# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME X.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

**Matematica.** — *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi.* Nota del Socio GIULIO WEINGARTEN.

Nella teoria dell' equilibrio dei solidi elastici si è considerato fino ad ora, mi sembra, soltanto il caso di un corpo le cui particelle subiscono degli spostamenti della loro posizione naturale, i quali variano da punto a punto con continuità in tutto lo spazio occupato dal corpo stesso. In tale ipotesi, se non agisce nessuna forza esterna nè sul contorno nè entro lo spazio interno, il corpo non è soggetto a tensioni interne.

Non pertanto esistono certamente corpi soggetti a tensioni interne i quali non sono sottoposti a forze esterne nè al contorno nè all' interno. Per averne un esempio basta immaginare un anello, non del tutto chiuso, di cui si avvicinino le due sezioni libere e piane attaccandole l' una all' altra con uno strato infinitamente sottile che le saldi insieme.

Un corpo teso internamente e che non sia soggetto a sforzi esterni deve necessariamente contenere una o più superficie lungo le quali gli spostamenti sono discontinui. Se le tensioni che si hanno nell' interno sono continue in tutto lo spazio occupato dal corpo, esso avrà il carattere d' un solo ed unico corpo: ma, se le tensioni fossero discontinue ove gli spostamenti sono discontinui, il corpo dovrebbe ritenersi come avente il carattere di un insieme di più corpi distinti. In quest' ultimo caso la discontinuità non dà luogo ad alcun nuovo teorema generale sulle proprietà interne del corpo; al contrario se non sussiste alcun cambiamento brusco delle tensioni interne, le discontinuità degli spostamenti lungo le superficie sopra ricordate sono soggette a leggi semplici e notevoli che io mi propongo di sviluppare in questa Nota.

Abbiasi un solido in istato di tensione che non sia soggetto ad azioni esterne e riferiamoci a tre assi coordinati ortogonali $x$, $y$, $z$. Denotiamo con $u$, $v$, $w$ le componenti, secondo questi assi, dello spostamento di un punto P della sua posizione naturale e consideriamo queste componenti come funzioni delle coordinate del punto stesso.

Le tensioni che si sviluppano nell' interno del corpo sono funzioni lineari delle sei quantità

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

le quali sono i coefficienti delle variazioni arbitrarie $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, nella forma quadratica

$$\delta x\, \delta u + \delta y\, \delta v + \delta z\, \delta w.$$

Poichè supponiamo che le tensioni interne siano funzioni continue in tutto lo spazio occupato dal corpo, così ne viene che questi sei coefficienti godono pure della stessa proprietà.

Sia ora S una superficie interna di discontinuità degli spostamenti. Distinguiamo i due lati di essa mediante gl' indici $a$ e $i$, designando con $u_a$, $v_a$, $w_a$ e con $u_i$, $v_i$, $w_i$ rispettivamente le componenti degli spostamenti dei due punti materiali che concorrono nel punto $x, y, z$ della superficie S. Siano inoltre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i valori delle discontinuità che subiscono i valori delle quantità $u, v, w$ traversando la superficie S dall' uno all' altro lato. Potremo considerare $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ come funzioni delle coordinate $x, y, z$, sebbene queste coordinate siano legate fra loro dall' equazione della superficie. Lungo di essa saranno dunque soddisfatte le tre equazioni seguenti:

$$u_a - u_i = \alpha, \quad v_a - v_i = \beta, \quad w_a - w_i = \gamma$$

e riferendosi al punto infinitamente vicino $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ della superficie S, si avrà

$$du_a - du_i = d\alpha, \quad dv_a - dv_i = d\beta, \quad dw_a - dw_i = d\gamma.$$

Se esaminiamo ora le differenze

$$(dx\, du_a + dy\, dv_a + dz\, dw_a) - (dx\, du_i + dy\, dv_i + dz\, dw_i)$$

si osserverà che nelle due forme quadratiche di cui essa è costituita, i coefficienti di $dx$, $dy$, $dz$ coincidono, in virtù della continuità che abbiamo supposta, onde la differenza stessa si annullerà.

Potremo dunque scrivere per ogni punto della superficie S, l' equazione

$$dx\, d\alpha + dy\, d\beta + dz\, d\gamma = 0$$

da cui segue il teorema:

*Se si considerano le tre discontinuità $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in ogni punto di S come le coordinate rettangolari dei punti di una nuova superficie, questa corrisponderà ad S per ortogonalità di elementi lineari.*

In altri termini, facendo subire ai punti $(x, y, z)$ della superficie di discontinuità, degli spostamenti geometrici aventi per componenti $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, otterremo una superficie infinitamente vicina applicabile sopra S.

Questa nuova forma del teorema precedente vale nell' ipotesi che si trascurino le potenze superiori alla prima di $u, v, w$ e delle loro derivate, ciò che ha sempre luogo nella teoria della elasticità dei solidi.

Le due particelle diverse che coincidono nel punto $(x, y, z)$ della superficie dai due lati di essa, avevano, nello stato naturale del corpo, rispettivamente le coordinate $x_a, y_a, z_a$ e $x_i, y_i, z_i$ le quali verificano le equazioni

$$x_a = x - u_a, \quad y_a = y - v_a, \quad z_a = z - w_a,$$
$$x_i = x - u_i, \quad y_i = y - v_i, \quad z_i = z - w_i,$$

quindi gli elementi lineari $ds_a$ e $ds_i$ delle due superficie che vengono a coincidere fra loro dopo la deformazione del corpo dal suo stato naturale, avranno rispettivamente per quadrati

$$ds_a^2 = ds^2 - 2\,(dx\,du_a + dy\,dv_a + dz\,dw_a),$$
$$ds_i^2 = ds^2 - 2\,(dx\,du_i + dy\,dv_i + dz\,dw_i).$$

Poichè la differenza $ds_a^2 - ds_i^2$ si annulla, così ne viene che queste due superficie sono applicabili l'una sull'altra.

È noto il teorema sulla deformazione delle superficie il quale dice che non possono esistere due superficie applicabili distinte, aventi una linea corrispondente comune, a meno che questa non sia una linea assintotica comune delle due superficie. In virtù di esso sussiste una differenza essenziale fra le superficie di discontinuità dei corpi che occupano uno spazio più volte connesso e quelle dei corpi che riempiono uno spazio semplicemente connesso. Nel primo caso queste superficie possono costituire dei tagli di una forma arbitraria, e interrompendo la connessione materiale lungo queste superficie si può rendere al corpo il suo stato naturale neutro. Le fenditure che così nasceranno saranno costituite da due superficie *separate* applicabili l'una sull'altra. Invece, le superficie di discontinuità dei corpi semplicemente connessi, non potendo costituire dei tagli, giacchè in tal caso spezzerebbero il corpo, debbono dar luogo a delle fenditure formate da due superficie applicabili l'una sull'altra e aventi una linea corrispondente comune, condizione questa che in generale non può verificarsi, se si eccettua il caso particolare che abbiamo ricordato precedentemente.

Ma, anche in questo caso eccezionale, non ci si può figurare abbastanza distintamente come influirebbe dal lato meccanico una linea di saldatura infinitamente sottile, per far coincidere gli elementi superficiali adiacenti allo spigolo formato dalla linea assintotica. Sussisterà o meno una lacuna, per quanto piccola essa sia, lungo questo spigolo?

Qualunque cosa possa dirsi a questo riguardo, le considerazioni che seguono sono indipendenti dai dubbî precedenti.

Se si taglia un corpo più volte connesso con dei tagli che non coincidano colle superficie primitive di discontinuità, e si mette in un nuovo stato neutro, esso verrà ad avere delle fenditure limitate da superficie separate applicabili l'una sull'altra. Se ora, mediante una piccola deformazione elastica del corpo, chiudiamo queste fenditure riattaccando i loro lati l'uno all'altro con un sottile strato di saldatura, il corpo riprenderà in generale un nuovo stato di tensione.

Per la coincidenza di questo stato con quello primitivo distrutto, sono necessarie le seguenti condizioni. Bisogna cioè che, lungo le primitive superficie di discontinuità del corpo, le discontinuità $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ abbiano nel punto $x$, $y$, $z$ di una di esse i valori

$$\alpha = a + qz - ry\,,\quad \beta = b + rx - pz\,,\quad \gamma = c + py - qx$$

ove $a$, $b$, $c$; $p$, $q$, $r$ sono costanti.

Le tre analoghe quantità per le superficie di discontinuità che provengono dalla nuova saldatura possiederanno la stessa forma. Questo enunciato si dimostra facilmente.

## Filosofia. — *Sulle idee filosofiche e religiose di Darwin, sotto l'influenza delle sue dottrine naturali.* Discorso [1] del Socio Luigi Luzzatti.

Sotto gli auspicî e l'incoraggiamento del nostro eminente collega Blaserna, ho chiesto l'ospitalità alla classe delle scienze fisiche, dovendo oggi parlarvi, e ne esporrò in appresso la cagione, delle opinioni filosofiche di Darwin, quali si svolsero per l'influenza delle sue dottrine naturali.

La mente di un sommo scienziato è un *poliedro mirabile*, le cui faccie si corrispondono con ritmici accordi, segnatamente quelle che riflettono le dottrine sulla natura e sulla divinità.

Nè è lecito meravigliarsi se variino insieme per effetto di una evidente colleganza, come si è avverato nella grande anima, della quale vorrei oggi ricercare i più riposti e sacri penetrali.

Al mio discorso accademico: *Scienza e Fede* [2] che ebbe la fortuna di mettere a romore il campo dei credenti intolleranti e quello degli scienziati esclusivi, fu mosso, fra gli altri, l'appunto di aver cresciuto artificialmente, nelle coscienze e nelle istituzioni, il cómpito della religione. Avevo detto che Darwin era un credente e che troppo strane negazioni si erano derivate dalle sue dottrine. Avrei dovuto dire, secondo alcuni critici, che Darwin era un *ateo*, secondo altri un *agnostico*, e mi si soggiunse che nelle ultime edizioni del suo libro, l'*opus magnum*, sull'origine delle specie, aveva tolto la invocazione al Creatore, sonante come la strofa alata di un inno.

[1] Letto nella seduta del 6 gennaio 1901.

[2] Questo discorso venne in luce negli Atti dell'Accademia dei Lincei, Rendiconto della Seduta solenne del 4 giugno 1899, tradotto in francese da Eugène Rostand, fu pubblicato nella *Reforme sociale*, nella *Revue chrétienne ecc. ecc.*