ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

Matematica. — *Sui sistemi lineari di grado zero.* Nota del Corrisp. E. Bertini.

Le considerazioni che seguono sono assai semplici. Tuttavia mi è parso opportuno di pubblicarle perchè conducono a risultati utili non ancora osservati; in particolare forniscono una notevole condizione geometrica dell'annullarsi identico del jacobiano di n forme in n variabili.

1. Grado D di un sistema Σ lineare ∞^r di curve piane è il numero delle intersezioni variabili di due curve generiche del sistema. Il grado di un sistema Σ è finito (≥ 0); perchè, se due curve generiche hanno infiniti punti comuni, cioè una componente comune, variando una delle due curve e tenendo fissa l'altra, si vede che la componente comune, dovendo sempre far parte di quest'ultima, non può variare ed è quindi parte fissa di Σ.

Se la parte variabile di un sistema Σ è irriducibile si ha $D \geq r - 1$, e quindi, se $r > 1$, $D > 0$. Il caso $D = 0$ si presenta, oltre che per un fascio, quando la parte variabile di Σ è riducibile, ossia è, per un teorema notissimo, una involuzione in un fascio e soltanto allora.

2. Suppongasi ora che un sistema Σ sia tale che le curve che passano per un punto contengano anche un punto successivo, cioè ivi si tocchino: dico che Σ *è di grado zero.* Infatti, se Σ fosse di grado $D > 0$, presi in esso una curva generica e un fascio generico, ogni curva di questo fascio toccherebbe, per ipotesi, quella curva in punti variabili (almeno uno); cioè la curva dovrebbe far parte dell'inviluppo del fascio, il che è assurdo, tale inviluppo essendo il sistema dei punti base del fascio. Adunque i *soli sistemi lineari, per i quali avviene che le curve che passano per un punto si tocchino, sono quelli dati dalle involuzioni nei fasci.*

Se una rete di curve ha la jacobiana indeterminata, ogni punto del piano è di contatto per le curve della rete passanti per esso e viceversa. Segue quindi immediatamente che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la jacobiana di una rete sia indeterminata è che la rete sia di grado zero, cioè una involuzione di 2ª specie in un fascio*: proprietà dimostrata dal sig. A. Levi [1] per altra via, che non sembra estendibile allo spazio. Ossia, algebricamente, *tre forme ternarie* (*linearmente indipendenti*), *di cui è identicamente nullo il determinante jacobiano, sono forme binarie di due forme ternarie dello stesso ordine e viceversa* [2].

[1] *Sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie* (Giornale di Matematiche, vol. XXXIV, 1896), n. 2.

[2] È poi notissimo e facile a dimostrare che due forme binarie, di cui il jacobiano è identicamente nullo, non differiscono che per un fattore costante e reciprocamente.

3. Le cose precedenti si possono estendere facilmente. Sia S_n ($n \geq 3$) uno spazio (lineare) ad n dimensioni e in esso abbiasi un sistema Σ, ∞^r, di ipersuperficie, cioè di varietà V_{n-1}. Si definisce grado D di Σ il numero delle intersezioni variabili di n V_{n-1} generiche del sistema e si dimostra che il numero D è finito (≥ 0). Infatti, se due V_{n-1} generiche hanno una componente comune, questa deve essere, per lo stesso ragionamento del n. 1, parte fissa di Σ: se tre V_{n-1} generiche hanno una V_{n-2} comune, tenendo fisse due di esse e variando la terza, la V_{n-2}, per il caso precedente, non può variare e quindi è varietà base di Σ; e, così continuando, si arriva a stabilire che, se n V_{n-1} generiche hanno una linea comune, questa è linea base di Σ.

4. Un sistema Σ di dimensione $r \leq n-1$ è di grado zero perchè le V_{n-1} di esso che passano per un punto passano di conseguenza per una V_{n-r} (almeno): quindi n V_{n-1} generiche di Σ, per il n. 3, non hanno punti comuni.

È pure di grado zero un sistema Σ di V_{n-1} riducibili, tale sistema essendo, per lo stesso teorema applicato nel n. 1, una involuzione in un fascio (oltre ad una eventuale parte fissa).

Ma vi è un altro caso da considerare. Se Σ è un sistema lineare ∞^r ($r > n-1$), irriducibile, di grado $D = 0$, devono $n-1$ V_{n-1} generiche di esso avere una linea comune L non incontrata in punti variabili da una n^{esima} V_{n-1} generica: cosicchè, se questa si fa passare per un punto di L (diverso dai punti fissi che essa ha comuni con L), dovrà contenere una parte di L (non tutta per essere $r > n-1$). Ciò significa che le ∞^{r-1} V_{n-1} per un punto generico dello spazio hanno comune una linea. La totalità ∞^{n-1} di queste linee si dice *una congruenza lineare* e il sistema Σ si dice *composto* con tale congruenza. Viceversa un cosifatto sistema è di grado zero, non potendo n sue V_{n-1} generiche avere un punto comune variabile senza avere pure comune la linea della congruenza per quel punto, il che non può essere (n. 3).

Adunque esistono due tipi di sistemi lineari (senza parte fissa) di dimensione $r > n-1$ e di grado zero:

1) quelli (riducibili) dati dalle involuzioni nei fasci;

2) quelli (irriducibili) composti con congruenze lineari.

5. Suppongasi ora di avere un sistema lineare, di dimensione $r > n-1$, tale che le sue V_{n-1} per un punto passino per un punto successivo. Dico *il sistema essere di grado zero.* Infatti, se fosse $D > 0$, considerando la linea L (variabile) d'intersezione di n V_{n-1} generiche e un fascio generico del sistema, per l'ipotesi, ogni V_{r-1} di questo fascio toccherebbe L almeno in un punto, onde L dovrebbe appartenere all'inviluppo del fascio stesso, il che è assurdo. Dunque *i sistemi Σ, di dimensione $r > n-1$, per i quali avviene che le ipersuperficie per un punto abbiano ivi una tangente comune sono soltanto dei due tipi suddetti* (n. 4).

Se il sistema è ∞^n, la V_{r-1} determinata da n direzioni uscenti dal punto (diverse dalla tangente comune) ha nel punto un punto doppio. Reciprocamente, se ciò avviene, le V_{r-1} per il punto hanno ivi una tangente comune. Dunque l'*essere la jacobiana di un sistema lineare* ∞^n (*di ipersuperficie di* S_n) *indeterminata, è condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema lineare sia una involuzione di specie* n *in un fascio ovvero sia composto con una congruenza lineare.*

Nelle proposizioni di questo numero e del n. 2 si prescinde da parti fisse che possono entrare a far parte di ogni sistema lineare.

6. Dei due tipi considerati (n. 4) il primo è algebricamente caratterizzato dall'essere le forme del sistema forme binarie di due altre forme (in $n+1$ variabili) dello stesso ordine.

Quanto al secondo tipo può farsi l'osservazione seguente. Si rappresentino per semplicità le linee della congruenza Γ, con cui è composto il sistema Σ, biunivocamente nei punti di una varietà (ad $n-1$ dimensioni); la quale poi, come è noto [1], si può sempre riferire biunivocamente ai punti di una ipersuperficie $W^\star_{n-1}$ di uno spazio (lineare) $S^\star_n$. Sopra $W^\star_{n-1}$ le ipersuperficie V_{n-1} di Σ saranno rappresentate da varietà (ad $n-2$ dimensioni) $W^\star_{n-2}$ e il sistema Σ, per un noto teorema [2], da una serie lineare di $W^\star_{n-2}$ sopra $W^\star_{n-1}$. Viceversa ogni tal serie lineare (semplice) dà un sistema Σ composto con Γ. Dicansi $y_0, y_1 \dots y_n$ le coordinate di un punto di $W^\star_{n-1}$ e $x_0, x_1 \dots x_n$ quelle di un punto della linea corrispondente di Γ, onde si avranno le

$$y_0 \equiv u_0(x_i)\,,\; y_1 \equiv u_1(x_i) \dots y_n \equiv u_n(x_i)$$

ove le $u_0, u_1 \dots u_n$ sono forme dello stesso ordine nelle x_i: e la serie lineare imagine di Σ sia data sopra $W^\star_{n-1}$ dal sistema lineare

$$\lambda_0 f_0(y_i) + \lambda_1 f_1(y_i) + \cdots + \lambda_n f_n(y_i) = 0.$$

Allora Σ avrà nel proprio spazio S_n (a meno di una parte fissa) una equazione della forma

$$\lambda_0 f_0(u_i) + \lambda_1 f_1(u_i) + \cdots + \lambda_n f_n(u_i) = 0.$$

Sicchè, osservando inoltre che alla serie lineare di $W^\star_{n-1}$ data dagli iperpiani di $S^\star_n$ corrisponde in S_n un sistema lineare ∞^n composto (semplicemente) colla congruenza Γ e quindi (n. 5) avente la jacobiana identicamente nulla, e notando infine che le considerazioni fatte si possono invertire, si

(1) Cfr. Segre, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Annali di Matematica, serie II, t. 22), n. 4.

(2) Cfr. Segre, l. c., n. 27.

può dire che *il secondo tipo è algebricamente caratterizzato dall'essere le forme del sistema (a meno di un fattore comune) forme* $(n+1)^{\text{arie}}$ *di* $n+1$ *forme (in* $n+1$ *variabili) dello stesso ordine, delle quali forme il jacobiano è identicamente zero.*

7. Una maggiore determinazione del 2° tipo dipende essenzialmente dalla natura della congruenza Γ, cioè della $W^{\star}_{n-1}$.

Se $W^{\star}_{n-1}$ è *razionale*, cioè rappresentabile biunivocamente sopra un S_{n-1}, le stesse considerazioni del numero precedente mostrano che *le forme del 2° tipo sono forme* n^{arie} *(a meno di un fattore comune) di* n *forme dello stesso ordine (in* n *variabili) e viceversa.*

Ciò si verifica appunto per $n=3$. Una congruenza lineare qualsiasi di S_3 è razionale per un teorema di Castelnuovo [1] applicato alla involuzione che la congruenza determina sopra un piano. Adunque, in virtù di quel teorema, l'ultima proprietà è sempre vera per $n=3$. In particolare si ha che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro forme quaternarie (linearmente indipendenti) abbiano il jacobiano identicamente nullo, è che siano (a meno di un fattor comune) forme binarie di due forme o forme ternarie di tre forme dello stesso ordine (nelle quattro variabili)* [2].

8. Si noti infine che la proprietà del n° 5 non richiede la linearità del sistema: basta l'algebricità.

Anzitutto, con considerazioni simili a quelle del n° 3, si dimostra che il grado D di un sistema algebrico Σ, ∞^n, è finito ed inoltre che ogni ente, variabile, comune ad s $(\leq n)$ V_{n-1} di Σ descrive l'intero spazio S_n. Ciò posto, *se le* V_{n-1} *di* Σ *per un punto passano anche per un punto successivo, deve essere* $D=0$. Vale, supposto $D>0$, la stessa dimostrazione del n° 5, quando si prenda, invece di un fascio, una serie ∞^1 qualsiasi di Σ (o Σ stesso, se $r=1$) e si osservi che L, descrivendo tutto S_n, non può appartenere all'inviluppo della serie.

Un sistema algebrico di grado $D=0$ *è composto (oltre ad una parte fissa) con un sistema di varietà* V_{n-i} $(n-1 \geq i \geq 1)$; perchè le V_{n-1} per un punto non possono avere un numero finito (≥ 1) di punti comuni (variabili), altrimenti ciò avverrebbe anche per n V_{n-1} generiche del sistema.

[1] Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (Math. Ann., t. 44).

[2] Nella Memoria del sig. S. Kantor: *Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene* (Acta mathem. t. 19); si enuncia la proposizione (teorema LXXX) che *ogni involuzione in* S_n *è razionale.* Siccome manca ogni dimostrazione, mi limiterò ad avvertire che, se questo teorema è vero, il risultato del presente numero sta in ogni caso.