ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

o presso di esse, come si vede chiaramente nel diagramma, ove si sono distinte con una R le date in cui fu osservata l'una o l'altra delle due suddette tinte; si sono poi indicati con A e G i giorni in cui fu notato il colore aranciato o giallo; le crocette × indicano le nostre misure fotometriche.

Inoltre è da notare che il sig. E. von Gothard ha osservato delle periodiche variazioni anche nello spettro della *Nova*, il quale gli risultò continuo al 31 marzo, 8, 18, 27 aprile, ed a righe lucide al 6, 11, 21, 22, 25, 29 aprile. È facile vedere nel diagramma che lo spettro continuo fu osservato in giorni di massimo o presso di essi, e che lo spettro dei gas fu osservato nei minimi di luce della *Nova*, o presso di essi; il che era da aspettarsi: perchè la luce complessiva di poche righe o radiazioni luminose facilmente è superata da quella complessiva di uno spettro continuo.

Questa periodicità del colore e dello spettro della *Nova Persei* è poi quella che si osserva ordinariamente nelle stelle *variabili*.

Tale periodicità così spiccata che si manifesta in varî modi e che pare, dalle osservazioni fatte finora, si faccia sempre più distinta, regolare ed uniforme, è molto singolare e notevole in una stella che presenta lo spettro tipico delle stelle *temporarie*, ed indurrebbe a pensare che la *Nova Persei* tenda a divenire e restare come stella *variabile*; mentre invece nella *Nova Aurigae* comparsa nel 1892, lo spettro che da principio era eguale all'attuale della *Nova Persei*, divenne poi continuo, colle righe lucide delle nebulose, e quella *Nova* rimase comme piccola *stella nebulosa*.

Resterà da vedere se la *Nova* attuale avrà la stessa sorte, o se piuttosto rimarrà come *variabile* a somiglianza di quel che accadde alla *Nova* comparsa nel 1885 presso χ' *Orionis*. Devesi però notare che questa stella aveva lo spettro *a colonnato*, caratteristico delle *variabili*.

Le osservazioni ulteriori, che si faranno quando il sole si sarà allontanato di nuovo dall'astro novello, risolveranno questo dubbio in modo definitivo.

Meccanica. — *Sui moti stazionarî di un corpo rigido nel caso della Kovalevsky*. Nota II [1] di T. Levi-Civita, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

7. *Soluzioni, per cui Δ non si annulla identicamente* [2]. *Rappresentazione geometrica del movimento. Condizioni di stabilità.*

Per $\Delta \gtreqless 0$, le (12) equivalgono a

$$(12_a) \qquad p = -\nu s\,, \quad q = 0\,.$$

[1] V. pag. 338.

[2] Queste ∞^4 soluzioni sono già state segnalate dal sig. Stekloff. Egli ha in pari tempo osservato che esse convengono anche a solidi, con una distribuzione di massa alquanto più generale di quella supposta dalla Kovalevsky. Cfr. l'Jahrbuch über die Fort-

Essendo inoltre

(11) $$\nu r = s\gamma_3,$$

si ottiene dalle (K) il sistema ridotto

$$(\mathrm{K}_a) \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{s}{\nu}\gamma_2\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = -\frac{s}{\nu}\gamma_1\gamma_3 - \nu s\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \nu s\gamma_2,$$

il quale ammette, oltre al solito $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, un secondo integrale

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\nu^2\gamma_1 = \mathrm{cost}$$

ed è quindi integrabile per funzioni ellittiche.

Si può osservare che quest' ultimo integrale non è altro che quello della Kovalevsky, ridotto a mezzo delle (12_a), cioè

$$(2_a) \qquad (\gamma_1 + \nu^2)^2 + \gamma_2^2 = \mu^4.$$

La equazione $q = 0$ mostra che il cono di polodia si riduce al piano meridiano baricentrico.

La verticale di $\boldsymbol{\Omega}$ descrive, rispetto al corpo, un cono di quart' ordine V, che si ottiene proiettando da $\boldsymbol{\Omega}$ la intersezione del cilindro circolare retto

$$(x + \nu^2)^2 + y^2 = \mu^4$$

colla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Per riconoscerlo, basta notare che γ_1, γ_2 sono le coordinate x, y di quel punto della verticale, che si trova alla distanza 1 da $\boldsymbol{\Omega}$, e aver riguardo alla (2_a).

Ciascuna falda di V (per es. quella corrispondente alla direzione positiva della verticale) consta di due nappe distinte oppure di una nappa unica, secondochè il cerchio $\boldsymbol{\Gamma}$, di centro M$(-\nu^2, 0)$, e raggio μ^2,

$$(x + \nu^2)^2 + y^2 = \mu^4$$

---

schritte der Matematik, 1895, pag. 838. Rimane naturalmente estraneo al punto di vista dell'A. quel che risulta invece dal nostro, e cioè:

1) il comportamento stazionario, che le soluzioni in parola hanno nel caso della Kovalevsky, *e non in generale negli altri.* (Faranno probabilmente eccezione i casi del sig. R. Liouville, in cui le equazioni del movimento ammettono, oltre l'integrale delle aree e quello delle forze vive, un ulteriore integrale algebrico. Quanto agli altri casi, manca un corrispondente integrale uniforme ed esistono quindi soltanto le ∞^2 soluzioni stazionarie, che provengono dall'integrale delle aree);

2) le condizioni di stabilità.

rimane o no tutto interno [1] al cerchio C di centro Ω e raggio 1, secondochè cioè $\mu^2 + \nu^2 < 1$, ovvero $\mu^2 + \nu^2 > 1$ (figg. 1 e 2). Nel caso intermedio $\mu^2 + \nu^2 = 1$ (Γ tangente a C) le due nappe si saldano, e il cono ha l'asse baricentrico per generatrice doppia.

La successione delle posizioni occupate dal corpo (se non la legge, con cui esse vengono percorse al variare del tempo) rimane individuata in modo

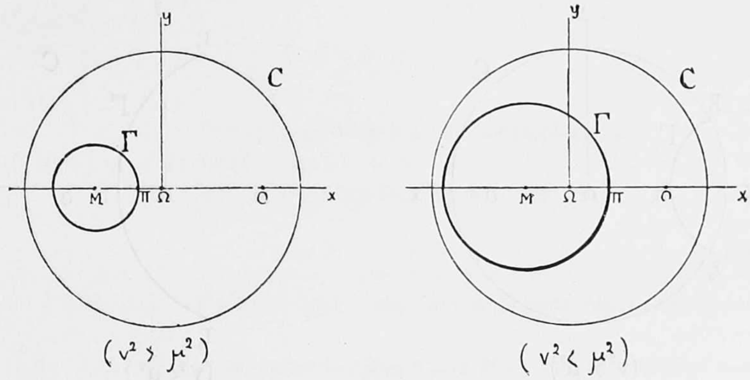

Fig. 1. ($\mu^2 + \nu^2 < 1$)

assai semplice. Basta portare l'una dopo l'altra le generatrici di V in posizione verticale mediante rotazioni elementari attorno a rette del piano meridiano baricentrico (cono di polodia). A partire da una data posizione di V, la rotazione elementare deve dunque avvenire intorno alla intersezione del detto piano meridiano col piano normale a V, condotto per la generatrice verticale.

Lo studio completo dei caratteri del movimento, e in particolare la determinazione dei nove coseni direttori in funzione ellittica del tempo ci porterebbe troppo in lungo. Mi limiterò ad una indicazione, circa il modo di variare di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, che si desume immediatamente dalle (K_a).

Sia P_t il punto della circonferenza Γ, che, in un generico istante t, rappresenta (colle sue coordinate x, y) i valori di γ_1, γ_2. Il quadrato della velocità, con cui P_t descrive la curva Γ è dato da

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 = \frac{s^2}{\nu^2} \{ \gamma_2^2 + (\gamma_1 + \nu^2)^2 \} \gamma_3^2,$$

[1] Dobbiamo evidentemente escludere che il cerchio Γ rimanga tutto al difuori di C, poichè la (2_a) non sarebbe in tal caso soddisfatta da alcun sistema di valori di γ_1, γ_2 inferiori all'unità.

ossia, in causa della (2_a), da $\frac{s^2\mu^4}{\nu^2}\gamma_3^2$. Esso non si annulla, se non con γ_3, cioè nei punti, in cui Γ incontra C.

Quando Γ è tutta interna a C (fig. 1), il moto non può cambiare di senso; P_t descrive dunque periodicamente l' intera circonferenza.

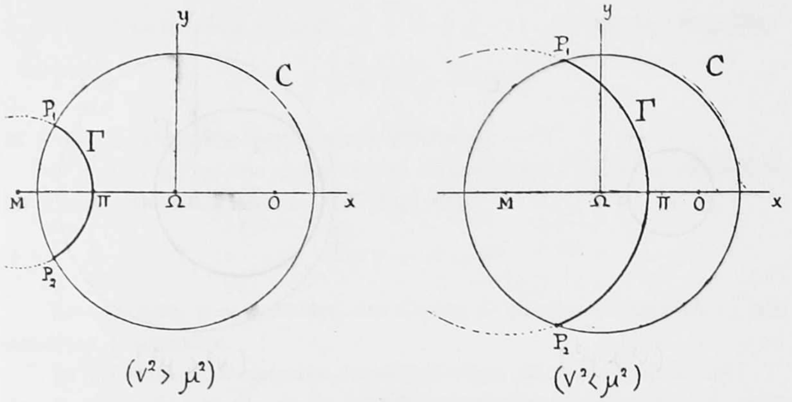

Fig. 2. $(\mu^2+\nu^2>1)$

Se invece Γ non resta tutta entro C, allora le intersezioni P_1 e P_2 (fig. 2) sono effettivamente punti di regresso per il movimento di P_t, il quale risulta per conseguenza oscillatorio e periodico.

Di quà segue tra altro che P_t raggiunge in qualsiasi eventualità la posizione Π (punto di Γ più vicino ad Ω); si ha cioè, per qualche valore di t, $\gamma_1 = \mu^2 - \nu^2$, $\gamma_2 = 0$, quindi, a tenore delle (2′), (2″) e (12_a), $\varepsilon = 0$.

Occupiamoci ora delle condizioni di stabilità.

In primo luogo, ponendo

$$a_{11} = \frac{d^2\mathbf{H}}{dp^2}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{d^2\mathbf{H}}{dp\,dq}, \quad a_{22} = \frac{d^2\mathbf{H}}{dq^2};$$

$$\mathrm{Q} = \sum_{rs}^{2}{}_{1}\, a_{rs}\, u_r\, u_s$$

(dove le u designano due indeterminate generiche), si ha in Q una forma ridotta di $d^2\mathbf{H}$, per valori delle variabili, che verificano le equazioni

$$\frac{d\mathbf{H}}{dp}=0\,,\quad \frac{d\mathbf{H}}{dr}=0\ \text{(1)}.$$

Il calcolo delle a si può fare speditamente mettendo in evidenza nelle espressioni (9) di $\frac{d\mathbf{H}}{dp}$, $\frac{d\mathbf{H}}{dq}$ i fattori $rp+s^2\gamma_3$, q (che, per le (11) e (12_a) hanno valore nullo).

Con questo criterio le (9) si scrivono

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{H}}{dp}&=\frac{2}{s^2\gamma_3^2}\{(2\gamma_3 p-\gamma_1 r)(rp+s^2\gamma_3)+(2\gamma_3 q-\gamma_2 r)\,q\}\,,\\ \frac{d\mathbf{H}}{dq}&=\frac{2r}{s^2\gamma_3^2}\{\qquad -\gamma_2\quad(rp+s^2\gamma_3)+\qquad\quad \gamma_1 r\ \ q\}\,.\end{aligned}$$

Dobbiamo derivare queste formule, rapporto a p e a q, attribuendo alle lettere (a derivazione eseguita) i valori, che loro competono sopra le nostre soluzioni stazionarie.

Ne viene che i coefficienti di $rp+s^2\gamma_3$ e di q si possono trattare come costanti aventi addirittura i valori corrispondenti alle (11) e (12_a); anzi, siccome (conformemente alla regola generale più volte ricordata) i caratteri

(1) Quando infatti sussiste una equazione, come la (10), del tipo

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\varepsilon}=c_1\frac{d\mathbf{H}}{dp}+c_2\frac{d\mathbf{H}}{dq}$$

(dove le c designano funzioni regolari per i valori considerati), derivando rapporto a p e a q e tenendo conto delle $\frac{d\mathbf{H}}{dp}=0$, $\frac{d\mathbf{H}}{dq}=0$, si deduce

$$\frac{d^2\mathbf{H}}{d\varepsilon\, dp}=a_{11}c_1+a_{12}c_2\,,\quad \frac{d^2\mathbf{H}}{d\varepsilon\, dq}=a_{21}c_1+a_{22}c_2\,;$$

derivando invece rapporto ad ε,

$$\frac{d^2\mathbf{H}}{d\varepsilon^2}=c_1\frac{d^2\mathbf{H}}{d\varepsilon\, dp}+c_2\frac{d^2\mathbf{H}}{d\varepsilon\, dq}=a_{11}\,c_1^2+2a_{12}\,c_1\,c_2+a_{22}\,c_2^2.$$

La $d^2\mathbf{H}$ può così essere scritta

$$a_{11}(dp+c_1\,d\varepsilon)^2+2a_{12}(dp+c_1\,d\varepsilon)(dq+c_2\,d\varepsilon)+a_{22}(dq+c_2\,d\varepsilon)^2$$

e coincide precisamente, salvo la designazione delle indeterminate, colla forma binaria Q.

algebrici della forma Q sono sempre gli stessi, qualunque sia il valore di ε (1), sarà opportuno, per maggiore semplicità, di riferirsi al valore $\varepsilon = 0$, che compete al punto $\boldsymbol{\Pi}$ e per cui quindi si deve porre

$$\gamma_1 = \mu^2 - \nu^2\,, \quad \gamma_2 = 0\,.$$

Con ciò le superiori espressioni di $\frac{d\mathbf{H}}{dp}$, $\frac{d\mathbf{H}}{dq}$ divengono

$$\frac{d\mathbf{H}}{dp} = -\frac{2}{\nu s \gamma_3}(\mu^2 + \nu^2)(rp + s^2\gamma_3)\,,$$
$$\frac{d\mathbf{H}}{dq} = \frac{2}{\nu^2}(\mu^2 - \nu^2)\,q\,.$$

Dalle (7) e (8), introducendovi i valori attuali, abbiamo

$$\frac{\partial\gamma_3}{\partial p} = -\frac{2\nu}{s\gamma_3}(\mu^2 - \nu^2)\,, \quad \frac{\partial\gamma_3}{\partial q} = 0\,,$$
$$\frac{dr}{dp} = \frac{4}{\gamma_3}\nu^2\,, \quad \frac{dr}{dq} = 0\,.$$

quindi

$$a_{11} = \frac{d^2\mathbf{H}}{dp^2} = -\frac{2}{\nu^2\gamma_3^2}(\mu^2 + \nu^2)(1 - \mu^4 - 3\nu^4)\,,$$
$$a_{12} = \frac{d^2\mathbf{H}}{dp\,dq} = 0\,,$$
$$a_{22} = \frac{d^2\mathbf{H}}{dq^2} = \frac{2}{\nu^2}(\mu^2 - \nu^2)\,.$$

Ne concludiamo (limitandoci al caso generale, in cui il discriminante della forma Q non si annulla) (2) che la condizione di stabilità è espressa dalla disuguaglianza

$$(\nu^2 - \mu^2)(1 - \mu^4 - 3\nu^4) > 0. \tag{13}$$

Se $1 - \mu^4 - 3\nu^4 > 0$, la (13) si riduce a $\nu^2 > \mu^2$. Vi ha dunque stabilità allorchè $\boldsymbol{\Omega}$ resta fuori di $\boldsymbol{\Gamma}$.

L'opposto avviene per $1 - \mu^4 - 3\,\nu^4 < 0$. La condizione di stabilità è allora che $\boldsymbol{\Omega}$ cada entro $\boldsymbol{\Gamma}$.

(1) Bisogna soltanto accertare che si tratta di un valore del parametro effettivamente assunto lungo la particolare soluzione, che si considera. Non si può infatti escludere a priori che l'insieme di tutti i valori del parametro rimanga distinto in più intervalli discreti, corrispondenti a soluzioni diverse, e quindi eventualmente a diversi caratteri della forma Q. Nel caso attuale si tratta proprio di un valore del parametro effettivamente raggiunto, per quanto abbiamo osservato più innanzi.

(2) Il discriminante di Q si annulla per $\nu^2 - \mu^2 = 0$, ovvero $1 - \mu^4 - 3\nu^4 = 0$. Per decidere se le corrispondenti soluzioni sono o no stabili, bisognerebbe prendere in esame i differenziali di $\mathbf{H}$ d'ordine superiore al secondo, ciò che qui omettiamo per brevità. Si noti che si tratta necessariamente in tali casi di soluzioni multiple (delle equazioni invarianti caratteristiche). Potremmo anche dire, con ovvia estensione di un appellativo introdotto dal sig. Poincaré (Acta Mathematica, T. VII, 1885), *soluzioni di biforcazione*. La condizione (13) è appunto conforme al *principio dello scambio delle stabilità*.