caso presente, ci dicono che  $H'$  è indipendente da  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . Ne viene che le funzioni  $X_i, P_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ), definite dalle (B') <sup>(2)</sup>, si riducono a pure costanti.

Ciò posto, ricordiamo che, secondo il sig. Routh, *un determinato movimento si dice stazionario o permanente, quando è possibile scegliere delle variabili  $X, P$  in modo che* (essendo, rispetto a queste variabili,

$$P_i = \varphi_i(t), \quad X_i = \psi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

<sup>(1)</sup> Ibidem, § 111; od anche Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, B. II, pag. 123. La funzione, qui chiamata  $S$ , corrisponde alla  $\Omega + \sum_1^n P_k X_k$  dei citati autori.

<sup>(2)</sup> Le (B') sono effettivamente atte a definire le  $X_i, P_i$ , poichè non è nullo il determinante funzionale dei loro primi membri rapporto a queste variabili. Qualora infatti ciò fosse, lo stesso dovrebbe accadere per il determinante funzionale dei primi membri delle (B) rapporto alle  $p_i, x_i$  (come segue immediatamente dal teorema di moltiplicazione dei determinanti, tenendo conto delle (B') e delle  $\frac{\partial H'}{\partial X_1} = 0, \dots, \frac{\partial H'}{\partial X_m} = 0$ ). Ora, in principio del paragrafo 2, noi abbiamo precisamente introdotta l'ipotesi che il detto determinante sia diverso da zero, supponendo le (B) risolubili rapporto alle  $p_i, x_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ).

le equazioni, che definiscono il movimento) la espressione della energia  $H'$  rimane indipendente da  $t$ , in seguito alla trasformazione lineare

$$(10) \quad P_i = g_i(t) + \pi_i, \quad X_i = \psi_i(t) + \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Supponendo di circoscrivere la classe dei movimenti del dato sistema, col considerare soltanto quelli, che soddisfanno alle relazioni invarianti  $(A'_1)$ , vien naturale di estendere la definizione di *stazionarietà*, al modo stesso che ciò si suol fare per la *stabilità*. *Stazionari in senso relativo sono dunque a dirsi quei movimenti, per cui la condizione, testè dichiarata, rimane soddisfatta, in virtù delle relazioni invarianti.*

Data la forma speciale delle  $(A'_1)$ , la caratteristica della stazionarietà relativa si può manifestamente enunciare come segue:

La funzione  $H'$  deve conservarsi indipendente da  $t$ , anche dopo la sostituzione

$$(11) \quad \begin{cases} P_i = g_i(t) + \pi_i & (i = m + 1, \dots, n), \\ X_i = \psi_i(t) + \xi_i & (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

È chiaro adesso che le nostre soluzioni  $\Sigma$  corrispondono tutte a moti permanenti.

Infatti, adottando le variabili  $X$  e  $P$ , le funzioni  $g_i(t)$ ,  $\psi_i(t)$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) sono, per ogni  $\Sigma$ , delle costanti  $\alpha_i, \beta_i$ , come abbiám visto. Da  $t$  dipenderanno in generale  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , le quali però non entrano in  $H'$ . Eseguire la sostituzione (11) in  $H'$  equivale dunque a scambiarsi  $P_i, X_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) in  $\alpha_i + \pi_i, \beta_i + \xi_i$ , operazione che evidentemente non introduce  $t$ .

Merita di essere notato che, quando le  $(A)$  sono veri e propri integrali, vi ha stazionarietà, anche in senso assoluto.

Infatti, in questo caso, le funzioni  $F_r + \text{cost}$  sono in involuzione (mentre in generale si può soltanto asserire che le parentesi  $(F_r, F_s)$  si annullano, *tenendo conto delle*  $(A_1)$ ); e tutte le considerazioni, istituite finora, stanno, anche prendendo inizialmente  $P_r = F_r + \pi_r$  (dove le  $\pi_r$  sono costanti indeterminate), anzichè  $P_r = p_r - f_r$ . L'unica differenza consisterà in questo che si avranno, al posto delle  $(A'_1)$ , le

$$(A') \quad P_r = \pi_r \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

e, al posto di

$$H' = (H')_{P_1 = \dots = P_m = 0},$$

una

$$\bar{H}' = (H')_{P_1 = \pi_1, \dots, P_m = \pi_m}.$$

Del resto, potremo, come sopra, asserire che, per una qualunque soluzione  $\Sigma$ , la sostituzione (11) non introduce il tempo in  $\bar{H}'$ . Ora ciò equivale a dire

che la sostituzione (10), corrispondente ad una  $\Sigma$  (e per cui quindi si ha  $g_1(t) = g_2(t) = \dots = g_m(t) = 0$ ) non introduce  $t$  in  $H'$ .

Di quà si conclude la assoluta stazionarietà di tutti i movimenti, definiti dalle  $\Sigma$ .

4. *Criterio energetico di stabilità.* — Consideriamo, come sopra, la categoria dei movimenti del proposto sistema, conciliabili colle (A'). Le equazioni, che definiscono  $P_i, X_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) in termini del tempo, si otterranno senz'altro dalle (C'), ponendo nei secondi membri  $P_1 = P_2 = \dots = P_m = 0$ . Avremo così le equazioni

$$\frac{dP_i}{dt} = - \frac{\partial H'}{\partial X_i}, \quad \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad (i = m + 1, \dots, n).$$

Per i teoremi ben noti di Dirichlet e di Liapounoff, la soluzione particolare  $P_i = \alpha_i, X_i = \beta_i$  di queste equazioni è stabile allora e solo allora che la funzione  $H'$  possiede, per i detti valori  $\alpha_i, \beta_i$ , un minimo effettivo; ossia allora e solo allora che la forma quadratica  $d^2H'$  è definita. Ecco dunque la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità *relativa* di una generica  $\Sigma$ . Tale condizione presenta però l'inconveniente di essere espressa in variabili  $X, P$ . È affatto indifferente adottare queste o quelle variabili, per dimostrare delle proprietà; anzi è preferibile riferirsi a quelle, per cui la dimostrazione si fa nel modo più semplice. Ma, se si devono fare dei calcoli, le trasformazioni disturbano; ed è indispensabile di evitarle, quando, come nel caso presente, si tratta di un cambiamento di variabili, la cui effettiva determinazione dipende da una questione, eventualmente più elevata di quella che si studia.

Per la costruzione delle soluzioni  $\Sigma$  abbiamo una regola generale, che si applica a qualsiasi sistema di variabili (e che richiede al più un'operazione differenziale d'ordine  $m - 1$ ). Anche la questione della stabilità deve potersi decidere senza la trasformazione (8), (9) (che implica in generale  $n - m$  operazioni successive degli ordini  $2(n - m), 2(n - m - 1), \dots, 2$ , rispettivamente).

Osserviamo a tale scopo che, sostituendo in  $H'$  le  $P_i, X_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) coi loro valori (8), (9), e ritenendo in questi le  $p_1, p_2, \dots, p_m$  definite dalle (A<sub>1</sub>), si deve ritrovare la funzione  $H$ . Si avrà dunque

$$d^2H = d^2H',$$

e le derivate seconde di  $H$  si esprimeranno in funzione delle derivate seconde di  $H'$  mediante formule, che (per essere nulle tutte le derivate prime di  $H'$ , per i valori considerati  $P_i = \alpha_i, X_i = \beta_i$ ) hanno carattere covariante. Ne viene che la forma quadratica  $d^2H$  (nelle  $2(n - m) + m$  variabili  $dp_{m+1}, \dots, dp_m; dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ ) è riducibile, poichè appunto con una op-

portuna trasformazione lineare (i cui coefficienti saranno in generale funzioni di  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ) si cambia in  $d^2\mathbf{H}$ .

Constatata così la riducibilità della forma  $d^2\mathbf{H}$  (1), supponiamo (il che non implica integrazioni, ma solo un'opportuna sostituzione lineare) di trasformarla effettivamente in una forma quadratica  $Q$  a  $2(n - m)$  argomenti. Questa  $Q$  sarà equivalente a  $d^2\mathbf{H}$  e quindi il criterio di stabilità si potrà direttamente desumere dalla forma  $Q$ . Concludiamo pertanto: *Le  $\Sigma$  sono stabili allora e solo allora che  $Q$  (forma ridotta di  $d^2\mathbf{H}$ ) è una quadrica definita.*

5. *Esempi.* — a) Consideriamo il moto di un corpo rigido pesante, fissato per un punto  $\Omega$ . Nel caso generale, quando cioè i tre momenti principali di inerzia, relativi ad  $\Omega$ , sono distinti e il baricentro  $O$  comunque situato nel corpo, si ha il solo integrale delle aree per i piani orizzontali

$$G_3 = \text{cost.}$$

Da questo integrale si traggono, nel modo suesposto,  $\infty^2$  moti stazionari. Un calcolo semplicissimo mostra che corrispondono alle rotazioni uniformi del corpo attorno alla verticale di  $\Omega$ , che coincide nel corpo con una (2) delle sei direzioni, definite, per ogni valore della velocità angolare  $\omega$ , dalle equazioni —  $(B - C) \omega^2 \gamma_2 \gamma_3 = P(y_0 \gamma_3 - z_0 \gamma_2)$ , —  $(C - A) \omega^2 \gamma_3 \gamma_1 = P(z_0 \gamma_1 - x_0 \gamma_3)$ , —  $(A - B) \omega^2 \gamma_1 \gamma_2 = P(x_0 \gamma_2 - y_0 \gamma_1)$ , in cui è manifesto il significato delle lettere.

Per il caso di Lagrange e Poisson (ellissoide di inerzia di rivoluzione attorno alla  $\Omega O$ ), c'è un secondo integrale ( $r = \text{cost.}$ , colle notazioni abituali) in involuzione col primo. Dobbiamo dunque aspettarci  $\infty^4$  moti permanenti. Ed infatti siamo condotti alle così dette *precessioni regolari*, troppo bene studiate (3), perchè valga la pena di soffermarvisi un solo istante.

Se si suppone che non agiscano forze (o più generalmente che sia nullo il loro momento risultante rispetto ad  $\Omega$ ), si hanno i tre integrali delle aree

$$G_1 = \text{cost.}, \quad G_2 = \text{cost.}, \quad G_3 = \text{cost.}$$

(1) Ciò si poteva del resto desumere direttamente dalle (5). Derivandole e tenendo conto delle (B), si hanno le (7') e le

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x_r \partial x_s} + \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_s}, f_r \right\} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, m).$$

Date queste relazioni lineari ed omogenee fra i coefficienti della forma  $d^2\mathbf{H}$ , la caratteristica del suo discriminante non può superare  $2(n - m)$ .

(2) Queste sei direzioni sono tutte reali, per valori abbastanza grandi di  $\omega$ . In ogni caso due almeno sono reali. Esse appartengono tutte al cono quadrico  $(B - C) x_0 \gamma_2 \gamma_3 + (C - A) y_0 \gamma_3 \gamma_1 + (A - B) z_0 \gamma_1 \gamma_2 = 0$ . Cfr. in proposito: Staude, *Ueber permanente Rotationsachsen*, Crelle's Journal, B. 113, 1894.

(3) Cfr. in particolare la *Theorie des Kreisels* dei sigg. Klein e Sommerfeld; cap. I, § 6; III, § 6.

Essi non sono in involuzione, come è ben noto, ma ognuna delle tre coppie

$$\begin{aligned} G_1 &= \text{cost}, & G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 &= \text{cost}; \\ G_2 &= \text{cost}, & G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 &= \text{cost}; \\ G_3 &= \text{cost}, & G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 &= \text{cost} \end{aligned}$$

è involutoria, e le devono far riscontro  $\infty^4$  moti stazionari. Queste tre classi di movimenti non sono altro che le rotazioni attorno ai tre assi di inerzia. La verifica diretta non presenterebbe alcuna difficoltà. Limitiamoci ad osservare che le accennate rotazioni dipendono bene da 4 costanti; due per fissare la posizione nello spazio dell'asse di inerzia, attorno a cui la rotazione si compie, e le altre due per fissare la posizione e la velocità iniziale del corpo rispetto allo stesso asse,

b) Nel problema piano dei tre corpi, supposto fisso il baricentro, le equazioni, che definiscono il moto relativo di due di essi,  $P_1$  e  $P_2$ , rispetto al terzo  $P_3$ , si possono presentare in forma canonica con quattro gradi di libertà, le due serie di variabili coniugate essendo costituite dalle coordinate relative  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2$ ) di  $P_1$  e  $P_2$  (rispetto a  $P_3$ ) e dalle componenti  $p_i, q_i$  ( $i = 1, 2$ ) delle loro quantità di moto assolute <sup>(1)</sup>.

Si ha l'integrale delle aree

$$\sum_{i=1}^2 (x_i q_i - y_i p_i) = \text{cost.}$$

Quali sono i movimenti stazionari, che corrispondono a questo integrale?

Si trova un risultato ben noto, talchè stimo superfluo riportare il calcolo per disteso. I tre corpi costituiscono un triangolo equilatero di grandezza costante e ruotano uniformemente attorno al comune centro di gravità. È il caso più semplice delle soluzioni particolari scoperte da Laplace <sup>(2)</sup>.

c) Il moto di un solido non soggetto a forze, in un fluido incompressibile, indefinito, comporta, qualunque sia la forma del corpo e la distribuzione delle masse, i sei integrali fondamentali, che esprimono la conservazione del moto del baricentro e del momento risultante delle quantità di moto:

$$\begin{aligned} F_1 &= \text{cost}, & F_2 &= \text{cost}, & F_3 &= \text{cost}; \\ G_1 &= \text{cost}, & G_2 &= \text{cost}, & G_3 &= \text{cost}. \end{aligned}$$

Le sei funzioni  $F_i, G_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) costituiscono un gruppo, il quale comprende un sottogruppo involutorio di quattro elementi al più, per es.

$$F_1, F_2, F_3, F_4 = \sum_{i=1}^3 F_i G_i.$$

<sup>(1)</sup> Cfr. Poincaré, *Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps*. Acta Mathematica, T. 21, 1897.

<sup>(2)</sup> *Mécanique Céleste*, libro X, cap. VI.

Agli integrali

$$F_1 = \text{cost}, \quad F_2 = \text{cost}, \quad F_3 = \text{cost}, \quad F_4 = \text{cost}$$

dovrà pertanto far riscontro una classe  $\infty^8$  di moti permanenti del corpo.

Sono questi i moti elicoidali, studiati dal sig. Craig (1), partendo dalle equazioni del Kirchhoff e proponendosi di assegnare la più generale soluzione, compatibile colla ipotesi che le caratteristiche  $u, v, w; p, q, r$  del moto rigido sieno tutte costanti. Lascio anche quì di trascrivere il calcolo, limitandomi ad avvertire che esso si fa in modo semplice e non privo di eleganza, se fin da principio si scelgono gli assi in modo opportuno. E precisamente, dacchè sono costanti la risultante e il momento risultante delle quantità di moto, giova far coincidere uno degli assi coordinati coll'asse centrale di questo sistema di vettori.

**Fisica.** — *Sulla misura assoluta della pressione atmosferica mediante il ludione.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio BLASERNA.

Se un ludione, avente la forma di campanella alta pochi centimetri, larga due o tre, è immerso completamente in un liquido, ed essendo zavorrato in modo che vada a fondo, lo si appende mediante un filo sottile al piatto d'una bilancia, siccome il volume dell'aria in esso contenuto ed il peso del liquido da esso spostato dipendono dalla pressione atmosferica e dalla profondità alla quale si trova il ludione, ne segue che se determiniamo i pesi diversi occorrenti per l'equilibrio a due profondità diverse e determinate, potremo dedurre il valore della pressione atmosferica. È utile equilibrare il ludione privo d'aria con tara o con pesi, che non occorre conoscere, ed allora introdotta l'aria nel ludione, il peso che bisognerà aggiungere nel piatto al quale esso è appeso, per ristabilire l'equilibrio, sarà uguale al peso del liquido spostato dall'aria e ne misurerà il volume con una unità il cui valore in centimetri cubi è  $1:\gamma$ , essendo  $\gamma$  la densità del liquido.

Se  $P$  e  $P'$  sono questi pesi quando il livello del liquido nel ludione trovasi alle profondità  $h$  ed  $h+h'$  sotto il livello nel recipiente e  $H$  ed  $H'$  sono le pressioni corrispondenti dell'aria del ludione, la legge di Boyle ci dà:

$$PH = P'H' \text{ ossia } H = \frac{P'}{P - P'} (H' - H)$$

e siccome  $H' - H = h' \gamma : 13,6$  ed  $H$  la pressione dell'aria priva di vapore

(1) *The motion of a solid in a fluid.* American Journal, vol. II, 1879.