ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 gennaio 1901.

P. Blaserna Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Biologia. — *Nuove ricerche intorno alla Malaria.* Nota del Socio G. B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla determinazione di soluzioni particolari di un sistema canonico, quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

Nel trattato di dinamica del sig. Routh [1] sono esposte alcune conseguenze della così detta *ignorazione di coordinate*.

Si suppone che la forza viva T di un sistema olonomo a legami indipendenti dal tempo, e così il potenziale U delle forze attive, non dipendano esplicitamente da alcune coordinate: $x_1, x_2, \dots, x_m$, p. es., essendo genericamente n il grado di libertà del sistema e $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ le sue coordinate lagrangiane. Le equazioni del moto ammettono allora gli m integrali lineari (rispetto alle componenti della velocità)

$$\frac{\partial T}{\partial x'_r} = \text{cost} \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

[1] Advanced Part, §§ 98-100

e rimangono soddisfatte, attribuendo alle x'_r $(r = 1, 2, \dots, m)$ valori costanti arbitrarî, e alle x_i $(i = m+1, \dots, n)$ valori pure costanti, definiti dalle equazioni

$$\frac{\partial(\mathrm{T} - \mathrm{U})}{\partial x_i} = 0 \quad (i = m+1, \dots, n),$$

dove beninteso si sieno posti per le x'_r i valori scelti, e zero per le x'_i.

Si fa così corrispondere al sistema degli integrali $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_r} =$ costante, una classe ∞^{2m} di soluzioni particolari, assai notevoli, perchè rappresentano moti stazionarî del sistema, per i quali la questione della stabilità si decide, come nel caso dell'equilibrio, mediante la semplice ispezione dell'integrale delle forze vive $\mathrm{T} - \mathrm{U} =$ cost.

Mostra infatti il sig. Routh come, eliminando le x'_r dalla espressione della forza viva, a mezzo degli integrali $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_r} = u_r$, questa assume la forma $\mathrm{T} + \mathrm{F}$, dove T è una forma quadratica nelle rimanenti x' e F una funzione delle sole x.

Le equazioni del moto conservano la forma lagrangiana, non direttamente rispetto alla espressione ridotta $\mathrm{T} + \mathrm{F}$ della forza viva, ma alla

$$\mathrm{T} + \mathrm{F} - \sum_1^m u_r x'_r$$

(dove pure sono da ritenersi eliminate le x'_r a mezzo degli integrali).

Comunque, per gli accennati moti stazionarî, si annullano evidentemente tutte le derivate della funzione $\mathrm{T} + \mathrm{F} - \mathrm{U}$, rapporto alle $2(n-m)$ variabili x_i, x'_i. Ritenuto pertanto che le costanti u_r abbiano valori fissi, le condizioni *quantitative* perchè $\mathrm{T} + \mathrm{F} - \mathrm{U}$ ammetta un minimo risultano soddisfatte, ed è giustificato assumere la esistenza effettiva di questo minimo come criterio di stabilità — di fronte alla classe dei movimenti, per cui le u_r conservano gli stessi valori — appoggiandosi sopra il teorema di Dirichlet. (Il teorema di Liapounoff mostrerebbe poi facilmente che in ogni altro caso c'è instabilità).

L'interesse di queste considerazioni mi ha indotto a ricercare se esse non fossero per avventura estensibili ai casi, in cui un sistema dinamico ammette degli integrali primi di forma qualsiasi.

La generalizzazione si presenta spontanea quando le equazioni del moto si assumono sotto forma canonica. Si dimostra infatti (e ciò per qualsiasi sistema canonico) che, *ad ogni insieme di m relazioni invarianti* (o in particolare integrali) *in involuzione, corrisponde* — purchè sia soddisfatta un'ovvia condizione di indipendenza, di cui a § 2 — *una classe di ∞^m almeno* (nel caso degli integrali ∞^{2m}) *soluzioni, la cui determinazione dipende dalla integrazione di un sistema d'ordine $m-1$, al più.*

Complemento essenziale del teorema si è che *le soluzioni, cui si perviene in tal guisa, hanno sempre comportamento stazionario, ed è quindi applicabile il criterio energetico di stabilità.*

Data la grande scarsezza di movimenti, stabili, nel senso rigoroso della parola (1), giova prendere atto di ogni contributo alla loro determinazione effettiva. Rispetto all'attuale, mi si consenta di rilevare che esso abbraccia tutti gli esempî di moti stabili, finora conosciuti.

1. Sia un sistema canonico

$$(\mathrm{C}) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la cui funzione caratteristica H non dipende t.

Siano poi

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{F}_r(p_1, p_2, \ldots, p_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

m relazioni invarianti di fronte al sistema (C), pure indipendenti da t, risolubili rispetto ad altrettante p, ed in involuzione tra di loro.

In forma risoluta le rappresenterò con

$$(\mathrm{A}_1) \qquad p_r = f_r(p_{m+1}, \ldots, p_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Se $\mathbf{H}$ *è ciò, che diviene* H, *quando* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *si sostituiscono coi loro valori* (A₁) *e si pone*

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = m + 1, \ldots, n),$$

anche il sistema complessivo delle (A) *e delle* (B) *è invariante rispetto a* (C).

Per dimostrarlo, cominciamo col tradurre in formule le nostre ipotesi. Esse sono:

1°. Le relazioni (A), o, ciò che è lo stesso, le (A_1) costituiscono un sistema invariante. Questo vuol dire che, derivando le (A_1) rispetto a t, e tenendo conto delle (C) e delle stesse (A_1), risultano altrettante identità.

Sarà dunque a ritenersi

$$-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_r} = \frac{df_r}{dt} = -\sum_{m+1}^{n}{}_j \frac{\partial f_r}{\partial p_j}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_j} + \sum_{1}^{n}{}_j \frac{\partial f_r}{\partial x_j}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_j},$$

(1) Si può anzi considerare questa assoluta stabilità come un carattere affatto eccezionale. La stabilità naturale va presa in un senso molto più lato. Cfr. in proposito la prefazione alla Memoria: *Sopra alcuni criteri di instabilità*, presentemente in corso di stampa negli Annali di Matematica (Ser. III, T. V).

in quanto, eseguite le derivazioni, si sostituisca, per ogni p_s $(s=1,2,\dots,m)$ la corrispondente f_s.

Convenendo, per brevità, di porre, per due generiche funzioni V, W,

$$\{V, W\} = \sum_{m+1}^{n}{}_j \left(\frac{\partial V}{\partial p_j} \frac{\partial W}{\partial x_j} - \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial W}{\partial p_j} \right),$$

potremo scrivere

$$\frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} + \sum_{1}^{m}{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_r}{\partial x_s} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m). \tag{1}$$

2°. Le relazioni (A), e per conseguenza le (A_1) sono involutorie. Avuto riguardo alla notazione, testè introdotta, queste condizioni si esprimono con

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_r} + \{f_r, f_s\} \equiv 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, m). \tag{2}$$

Ho adoperato il simbolo $\equiv$ per mettere in evidenza che l' eguaglianza sta identicamente rispetto a tutte le lettere, che compariscono nel primo membro. Non c'è infatti alcuna p_s $(s = 1, 2, \dots, m)$, che si debba intendere eliminata a mezzo delle (A_1).

3°. $\mathbf{H}$ proviene da H, ponendovi $p_s = f_s$. Ne conseguono le eguaglianze

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{1}^{m}{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i} &= \frac{\partial H}{\partial x_i} - \sum_{1}^{m}{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \end{aligned} \right. \quad (i = m+1, \dots, n), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_r} = \frac{\partial H}{\partial x_r} - \sum_{1}^{m}{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial x_r} \quad (r = 1, 2, \dots, m). \tag{4}$$

Dalle (3) risulta subito

$$\{H, f_r\} = \{\mathbf{H}, f_r\} + \sum_{1}^{m}{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \{f_r, f_s\},$$

che, sommate membro a membro colle (4), danno

$$\frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_r} + \{\mathbf{H}, f_r\} + \sum_{1}^{m}{}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \left[-\frac{\partial f_s}{\partial x_r} + \{f_r, f_s\} \right].$$

Portando nelle (1) questo valore di $\frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\}$ e avendo riguardo alle (2), si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_r} + \{\mathbf{H}, f_r\} \equiv 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m), \tag{5}$$

in cui, come già nelle (2), è lecito adoperare il segno di identità, perchè mancano le p_s.

Ciò posto, si tratta di verificare che $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}$ risultano effettivamente nulle, in virtù delle (A), (B), (1), ..., (5).

Si ha in primo luogo

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} &= \left\{\mathrm{H}, \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right\} + \sum_1^m{}_r \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_i\, \partial x_r}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_r}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} &= \left\{\mathrm{H}, \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}\right\} + \sum_1^m{}_r \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x_i\, \partial x_r}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_r} \end{aligned}\right.$$

$$(i = m+1, \dots, n);$$

mentre la derivazione delle (5), rapporto ad una generica p_i ed x_i, porge

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_i\, \partial x_r} + \left\{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, f_r\right\} + \left\{\mathrm{H}, \frac{\partial f_r}{\partial p_i}\right\} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x_i\, \partial x_r} + \left\{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}, f_r\right\} + \left\{\mathrm{H}, \frac{\partial f_r}{\partial x_i}\right\} = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(r = 1, 2, \dots, m;\ i = m+1, \dots, n).$$

Col tener conto delle (B), le (3) si riducono a

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} = -\sum_1^m{}_r \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_r}\frac{\partial f_r}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} = -\sum_1^m{}_r \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_r}\frac{\partial f_r}{\partial x_i},$$

e, usufruendo di queste espressioni, le $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}$ assumono l'aspetto

$$(6')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} &= \sum_1^m{}_r \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_r}\left[\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_i\, \partial x_r} + \left\{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, f_r\right\}\right], \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} &= \sum_1^m{}_r \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_r}\left[\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x_i\, \partial x_r} + \left\{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}, f_r\right\}\right] \end{aligned}\right.$$

$$(i = m+1, \dots, n).$$

Per le stesse (B), le $\left\{\mathrm{H}, \frac{\partial f_r}{\partial p_i}\right\}$, $\left\{\mathrm{H}, \frac{\partial f_r}{\partial x_i}\right\}$ si annullano, talchè le precedenti equazioni (7) divengono

$$(7') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i}, f_r \right\} = 0, \\ &\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\, \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_i}, f_r \right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(r = 1, 2, \ldots, m;\; i = m + 1, \ldots, n).$$

Sono dunque nulli i secondi membri delle (6′). c. d. d.

Osservazione. Nel teorema è evidentemente implicita la condizione che le equazioni (B) sieno compatibili, cioè che esistano effettivamente dei valori $x_i^{(0)}, p_i^{(0)}$ delle x, p, per cui esse riescono soddisfatte (¹). E per verità il passaggio formale dalle (6) e (7) alle (6′) e (7′) — in che riposa la dimostrazione del teorema — è lecito, solo in quanto, esistendo soluzioni $x_i^{(0)}, p_i^{(0)}$, si possa riferirsi a uno di questi sistemi di valori. È poi bene inteso che le funzioni tutte, qui considerate, si suppongono regolari, almeno in un certo intorno degli accennati valori $x_i^{(0)}, p_i^{(0)}$.

2. *Soluzioni particolari.* — La proposizione, or ora dimostrata, permette di trovare con molta facilità alcune soluzioni particolari del proposto sistema (C).

Supponiamo le (B) tutte indipendenti e risolubili rispetto alle $p_{m+1}, \ldots p_n$; $x_{m+1}, \ldots, x_n$ (ciò, che implica tra altro che le (A) sieno distinte da $H =$ cost, nel qual caso la H si riduce ad una costante e le (B) ad altrettante identità). Dalle (B) ed (A) potremo ricavare le $2n - m$ variabili $p, x_{m+1}, \ldots, x_n$, in funzione delle rimanenti m, $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Per il carattere invariante delle (A) e (B), facendo queste sostituzioni nel sistema differenziale (C), devono rimanere in tutto m equazioni indipendenti (quelle, che esprimono $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_m}{dt}$ in funzione delle stesse x), le altre risultando identicamente soddisfatte. Ogni soluzione di questo sistema ridotto (C_1) fornisce senz'altro una soluzione di (C). Basta aggiungervi le rimanenti variabili, definite dalle (A), (B).

Rispetto all'integrazione di (C_1), si osserverà che essa è al più una operazione d'ordine $m - 1$, poichè il sistema ammette l'integrale $H =$ cost [o più precisamente quello, che se ne ottiene, esprimendo la H per le sole $x_1, x_2, \ldots, x_m$, a mezzo delle (A) e (B)]. Altre semplificazioni intervengono quando si conoscono integrali del sistema primitivo (C), indipendenti

(¹) Ciò accadrà in generale, poichè si tratta di $2(n - m)$ equazioni tra $2(n - m) + m$ variabili. Quando poi le (B) ammettono soluzioni comuni, lo stesso può dirsi senz'altro del sistema complessivo (A_1), (B), poichè le (A_1) si presentano risolute rispetto a variabili, che non entrano nelle (B).

dalle (A) e (B); per ogni integrale, si abbassa ovviamente di una unità l'ordine del sistema da integrare.

Integrandolo, si hanno, come s'è detto, ∞^m soluzioni Σ del sistema canonico (C). Quando in particolare le (A) sono, tutte o in parte, veri integrali (anzichè essere semplici relazioni invarianti) e quindi le F corrispondenti contengono una costante additiva, la classe delle Σ dipende da un numero maggiore di costanti arbitrarie: Se ne hanno dunque $2m$, allorchè ognuna della (A) è un integrale.

Ma non giova insistere su queste generalità.

Riservo ad una prossima comunicazione lo studio di una importante proprietà [1], comune a tutte le soluzioni, che scaturiscono dall'indicato procedimento.

Fisica. — *Sulla misura delle variazioni della pressione atmosferica mediante il ludione.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

Se un ludione, avente forma di campanella, alta pochi centimetri, larga due o tre e contenente una certa quantità d'aria, essendo immerso completamente in un liquido e zavorrato in modo che vada a fondo, è appeso con un filo sottile al braccio d'una bilancia, le variazioni della pressione atmosferica facendo variare il volume dell'aria in esso contenuta e quindi la spinta che esso subisce, faranno variare il peso occorrente per ristabilire l'equilibrio, e dalle variazioni di questo peso potremo agevolmente dedurre quelle della pressione.

Le variazioni della spinta causate dalle variazioni di temperatura sono di segno contrario per il vetro e per l'aria, ed è facile ottenere che esse si compensino.

Si può anche far a meno della bilancia, fissando sulla sommità del ludione un tubo sottile, verticale e convenientemente graduato, portante in cima un leggero piattello e regolando il volume dell'aria o il peso del ludione in modo che questo galleggi come un areometro e s'immerga fino alla sommità del tubo alle pressioni massime possibili; se la pressione diminuisce, l'areometro emerge, ed osservando a quale divisione del tubo l'areometro affiora potremo leggere direttamente la pressione, e qualora il ludione emergesse troppo e il punto d'affioramento non cadesse sulla graduazione, si potrà ottenere che ciò avvenga, collocando sul piattello pesi convenienti. Siccome questi sono

[1] Si è appunto in vista di ciò che ho supposto le (B) risolubili rapporto alle p_i, x_i $(i = m+1, ..., n)$. Le osservazioni precedenti — con debite modificazioni — rimangono applicabili, anche prescindendo da questa ipotesi.