ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

Matematica. — *Sulle serie doppie di Taylor*. Nota di Onorato Niccoletti, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

È dovuto al Pringsheim un criterio che dà le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione $f(x)$ di una variabile reale x sia sviluppabile in serie di Taylor, relativa ad un valore a, in un intervallo $(a, a+\mathrm{R})$. È perciò necessario e sufficiente che la $f(x)$ abbia nell'intervallo le derivate di tutti gli ordini (nel punto a solo le derivate a destra o a sinistra, secondochè R è positivo o negativo) e che inoltre il resto di Cauchy

$$\mathrm{R}_n(a, h) = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h) \,.\, h^n$$

tenda *uniformemente* allo zero, quando n tende all'infinito, per tutti i valori di h e θ che soddisfanno (per $\mathrm{R} > 0$) alle disuguaglianze: $0 \leq h < \mathrm{R}$; $0 \leq \theta \leq 1$ (¹).

Nulla di simile si ha per le funzioni di più variabili reali. La ragione ne va forse cercata nel modo col quale si ottiene per esse funzioni lo sviluppo di Taylor. Limitandoci, per semplicità, alle funzioni di due variabili reali x ed y, il processo che ordinariamente si tiene per trovare per esse la formula di Taylor, corrisponde infatti a cercare la somma della serie *semplice*, che si deduce dalla serie *doppia* di Taylor, relativa alla funzione data:

$$\text{(E)} \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu,\nu} \frac{1}{\mu!\,\nu!}\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^{\mu}\,\partial y^{\nu}}\right)_{x_0 y_0} (x-x_0)^{\mu}\,(y-y_0)^{\nu},$$

riunendo insieme i termini che appartengono ad una stessa *diagonale* (²) della (E) (per i quali cioè $\mu+\nu$ ha un valore costante). Una qualsiasi delle ordinarie espressioni del *resto* esprime infatti la differenza tra la funzione $f(xy)$ e la somma dei primi n termini della serie semplice così definita. Non è nota invece, almeno a mio credere, alcuna formula che esprima la differenza tra il valore della funzione $f(xy)$ e la somma S_{mn} dei primi $(m+1)(n+1)$ termini della (E), pei quali cioè è $0 \leq \mu \leq m$, $0 \leq \nu \leq n$.

Una tal formula io mi propongo di dare in questa Nota: essa conduce in modo semplice ad estendere, nel senso ora detto, alle funzioni di due variabili reali le forme del resto di Schlömilch e Roche, di Lagrange e di Cauchy;

(¹) A. Pringsheim, *Zum Taylor'schen Lehrsatz*. Math. Ann., Bd. XLIV; s. 73.
(²) A. Pringsheim, *El. Theorie der un. Doppelreihen*. Münch. Berichte, 1897 S. 121. Loudon — *Ueber Doppelfolgen und Doppelreihen* (Math. Ann. Bd. LIII).

estendendo inoltre a queste funzioni le considerazioni svolte dal Pringsheim per le funzioni di una sola variabile, essa porta ad un criterio *necessario e sufficiente* per la sviluppabilità di una funzione $f(x\,y)$ in serie doppia (reale) di Taylor, *quando si ponga insieme la condizione dell' assoluta convergenza della serie stessa nel campo che si considera.* Questa ulteriore condizione, imposta invero dal metodo di dimostrazione, è però anche necessario sia soddisfatta quando si voglia che la serie doppia converga incondizionatamente nel suo campo di convergenza e rappresenti quindi la funzione data, in qualunque modo i suoi termini vengano ordinati od associati, in particolare quindi anche quando, sommandola per diagonali, si tenga l' ordinario procedimento che serve ad ottenere la formula di Taylor.

È quasi inutile aggiungere come formule e risultati affatto analoghi valgano per funzioni di un numero qualunque di variabili reali.

1. Siano u e v due funzioni delle due variabili reali x ed y, finite e continue per $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$ insieme con quelle loro derivate, che dovremo considerare. Indicando col simbolo $\{f\}_{ab}$ il valore di una funzione $f(x\,y)$ nel punto (a, b), un semplice processo d' induzione dimostra senza difficoltà la formula [1]:

$$
\text{(A)}\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} u\,\frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^m\,\partial y^n}\,dx\,dy - \int_{x_0}^{x_1}\left\{\sum_1^n{}_\nu (-1)^\nu \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial y^{\nu-1}}\,\frac{\partial^{m+n-\nu} v}{\partial x^m\,\partial y^{n-\nu}}\right\}_{x y_0} dx \\
&-\int_{y_0}^{y_1}\left\{\sum_1^m{}_\mu (-1)^\mu \frac{\partial^{\mu-1} u}{\partial x^{\mu-1}}\,\frac{\partial^{m+n-\mu} v}{\partial x^{m-\mu}\,\partial y^n}\right\}_{x_0 y} dy + \\
&\qquad\qquad + \sum_1^m{}_\mu \sum_1^n{}_\nu (-1)^{\mu+\nu}\left\{\frac{\partial^{\mu+\nu-2} u}{\partial x^{\mu-1}\,\partial y^{\nu-1}}\,\frac{\partial^{m+n-\mu-\nu} v}{\partial x^{m-\nu}\,\partial y^{n-\nu}}\right\}_{x_0 y_0} = \\
&= (-1)^{m+n}\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} v\,\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m\,\partial y^n}\,dx\,dy + \right. \\
&\qquad\qquad + \int_{x_0}^{x_1}\left\{\sum_1^n{}_\nu (-1)^\nu \frac{\partial^{\nu-1} v}{\partial y^{\nu-1}}\,\frac{\partial^{m+n-\nu} u}{\partial x^m\,\partial y^{n-\nu}}\right\}_{x y_1} dx + \\
&+\int_{y_0}^{y_1}\left\{\sum_1^m{}_\mu (-1)^\mu \frac{\partial^{\mu-1} v}{\partial x^{\mu-1}}\,\frac{\partial^{m+n-\mu} u}{\partial x^{m-\mu}\,\partial y^n}\right\}_{x_1 y} dy + \\
&\qquad\qquad \left. + \sum_1^m{}_\mu \sum_1^n{}_\nu (-1)^{\mu+\nu}\left\{\frac{\partial^{\mu+\nu-2} v}{\partial x^{\mu-1}\,\partial y^{\nu-1}}\,\frac{\partial^{m+n-\mu-\nu}}{\partial x^{m-\mu}\,\partial y^{n-\nu}}\right\}_{x_1 y_1}\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Poniamo nella (A):

$$
u = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,;\quad v = (-1)^{m+n}\,\frac{(x_1 - x)^m\,(y_1 - y)^n}{m!\,n!}\,;
$$

[1] Cfr. Bianchi, *Sull' estensione del metodo di Riemann* ecc. R. Lincei, 3 marzo 1895; Niccoletti, *Sull' estensione* ecc. Mem. della R. Acc. di Napoli, vol. VIII, s. 2ª, 1896.

eseguendo le integrazioni e ricordando la formula di Taylor per le funzioni di una sola variabile [1], otteniamo la formula cercata:

$$\text{(B)} \qquad f(x_1\, y_1) = \sum_0^m {}_\mu \sum_0^n {}_\nu \frac{1}{\mu\,!\,\nu\,!}\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu\, \partial y^\nu}\right)_{x_0 y_0} (x_1 - x_0)^\mu\, (y_1 - y_0)^\nu + \mathrm{R}_{mn}\,,$$

dove si è posto:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{R}_{mn} = \mathrm{X}_m + \mathrm{Y}_n - \mathrm{Z}_{mn} =$$

$$= \frac{1}{m\,!}\int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m \left(\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}\right)_{x y_1} dx + \frac{1}{n\,!}\int_{y_0}^{y_1} (y_1 - y)^n \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}\right)_{x_1 y} dy -$$

$$- \frac{1}{m\,!\, n\,!}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (x_1 - x)^m\, (y_1 - y)^n\, \frac{\partial^{m+n+2} f}{\partial x^{m+1}\, \partial y^{n+1}}\, dx\, dy\,.$$

2. Il *resto* R_{mn}, dato dalla (1), esprime, come è chiaro dalla (B), la differenza tra il valore della $f(x\,y)$ nel punto $(x_1\, y_1)$ e la somma S_{mn} dei primi $(m+1)\,(n+1)$ termini della corrispondente serie (E) di Taylor. Esso può porsi agevolmente sotto una forma priva di segni integrali che estende al nostro caso la nota formula di Schlömich e Roche. Applicando infatti il teorema del valore medio a ciascuna delle tre parti X_m, Y_n, Z_{mn} di R_{mn}, si ha senza difficoltà alcuna la formula, cui alludevamo:

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{R}_{mn} = \frac{(1-\theta_1)^{m-p+1}}{m\,!\,p}\,(x_1 - x_0)^{m+1} \left\{\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}\right\}_{[x_0+\theta_1(x_1-x_0)\,,\, y_1]} +$$

$$+ \frac{(1-\theta_2)^{n-q+1}}{n\,!\,q}\,(y_1 - y_0)^{n+1} \left\{\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}\right\}_{[x_1\,,\, y_0+\theta_2(y_1-y_0)]} -$$

$$- \frac{(1-\theta_3)^{m-r+1}\,(1-\theta_4)^{n-s+1}}{m\,!\,n\,!\,r\,.\,s}\,(x_1-x_0)^{m+1}(y_1-y_0)^{n+1} \left(\frac{\partial^{m+n+2} f}{\partial x^{m+1}\,\partial y^{n+1}}\right)_{[x_0+\theta_3(x_1-x_0),\, y_0+\theta_4(y_1-y_0)]},$$

con $0 < \theta_i < 1\ (i = 1\,,2\,,3\,,4)\,;\ 0 < p\,, r \leq m+1\,,\ 0 < q\,, s \leq n+1\,.$

Ponendo in questa formula successivamente:

$$p = r = m+1,\quad q = s = n+1\,;\quad p = q = r = s = 1\,;$$

si ottengono due formule, che possono riguardarsi come la generalizzazione di quelle di Lagrange e di Cauchy.

Poniamo infine nella (B) $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = y_0 + k$; essa diverrà:

$$\text{(B*)} \qquad f(x_0 + h\,, y_0 + k) = \sum_0^m {}_\mu \sum_0^n {}_\nu \frac{1}{\mu\,!\,\nu\,!}\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu\, \partial y^\nu}\right)_{x_0 y_0} h^\mu\,.\,k^\nu + \mathrm{R}_{mn}$$

ed il resto R_{mn}, *che scriveremo sotto la forma di Cauchy,* sarà:

$$\text{(3)}\ \mathrm{R}_{mn} = \frac{(1-\theta_1)^m}{m\,!} h^{m+1} \left(\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}\right)_{(x_0+\theta_1 h,\, y_0+k)} + \frac{(1-\theta_2)^n}{n\,!} k^{n+1} \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}\right)_{(x_0+h,\, y_0+\theta_2 k)} -$$

$$- \frac{(1-\theta_3)^m\,(1-\theta_4)^n}{m\,!\,n\,!}\, h^{m+1}\, k^{n+1} \left(\frac{\partial^{m+n+2} f}{\partial x^{m+1}\,\partial y^{n+1}}\right)_{(x_0+\theta_3 h,\, y_0+\theta_4 k)}$$

[1] Cfr. ad es. Genocchi-Peano, *Calcolo infinitesimale*, pag. 332.

con $0 < \theta_i < 1$; e le θ_i dipenderanno naturalmente dagli indici m ed n, dalla funzione f, dai valori di h e di k.

3. Si supponga ora che si abbia:

$$(4) \qquad f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} \frac{1}{\mu!\,\nu!} \left(\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu\, \partial y^\nu}\right)_{x_0 y_0} h^\mu . k^\nu$$

per tutti i valori di h e k che soddisfano alle disuguaglianze $0 \leq h < R_1$, $0 \leq k < R_2$, e per questi valori di h e k la serie del secondo membro sia *assolutamente* convergente, converga cioè la serie dei valori assoluti dei suoi termini. Per gli stessi valori di h e di k è allora lecito derivare termine a termine la serie tante volte quante si vuole e ciascuna delle serie derivate sarà nello stesso campo assolutamente convergente. Poniamo allora col Pringsheim (¹):

$$(15) \qquad \varphi_{rs}(x_0 + h, y_0 + k) =$$

$$= \sum_{r,s}^\infty{}_{m,n} \frac{1}{(m-r)!\,(n-s)!} \left|\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\, \partial y^n}\right|_{x_0 y_0} h^{m-r}\, k^{n-s} \quad (r, s = 0, 1, 2 \ldots);$$

sarà $\varphi_{rs}(x_0 + h, y_0 + k)$ una funzione finita e continua con tutte le sue derivate delle due variabili $x = x_0 + h, y = y_0 + k$ nel campo considerato. Essa ha inoltre evidentemente le proprietà seguenti:

$$(6) \qquad \left\{\frac{\partial^{m-r+n-s} \varphi_{rs}(xy)}{\partial x^{m-r}\, \partial y^{n-s}}\right\}_{x_0 y_0} = \left|\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\, \partial y^n}\right|_{x_0 y_0};$$

$$(7) \qquad \varphi_{r+i, s+l}(x_0 + h, y_0 + k) = \frac{\partial^{i+l} \varphi_{rs}(x_0 + h, x_0 + k)}{\partial x^i\, \partial y^l} \quad (i, l = 0, 1, 2 \ldots);$$

$$(8) \qquad \left|\frac{\partial^{r+s} f(x_0 + h, y_0 + k)}{\partial x^r\, \partial y^s}\right| \leq \varphi_{rs}(x_0 + h, y_0 + k).$$

Poniano $h = h_1 + h_2$, $k = k_1 + k_2$ con h_1, k_2 numeri positivi o nulli; avremo per la (6):

$$\varphi_{rs}(x_0 + h, y_0 + k) = \varphi_{rs}(x_0 + h_1 + h_2, y_0 + k_1 + k_2) =$$
$$= \sum_0^\infty{}_{m,n} \frac{1}{m!\,n!} \left(\frac{\partial^{m+n} \varphi_{rs}}{\partial x^m\, \partial y^n}\right)_{x_0 y_0} (h_1 + h_2)^m\, (k_1 + k_2)^n;$$

e sviluppando in questa serie tutti i binomî $(h_1 + h_2)^m, (k_1 + k_2)^n$ e riunendo i termini che portano le stesse potenze di h_2 e k_2 (come è possibile, poichè la serie stessa avendo tutti i termini positivi è assolutamente convergente), avremo per la (7):

$$(9) \qquad \varphi_{rs}(x_0 + h_1 + h_2, y_0 + k_1 + k_2) = \varphi_{rs}(x_0 + h, y_0 + k) =$$
$$= \sum_0^\infty{}_{m,n} \frac{1}{m!\,n!} \frac{\partial^{m+n} \varphi_{rs}(x_0 + h_1, y_0 + k_1)}{\partial x^m\, \partial y^n} h_2^m\, k_2^n$$

(¹) Cf. A. Pringsheim, *Zum Taylor'schen Lehrsatz*, s. 63.

per tutti i valori di h_1, h_2, k_1, k_2 definiti dalle disuguaglianze:

$$(10) \qquad 0 \leq h_1 \leq h_1 + h_2 = h < R_1; \quad 0 \leq k_1 \leq k_1 + k_2 = k < R_2;$$

e per questi valori di h_1, h_2, k_1, k_2 la serie (9) è ancora assolutamente convergente. Poichè inoltre i suoi termini sono tutti positivi e la sua somma è una funzione finita e continua di h e k, e quindi di h_1, h_2, k_1, k_2 nel campo definito dalle (10), si avrà, per un teorema noto sulle serie a termini variabili ([1]), che in questo campo la serie stessa convergerà anche in egual grado: assegnato quindi un numero reale σ positivo e piccolo a piacere, potranno trovarsi due numeri μ e ν (funzioni in generale degli indici r ed s), tali che quando sia $m \geq \mu$, $n \geq \nu$, in tutto il campo definito dalle (15) il resto R_{mn} della (9) sarà minore di σ; e poichè tutti i termini di R_{mn} sono positivi, si avrà *a fortiori*:

$$\frac{1}{m!\,n!}\left(\frac{\partial^{m+n}\varphi_{rs}}{\partial x^m\,\partial y^n}\right)_{x_0+h_1,y_0+k_1} h_2^m\,k_2^n < \sigma$$

e quindi anche per la (8) e la (7):

$$(11) \qquad \frac{1}{m!\,n!}\left|\frac{\partial^{m+n+r+s}f}{\partial x^{m+r}\,\partial y^{n+s}}\right|_{x_0+h_1,y_0+k_1} h_2^m\,k_2^n < \sigma$$

per tutti i sistemi di valori di m ed n, *che soddisfano una almeno delle due condizioni* $m \geq \mu$, $n \geq \nu$.

Poniamo ora:

$$(10') \qquad \begin{aligned} &h_1 = h\theta_1, \quad h_2 = (1-\theta_1)h; \quad 0 \leq \theta_1 \leq 1, \quad 0 \leq h \leq R_1; \\ &k_1 = k\theta_2, \quad k_2 = (1-\theta_2)k; \quad 0 \leq \theta_2 \leq 1; \quad 0 \leq k \leq R_2; \end{aligned}$$

moltiplicando la (11) per $h^r k^s$, si avrà, per gli stessi valori di m e di n e per *tutti* i valori di h, k, θ_1, θ_2 definiti dalle (10′), la formula:

$$(12) \qquad \frac{(1-\theta_1)^m\,(1-\theta_2)^n}{m!\,n!}\left|\frac{\partial^{m+n+r+s}f}{\partial x^{m+r}\,\partial y^{n+s}}\right|_{x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k} h^{m+r}\,k^{n+s} < \sigma.$$

4. Facciamo nella (12) successivamente:

$$a)\ r=1, n=s=0, \theta_2=1; \quad b)\ s=1, m=r=0, \theta_1=1;$$
$$c)\ r=s=1,\ \theta_1=\theta_3, \theta_2=\theta_4;$$

[1] Dini, *Fondamenti*, p. 110.

indicando con μ, ν due numeri tali che per i valori precedenti di r e s la (12) sia soddisfatta, avremo:

$$(13)\quad \begin{cases} a) \left|\dfrac{(1-\theta_1)^m}{m!}\dfrac{\partial^{m+1}f(x_0+\theta_1 h, y_0+k)}{\partial x^{m+1}}h^{m+1}\right| < \sigma \qquad \text{per } m \geq \mu \\ b) \left|\dfrac{(1-\theta_2)^n}{n!}\dfrac{\partial^{n+1}f(x_0+h, y_0+\theta_2 k)}{\partial y^{n+1}}k^{n+1}\right| < \sigma \qquad \text{per } n \geq \nu \\ c) \left|\dfrac{(1-\theta_3)^m(1-\theta_4)^n}{m!\,n!}\dfrac{\partial^{m+n+2}f(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k)}{\partial x^{m+1}\partial y^{n+1}}h^{m+1}k^{n+1}\right| < \sigma \\ \qquad\qquad \text{per } m \geq \mu \textit{ oppure } n \geq \nu . \end{cases}$$

Ne segue che ciascuna delle tre espressioni:

$$(14)\quad \begin{cases} a) \dfrac{(1-\theta_1)^m}{m!}\dfrac{\partial^{m+1}f(x_0+\theta_1 h, y_0+k)}{\partial x^{m+1}}h^{m+1} \\ b) \dfrac{(1-\theta_2)^n}{n!}\dfrac{\partial^{n+1}f(x_0+h, y_0+\theta_2 k)}{\partial y^{n+1}}k^{n+1} \\ c) \dfrac{(1-\theta_3)^m(1-\theta_4)^n}{m!\,n!}\dfrac{\partial^{m+n+2}f(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k)}{\partial x^{m+1}\partial y^{n+1}}h^{m+1}k^{n+1} \end{cases}$$

tende *uniformemente* allo zero per *tutti* i valori di $h, k, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ che soddisfano alle disuguaglianze: $0 \leq h < R_1$, $0 \leq k < R_2$, $0 \leq \theta_i \leq 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, quando m ed n si facciano tendere all'infinito, o ambedue, o uno solo, in un modo qualunque.

Inversamente, se queste condizioni sono soddisfatte, la serie (E) converge assolutamente per $0 \leq h < R_1$, $0 \leq k < R_2$ e rappresenta la funzione $f(x_0 + h, y_0 + k)$.

Poniamo infatti nelle (13) *a*), *b*), *c*) rispettivamente:

$$a)\ k=0,\ 0<h=h_1<R_1,\ \theta_1=0;\quad b)\ h=0,\ 0<k=k_1<R_2,\ \theta_2=0;$$
$$c)\ 0<h=h_1<R_1,\ 0<k=k_1<R_2,\ \theta_3=\theta_4=0;$$

ne segue facilmente che i termini della serie (E) sono per $h = h_1$, $k = k_1$ tutti inferiori in valore assoluto ad un numero finito: la serie stessa convergerà dunque assolutamente ed uniformemente per tutti i valori positivi o nulli di h e k rispettivamente minori di h_1 e k_1, cioè, poichè h_1 e k_1 sono prossimi ad R_1 ed R_2 tanto quanto si vuole, per tutti i valori di h e k tali che sia:

$$0 \leq h < R_1,\ 0 \leq k < R_2 .$$

La sua somma, per questi stessi valori di h e di k, sarà uguale inoltre alla $f(x_0 + h, y_0 + k)$, poichè per la formula (3) del n. 2, la differenza tra la $f(x_0 + h, y_0 + k)$ e la somma S_{mn} dei primi $(m + 1)$ $(n + 1)$ termini della (E) (cioè il *resto* R_{mn}) si compone di tre parti X_m, Y_n, Z_{mn}, ciascuna delle quali, a causa delle (13), ha per limite lo zero, quando m ed n tendono all'infinito, o insieme, o da soli, in un modo qualunque.

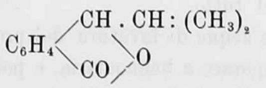
Possiamo dunque enunciare il teorema:

« Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(x\,y)$ di due variabili reali x ed y sia sviluppabile in serie doppia di Taylor, relativa al punto $(x_0\,y_0)$ per tutti i valori di h e k tali che $0 \leq h < R_1$, $0 \leq k < R_2$, in guisa che la serie stessa sia per questi valori assolutamente convergente, è (oltre all'aver la $f(x\,y)$ nel campo considerato le derivate di tutti gli ordini finite e continue) che ciascuna delle tre quantità (14) tenda *uniformemente* allo zero per *tutti* i valori di h e k che soddisfanno alle disuguaglianze superiori e delle θ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ tali che $\theta \leq \theta_i \leq 1$, quando m ed n tendano all' infinito, o insieme o da soli, in un modo qualunque ».

Condizioni affatto analoghe, che è inutile enunciare, si hanno quando una o ambedue le h e k prendano valori negativi o valori negativi e positivi insieme.

Chimica. — *Sull'isopropilftalide* ([1]). Nota di P. Gucci, presentata dal Corrisp. A. Piccini.

In una precedente Nota dal titolo: *Intorno all'azione del joduro isopropilico sull'anidride ftalica in presenza di polvere di zinco* ecc. ([2]), feci menzione di una sostanza oleosa da me ottenuta, la quale, per la sua origine, per il modo con cui l' isolai e per la sua composizione, poteva essere l' isopropilftalide



e anzi feci rilevare che il suo punto di ebollizione e altri caratteri corrispondevano a quelli dell' isopropilftalide di Roser ([3]) da lui preparata colla riduzione dell'acido isobutirrilbenzoico ed espressa coll'indicata formula. Malgrado questo, non volli riguardare in modo assoluto tale sostanza quale isopropilftalide non essendo tutti, come accennai, di pieno accordo sulla verità della formula assegnata da Roser al detto prodotto di riduzione dell'acido isobutirrilbenzoico. La quantità di sostanza di cui poteva disporre era troppo poca, e così per continuarne lo studio ho dovuto aspettare a quando ho potuto riprenderne la costosissima preparazione. Ed ora, tanto per ottenere il prodotto grezzo, quanto

([1]) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Siena.
([2]) Gazz. Chim. ital., t. XXVIII, parte seconda.
([3]) Ber., 17, 2777.