ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

Questa formula mostra che C è sempre negativo: affinchè fosse nullo dovrebbero sussistere le due equazioni

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=2y\,,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-2x\,,$$

che sono incompatibili tra loro.

Ne segue che dall'equazione (28) si può sempre ricavare il valore della costante b, in modo che la formula (27) dia per Φ un valore unico in tutti i punti del contorno. Determinata la costante b, nei secondi membri delle equazioni (25) figurano soltanto quantità note. Quindi mediante la formula (27) che può anche scriversi

$$\Phi=\int_{P_0}^{P'}(\mathrm{V}\cos\alpha-\mathrm{U}\cos\beta)\,ds$$

conosceremo il valore della funzione $\Phi(x,y)$ in un punto qualunque del contorno s. Mediante la formula

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos\beta\right)=-(\mathrm{U}\cos\alpha+\mathrm{V}\cos\beta)$$

potremo poi conoscere, in ogni punto di s, la derivata normale della funzione Φ. E poichè questa funzione deve soddisfare all'equazione $\Delta^2\Delta^2=0$, essa sarà determinata in tutta l'area A, ossia in tutto il cilindro.

La determinazione effettiva della funzione Φ può farsi per un grandissimo numero di aree. In tali casi pertanto il problema è risoluto.

Meccanica. — *Sui casi d'equilibrio d'un corpo elastico isotropo, che ammettono sistemi isostatici di superficie.* Nota di Adolfo Viterbi, presentata dal Corrisp. Ricci.

§ I.

Il problema che forma oggetto della presente Nota trae le sue origini dalle seguenti proposizioni enunciate dal Lamé:

1ª. « Un corpo in equilibrio elastico può sempre essere diviso in parallelepipedi elementari mediante un sistema triplo di superficie ortogonali, dette dal Lamé stesso « Superficie isostatiche » (mentre il sistema triplo costituito dalle superficie in discorso si dirà « Sistema isostatico di superficie » o anche semplicemente « Sistema isostatico »), le quali sono sollecitate normalmente dalle forze elastiche » [1].

Quindi per un corpo in equilibrio elastico ogni sistema triplo di superficie ortogonali può divenire isostatico, quando le sue superficie che costituiscono il contorno del solido siano soggette a sforzi normali. [1].

[1] Lamé, *Leçons sur le Coordonnées Curvilignes* ecc. Paris, 1859, pag. 272-273.

2ª. « Esistendo un sistema isostatico in un corpo solido omogeneo in equilibrio elastico, per ogni superficie di questo sistema triplo ortogonale le componenti tangenziali si annullano e rimangono soltanto le componenti normali. Queste sono le forze elastiche principali (o pressioni principali) che danno in ogni punto le direzioni e le grandezze degli assi dell'ellissoide d'elasticità » (1).

Se non che il Weingarten (2) osservò che la prima di queste proposizioni non era esatta, nel senso che in generale non esistono i sistemi isostatici pei corpi in equilibrio elastico, ma esistono invece soltanto sotto date condizioni. E nella citata Memoria egli stabilì appunto le condizioni necessarie e sufficienti all'esistenza di tali sistemi. Chiarito però questo punto, rimane pur sempre la grande importanza che hanno i sistemi isostatici nello studio del problema dell'equilibrio dei corpi elastici. Quest'importanza si rileva tosto dalla seconda delle citate proposizioni del Lamé. Invero risulta da questa, che ai diversi tipi di sistemi isostatici che potessero esistere, corrispondono casi d'equilibrio elastico notevoli per la legge che presiede alla distribuzione degli sforzi. Si fu appunto partendo da queste considerazioni ch'io mi proposi il problema seguente, che forma oggetto della presente Nota. Esso consiste nel

« Determinare e classificare tutti i possibili tipi di sistemi isostatici, relativi ai corpi elastici isotropi in equilibrio, e dederminare di più i corrispondenti tipi di pressioni principali, e delle componenti della deformazione che loro fanno equilibrio nel caso, però che non agiscano forze interne (o di massa) ».

La risoluzione della seconda parte del problema si ricava facilmente da quella della prima. — Concepito dal punto di vista strettamente meccanico questo problema si potrebbe anche enunciare così:

« Integrare le equazioni d'equilibrio d'un corpo elastico isotropo in tutti quei casi nei quali esistono sistemi tripli ortogonali soggetti a pressioni puramente normali ».

Le componenti della deformazione si possono riguardare come un sistema doppio covariante associato al quadrato dell'elemento lineare dello spazio (3). A questo proposito è particolarmente notevole il fatto, che immediatamente risulta dalle formole, che il sistema di linee nelle cui direzioni agiscono le pressioni principali è altresì il sistema di linee delle deformazioni principali, nel senso che assunte tali linee come coordinate di riferimento,

(1) Weingarten, *Zur Theorie der isostatischen Flächen.* (Vol. XC del Giorn. di Crelle, pag. 18-33).

(2) Per spiegazioni intorno a concetti, come questo, appartenenti al calcolo differenziale assoluto v. fra varie altre pubblicazioni particolarmente Ricci e Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.* Vol. LIV dei Mathem. Annalen.

(3) Lamé, op. cit. pag. 274.

rimangono soltanto le tre componenti delle deformazioni che agiscono secondo esse, mentre le altre tre s'annullano.

I calcoli che mi guidarono alla risoluzione del problema propostomi, risoluzione fondata sull'integrazione di due sistemi d'equazioni a derivate parziali, sono piuttosto lunghi e laboriosi: e pertanto mi limito in questa Nota ad enunciare i risultati a cui pervenni, riserbandomi di pubblicare poi dettagliatamente, in un altro lavoro, i procedimenti ed i calcoli. Qui però stimo opportuno accennare come nella trattazione del problema in discorso mi valsi del « Calcolo differenziale assoluto » del prof. Ricci, calcolo che fu già da autorevoli matematici riconosciuto essere validissimo strumento in ricerche del genere di quelle contenute nella presente Nota. Per parte mia mi permetto d'esprimere l'opinione ch'io debba in massima parte all'uso di detto calcolo l'essere giunto al fine prefissomi.

Ciò premesso passerò nel successivo paragrafo all'esposizione dei risultati a cui pervenni.

§ II.

1°. Nella classificazione dei possibili tipi di sistemi isostatici e dei corrispondenti casi d'equilibrio elastico, classificazione che forma oggetto del presente §, dirò sempre x, y, z i parametri delle tre famiglie di superfici costituenti il sistema, parametri che naturalmente saranno anche le coordinate curvilinee che si assumeranno. Le tre pressioni principali agiscono rispettivamente nelle direzioni delle linee x, y, z cioè normalmente alle singole famiglie di superfici del sistema isostatico.

Dirò brevemente p_1 la pressione principale agente secondo la direzione delle linee x, p_2 quella agente secondo la direzione y, p_3 quella agente secondo la direzione z. Quelle tre componenti della deformazione che non s'annullano, facenti equilibrio alle pressioni principali p_1, p_2, p_3, ogni volta considerate, si designeranno rispettivamente con ξ_1, ξ_2, ξ_3.

2°. Ed ora veniamo all'accennata classificazione dei vari casi che si presentano nel problema studiato.

I. Le tre pressioni principali sono tutte eguali fra di loro. *Allora esse devono essere altresì costanti: le componenti della deformazione devono essere altrettante funzioni lineari (arbitrarie però) delle coordinate. Il sistema isostatico corrispondente può allora essere qualunque, vale a dire non è soggetto ad alcuna restrizione* (1).

(1) Reputo opportuno accennare come avendo studiata la questione qui trattata anche per gli spazi a curvatura costante, trovai che in questi spazi non esistono sistemi isostatici di tipo analogo, poichè quando il sistema isostatico non sia soggetto ad alcuna restrizione geometrica, le componenti della deformazione devono annullarsi.

Come è evidente però è questo un caso affatto *triviale* d'equilibrio elastico, quale si presenta ad es. per una massa fluida.

II. Delle tre pressioni principali due siano uguali. Sia ad esempio:

$$p_2 = p_3$$

Allora si possono presentare questi sottocasi:

a). *La famiglia di superficie $x =$ cost. si riduce ad un « fascio » di piani; tutto essendo simmetrico rispetto all'asse del fascio. In questo caso pertanto il problema è ricondotto ad un problema a due dimensioni.*

b). *Si ottengono tipi che non sono se non tipi speciali di sottocasi compresi nel caso III del quale ora passiamo ad occuparci.*

III. Le tre pressioni principali sono fra loro distinte. *I sottocasi che allora si possono avere sono i seguenti:*

a). *Una delle tre famiglie di superficie si riduce ad un sistema di piani paralleli. Quella delle pressioni principali che agisce normalmente a tali piani, e la differenza fra le altre due pressioni principali sono indipendenti dalla variabile fornita dal parametro di questa famiglia di piani. Il problema dell'equilibrio elastico è allora ricondotto ad un problema a due dimensioni negli accennati piani.*

Di questo problema, come di quello che si presenta nel sottocaso II *a*) mi propongo d'occuparmi in altra occasione, poichè è evidente che un'ulteriore loro trattazione esorbiterebbe dall'obbiettivo propostomi in questa Nota.

b). *Il sistema isostatico di superficie si riduce ad un sistema di piani ortogonali: cioè il sistema di linee x, y, z ad un sistema di tre assi Cartesiani ortogonali.*

Le pressioni principali hanno la forma:

$$p_1 = \varphi(y) + \psi(z) + \vartheta_2(y, z) + \mathrm{Y}_2\, \mathrm{Z}_2 + \bar{\mathrm{Y}}_2 + \bar{\mathrm{Z}}_2$$
$$p_2 = f(x) + \psi(z) + \eta_2(x, z) + \mathrm{X}_2\, \mathrm{Z}_2 + \bar{\mathrm{X}}_2 + \bar{\bar{\mathrm{Z}}}_2$$
$$p_3 = f(x) + \varphi(y) + z_2(x, y) + \mathrm{X}_2\, \mathrm{Y}_2 + \bar{\bar{\mathrm{X}}}_2 + \bar{\bar{\mathrm{Y}}}_2$$

Le componenti della deformazione hanno allora la forma:

$$\xi_1 = \mathrm{F}(x) + \mathrm{H}_2(x, z) + \mathrm{Z}_2(x, y) + \mathrm{Y}_2 + \mathrm{Z}_2$$
$$\xi_2 = \Phi(y) + \bar{\mathrm{Z}}_2(x, y) + \Theta_2(y, z) + \mathrm{X}_2 + \mathrm{Z}_4$$
$$\xi_3 = \Psi(z) + \bar{\mathrm{H}}_2(x, y) + \bar{\Theta}_2(y, z) + \mathrm{X}_4 + \mathrm{Y}_4$$

dove designino:

$\mathrm{F}(x)$ *e* $f(x)$, $\Phi(y)$ *e* $\varphi(y)$, $\Psi(z)$ *e* $\psi(z)$ *altrettante coppie di funzioni rispettivamente della sola x, della sola y, della sola z, tali che, detta* K, *una costante dipendente dalle costanti d'isotropia del corpo, la cui deter-*

minazione si vedrà nell'accennato più ampio lavoro sia:

$$\frac{d^2(K_0\,F(x)-f(x))}{dx^2}\,,\qquad \frac{d^2(K_0\,\Phi(y)-\varphi(y))}{dy^2}\,,\qquad \frac{d^2(K_0\,\Psi(z)-\psi(z))}{dz^2}$$

altrettante costanti. Di più devono designare:

$$\vartheta_2(y,z)\,,\qquad \eta_2(x,z)\,,\qquad z_2(x,y)$$

altrettante funzioni quadratiche rispettivamente delle sole y, z, delle sole x, z, delle sole x, y e così pure $H_2\,(x\,,z)$, *e* $\overline{H}_2\,(x\,,z)$, $Z_2\,(x\,,y)$ *e* $\overline{Z}_2\,(x\,,y)$, $\Theta_2\,(y\,,z)$ *e* $\overline{\Theta}_2\,(y\,,z)$ *devono designare coppie di funzioni quadratiche delle sole x, z delle sole $(x\,,y)$ e delle sole y, z.*

Finalmente devono designare: X_4, Y_4, Z_4 *tre funzioni di quarto grado rispettivamente della sola x, della sola y, della sola z,* X_2, $\overline{X}_2$, $\overline{\overline{X}}_2$ *funzioni di secondo grado della sola x,* Y_2, $\overline{Y}_2$, $\overline{\overline{Y}}_2$ *funzioni di secondo grado della sola y,* Z_2, $\overline{Z}_2$, $\overline{\overline{Z}}_2$ *funzioni di secondo grado della sola z, mentre devono essere le differenze:*

$$\frac{d^2X_4}{dx_2}-X_2\,,\qquad \frac{d^2Y_4}{dy_2}-Y_2\,,\qquad \frac{d^2Z_4}{dz_2}-Z_2$$

altrettante costanti. Evidentemente il caso II C *può riguardarsi come una specializzazione di questo.* Con ciò è esaurito l'elenco di tutti i casi che nel problema studiato si possono presentare. Nello svolgimento dei calcoli, come si vedrà nel lavoro più ampio a cui accennai, si presentano sottocasi in cui le pressioni principali e così pure le componenti delle deformazioni hanno forme più speciali che si presentano come casi particolari di quelle testè indicate. Poichè mi limitai ad indicare i tipi *più generali* che possono avere tali funzioni nei singoli casi.

Sono pure degni d'interesse, specie per le applicazioni che se ne possono fare, i risultati che si ottengono introducendo, in taluno dei casi esaminati, qualche condizione restrittiva. Così, ad esempio, se nel caso in cui il sistema isostatico si riduce ad un sistema di tre piani ortogonali, si suppongono nulle due delle pressioni principali, evidentemente s'ottiene un caso interessante d'equilibrio d'un solido omogeneo elastico di forma prismatica soggetto ad una pressione agente su una delle sue tre coppie di facce opposte.

3°. Nel chiudere la presente Nota sembrami opportuno porre in rilievo un fatto emergente dagli esposti risultati. Esso è che l'asserzione del Lamé (V. I) che per un corpo in equilibrio elastico ogni sistema triplo di superficie ortogonali può rendersi isostatico applicando alle superficie contornanti il corpo sforzi normali è bensì vera astrattamente, ma in realtà per sistemi tripli di superficie ortogonali affatto generali, non rientranti quindi nei tipi speciali enumerati or ora, il fatto di divenire isostatici si verifica solo quando gli sforzi normali che si applicano siano fra loro uguali e costanti.