ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

chinina avesse dovuto riuscire più efficace di quel che sia riuscita in realtà. Il fatto di Massarosa invece di essere in stridente contrasto con la dottrina degli *Anopheles*, fa svanire anche l'or detto mio dubbio e mi persuade sempre più che essa spiega tutti i fenomeni malarici.

Molte circostanze favorevoli e certamente anche un po' il caso hanno fatto sì che Massarosa non sia più malarica, o lo sia in grado leggero. Niente però esclude che Massarosa possa ridiventare un gravissimo focolaio malarico (¹). Ciò, mi affretto a dirlo, forse non potrebbe essere evitato sopprimendo le risaie, le quali lascerebbero indietro luoghi palustri e sommersi, capaci per proprio conto di permettere una enorme propagazione degli Anofeli. Devesi invece continuare nella cura sollecita e scrupolosa di qualunque caso di malaria, cura che occorrerebbe fare in un ospedale riparato da reticelle metalliche.

Il fenomeno del paludismo senza malaria, quale si verifica in una parte della Toscana, a mio avviso, dimostra soltanto che, mi si permetta la frase, la malaria è un colosso dai piedi di creta; colle reticelle metalliche applicate seriamente e colla cura scrupolosa potremo in breve tempo abbatterlo (²).

Matematica. — *Determinazione della funzione di Green di grado n, nel caso di una sfera.* — Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

Una funzione G poli-armonica di grado n, cioè regolare insieme colle sue derivate fino all'ordine $2n$ in tutto uno spazio S dove soddisfa all'equazione:

$$\Delta_{2n}\,G = 0\,,$$

e tale che al contorno verifica le condizioni:

$$G = r^{2n-3},\quad \frac{d^iG}{d\nu^i} = \frac{d^i r^{2n-3}}{d\nu^i}\,,\ (i = 1, 2, \ldots\ n-1), \tag{1}$$

dove r è la distanza di un punto qualunque della superficie da un altro punto P arbitrario, ma fisso, di S e ν la normale al contorno σ rivolta verso l'interno di S, dicesi funzione di Green di grado n relativa al polo P. Il valore

(¹) Ciò è accaduto per es. in Dalmazia. Il sig. dott. Battara mi comunica che all'isola Zuri (a circa 20 km. dalla costa dalmata) dove a memoria d'uomo non vi era mai stata malaria, quest'anno vi si è sviluppata una grave epidemia, che ha colpito metà della popolazione. Si è constatato che la malaria è stata importata da un individuo di Zuri che si era infettato sulla costa Dalmata.

(²) Siccome gli *Anopheles* propagano colla puntura anche la *filaria immitis* (Grassi e Noè), così riusciva interessante sapere se a Massarosa i cani fossero infetti di *filaria immitis*: ho perciò fatto delle ricerche che mi diedero prontamente risultato positivo.

di G in un punto qualunque M di S è funzione simmetrica rispetto alle due terne di coordinate del punto P e del punto M ([1]).

È ben noto il modo con cui si è condotti alla definizione della funzione G, quando si voglia determinare una funzione u poli-armonica di grado n, mediante i valori che essa e le sue derivate fino a quelle di ordine $n-1$, secondo la normale, assumono al contorno.

Ma la determinazione di una tale funzione presenta gravi difficoltà. Così prescindendo dal caso ordinario di $n=1$, la seconda funzione di Green ($n=2$) per uno spazio a due dimensioni, specialmente interessante per le applicazioni a problemi relativi alle lamine incastrate, è stata determinata: dal prof. Lauricella nel caso di un piano infinito limitato da una retta e nel caso di un campo circolare ([2]); dal prof. D'Arcais nel caso di una corona circolare ([3]).

D'altra parte i bei lavori del prof. Almansi ([4]) hanno fatto risolvere, indipendentemente dalla ricerca della funzione di Green, il problema della determinazione della funzione poli-armonica di grado n pel cerchio ed il metodo è senz'altro applicabile al caso della sfera.

La formula del prof. Almansi conduce a calcoli laboriosi, anche quando la si voglia applicare al caso speciale della ricerca della funzione di Green. Perciò credo interessante esporre un metodo semplicissimo che permette di assegnare la funzione di Green di grado n per la sfera, risolvendo un semplice sistema di equazioni lineari.

1.

Sia a il raggio della sfera nel cui centro 0 è posta l'origine degli assi: P $(x_1\, y_1\, z_1)$ il polo interno alla sfera, ϱ la sua distanza dal centro; M (x, y, z) un punto qualunque interno alla sfera e diciamo r ed r' le distanze di M da P e dalla sua immagine P'.

Poniamo:

$$r_1 = \frac{\varrho}{a}\, r';$$

la funzione r_1 (del punto M) è regolare entro la sfera, come pure il

$$\Delta_2\, r_1 = \frac{2}{r_1};$$

quindi, essendo:

$$\Delta_4\, r_1 = 0$$

([1]) Cfr. Boggio, Atti R. Acc. d. Sc. di Torino, vol. XXXV.

([2]) Mem. Acc. delle Sc. di Torino, Ser. II, vol. XLVI; Atti Acc. Sc. di Torino, vol. XXXI.

([3]) Atti R. Ist. Veneto, Ser. VII, tom. IX.

([4]) Annali di Matem., Ser. III, tom. II. Vedi ancora i lavori del Levi-Civita, del Boggio.

a r_1 è bi-armonica entro la sfera. Inoltre è noto che quando M trovasi sulla superficie della sfera si ha:

$$r_1 = r\,.$$

Il metodo che espongo si fonda su questo teorema generale: *la funzione*:

$$r_1^{2h-1}\, r^{2k}$$

dove h e k sono numeri interi e positivi (lo zero compreso) tali che

$$h + k = n - 1\,,$$

è poli-armonica di grado n.

Infatti poniamo:

$$\beta = \frac{\partial r^{2k}}{\partial x}\frac{\partial r_1^{2h-3}}{\partial x} + \frac{\partial r^{2k}}{\partial y}\frac{\partial r_1^{2h-3}}{\partial y} + \frac{\partial r^{2k}}{\partial z}\frac{\partial r_1^{2h-3}}{\partial z}\,,$$

e supponiamo che si sia dimostrato:

$$\Delta_{2\,(n-2)}\,\beta = 0\,.$$

Dico che:

$$\alpha = \sum \frac{\partial r^{2k}}{\partial x}\frac{\partial r_1^{2h-1}}{\partial x}\,.$$

soddisfa la

$$\Delta_{2n}\,\alpha = 0\,.$$

Basta osservare che:

$$\alpha = \frac{2h-1}{2h-3}\, r_1^2\, \beta$$

e che:

$$\Delta_2 \alpha = a\beta + b r_1^2 \Delta_2 \beta + c\left(\frac{\partial r_1^2}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \cdots\cdots\right)$$

essendo $a.\, b,\, c$ delle costanti. Se quindi si nota che:

$$\frac{\partial^2 r_1^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 r_1^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 r_1^2}{\partial z^2} = \text{cost.}$$

si scorge subito che:

$$\Delta_{2(n-1)}\,\alpha = a'\,\Delta_{2(n-2)}\,\beta + b' r_1^2\, \Delta_{2(n-1)}\,\beta + c' \sum \frac{\partial r_1^2}{\partial x}\frac{\partial \Delta_{2(n-2)}\,\beta}{\partial x}$$

e quindi è vero il teorema.

Collo stesso metodo si verifica che posto:

$$\beta' = \sum \frac{\partial r^{2(k-1)}}{\partial x}\frac{\partial r_1^{2h-1}}{\partial x}$$

se è:

$$\Delta_{2(n-2)}\,\beta'^2 = 0$$

sarà pure:

$$\Delta_{2(n-1)}\,\alpha = 0\,.$$

E poichè, come subito si verifica, il teorema è vero per:

$$k = 2 \,,\, h = 0 \text{ e per } k = n \text{ e } h = 0$$

così è vero in generale.

Dopo ciò possiamo dimostrare, col metodo di induzione, il teorema generale enunciato. Ammettiamolo infatti vero per due numeri h e k tali che:

$$h + k = n - 2 \,.$$

Osservando allora che:

$$\Delta_2 (r_1^{2h-1} r^{2k}) = a r_1^{2h-3} r^{2k} + b r_1^{2h-1} r^{2k-2} + 2a$$

risulta:

$$\Delta_{2n} (r_1^{2h-1} r^{2k}) = 0 \,.$$

Ma per $h + k = 1$ il teorema è verificato; dunque esso è vero in generale.

Si deduce quindi che le n funzioni:

$$r_1^{2n-3},\, r_1^{2n-5} r^2,\, r_1^{2n-7} r^4, \ldots\ldots, r_1 r^{2(n-2)},\, \frac{r^{2(n-1)}}{r_1}$$

sono funzioni poli-armoniche di grado n nell'interno della sfera e sono omogenee di grado $2n - 3$ rispetto r e r_1.

2.

Consideriamo ora una funzione lineare ed omogenea delle n precedenti:

$$(2) \qquad G = a_1 r_1^{2n-3} + a_2 r_1^{2n-5} r^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} r_1 r^{2(n-2)} + a_n \frac{r^{2(n-1)}}{r_1} \,.$$

Dico che potremo determinare le costanti a_i in modo che siano soddisfatte le (1).

La prima condizione infatti ci dà:

$$a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n = 1$$

che possiamo scrivere:

$$(G) = r^{2n-3}$$

intendendo che in (G) si è fatto $r = r_1$.

Abbiamo poi:

$$\frac{dG}{dv} = G_1 \frac{dr_1}{dv} + G_0 \frac{dr}{dv}$$

in cui per compendio si è posto:

$$G_1 = \frac{\partial G}{\partial r_1} \;,\; G_0 = \frac{\partial G}{\partial r} \,.$$

Ma in superficie deve essere:

$$\frac{dG}{d\nu} = (2n-3)\, r^{2n-4} \frac{dr}{d\nu},$$

onde dovrà risultare:

$$(G_1) = 0\,,\ (G_0) = (2n-3)\, r^{2n-4}.$$

Ora osserviamo che G è omogenea di grado $2n - 3$ in r ed r_1; quindi

$$(2n-3)\, G = G_0\, r + G_1\, r_1$$

però si vede subito che l'equazione

$$(G_0) = (2n-3)\, r^{2n-4}$$

è una conseguenza delle due

$$(G) = r^{2n-3}\,,\ (G_1) = 0\,.$$

Abbiamo successivamente:

$$\frac{d^2G}{d\nu^2} = G_1 \frac{d^2 r_1}{d\nu^2} + G_0 \frac{d^2 r}{d\nu^2} + G_{11}\left(\frac{dr_1}{d\nu}\right)^2 + 2G_{10}\frac{dr}{d\nu}\frac{dr_1}{d\nu} + G_{00}\left(\frac{dr}{d\nu}\right)^2$$

in cui si è posto:

$$G_{11} = \frac{\partial^2 G}{\partial r_1^2}\,;\ G_{10} = \frac{\partial^2 G}{\partial r\, \partial r_1}\,;\ G_{00} = \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\,.$$

D'altra parte:

$$\frac{d^2 r^{2n-3}}{d\nu^2} = (2n-3)(2n-4)\, r^{2n-5}\left(\frac{dr}{d\nu}\right)^2 + (2n-3)\, r^{2n-4}\frac{d^2 r}{d\nu^2}\,.$$

Dunque in superficie dovrà risultare:

$$(G_{11}) = 0\,,\quad (G_{10}) = 0\,,\quad (G_{00}) = (2n-3)(2n-4)\, r^{2n-5}\,.$$

Ma G_0 e G_1 essendo omogenee di grado $2n - 4$ in r ed r_1, abbiamo:

$$(2n-4)\, G_0 = rG_{00} + r_1\, G_{01}$$
$$(2n-4)\, G_1 = rG_{01} + r_1\, G_{11}.$$

Posto dunque:

$$(G_{11}) = 0$$

risultano verificate le altre due equazioni:

$$(G_{10}) = 0\,,\quad (G_{00}) = (2n-3)(2n-4)\, r^{2n-5}\,.$$

Tale metodo si continua agevolmente ed otteniamo con ciò n equazioni:

$$(G) = r^{2n-3}, (G_1) = (G_{11}) = G_{111} = \ldots\ldots = 0\,.$$

Se poniamo:

$$\varphi\,(x) = a_1 x^{2n-3} + a_2 x^{2n-5} + \ldots\ldots + a_{n-1}\, x + \frac{a_n}{x}$$

le n equazioni precedenti assumono la forma più semplice:

$$(3) \qquad \varphi(1)=1\,,\ \varphi'(1)=\varphi''(1)=\ldots\ldots=\varphi^{(n-1)}(1)=0\,.$$

Queste, sviluppate a loro volta, conducono al sistema seguente di equazioni lineari:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n=1$$
$$(2n-3)\,a_1+(2n-5)\,a_2+\ldots\ldots+a_{n-1}-a_n=0$$
$$(2n-3)(2n-4)\,a_1+(2n-5)(2n-6)\,a_2+\ldots+3\,.\,2a_{n-2}\ldots+1\,.\,2a_n=0$$

. . . .

La ennesima equazione nel caso di n dispari è:

$$(2n-3)(2n-4)\ldots(n-1)\,a_1+\ldots+n\,!\,a_{\frac{n-1}{2}} \qquad +1\,.\,2\ldots(n-1)\,a_n=0\,.$$

Nel caso di n pari

$$(2n-3)(2n-4)\ldots(n-1)a_1+\ldots+(n-1)!\,a_{\frac{n}{2}} \quad -1.2.3\ldots(n-1)\,a_n=0\,.$$

Non sembra agevole poter esprimere la forma generale di risoluzione per a_i sotto forma semplice.

Possiamo quindi dire che:
la funzione di Green di grado n per la sfera è dunque data dalla (2) *in cui i coefficienti costanti a_i sono determinati dal sistema* (3). Così, per es. la funzione di Green di 2° grado (o seconda funzione di Green) è data da;

$$\frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1}+\frac{1}{2}\,r_1\,;$$

quella di 3° grado da:

$$\frac{3}{8}\frac{r^4}{r_1}+\frac{3}{4}\,r_1\,r^2-\frac{1}{8}\,r_1^3;$$

quella di 4° grado da:

$$\frac{5}{16}\,\frac{r^6}{r_1}+\frac{15}{16}\,r_1\,r^4-\frac{5}{16}\,r_1^3\,r^2+\frac{1}{16}\,r_1^5 \text{ ecc.}$$

Lo stesso metodo si applica alla ricerca della funzione di Green di grado n nel caso del cerchio, cioè di una funzione poli-armonica di grado n, che al contorno soddisfa le

$$\mathrm{G}=r^{2n-2}\,\log r\,; \qquad \frac{d^i\,\mathrm{G}}{dv^i}=\frac{d^i\,(r^{2n-2}\log r)}{dv^i}\,.$$

Basta osservare che le funzioni:

$$r^{2n-2}\,\log r_1 \ \text{ e } \ r^{2h}\ r_1^{2k}\,,$$

in cui h e k sono numeri interi e positivi (zero compreso) tali che $h+k=n-1$, sono poli-armoniche di grado n nel cerchio. La funzione G si comporrà linearmente con queste. Così p. e. per la funzione di Green di 3° grado si trova:

$$G=\frac{3}{4}r^4+\frac{1}{4}r_1^4-r^2r_1^2+r^4\log r_1 .$$

Fisica. — *Dispersione rotatoria magnetica dei vapori di sodio nell' interno della riga di assorbimento* (1). Nota del dott. O. M. Corbino, presentata dal Socio Paternò.

Per un foro penetra in una camera buia un fascio parallelo di raggi solari, attraversa un nicol, quindi, secondo l' asse forato, un elettromagnete Weiss avente tra i poli una fiamma Bunsen intensamente colorata con una perla di bromuro di sodio, e infine un triprisma di quarzo di Fresnel con gli spigoli orizzontali e un analizzatore. Esaminandolo allora con un reticolo di Rowland e osservando, p. es., il secondo spettro, esso si trova, mentre l' elettrocalamita non è eccitata, solcato da frange orizzontali prodotte dal parallelepipedo (frange di Billet). Queste si spiegano in modo semplice col fatto che il triplisma produce nei diversi punti di una linea verticale rotazioni lentamente crescenti, in modo da aversi un aumento di rotazione eguale a 180° nell' intervallo di due frange nere consecutive.

Con facili precauzioni si possono avere nel campo dell' oculare nettissime le frange orizzontali e le righe di Fraunhofer. Le righe di assorbimento del sodio sono larghissime.

Se ora si eccita il campo, le frange orizzontali si inflettono fortemente in vicinanza delle righe D, nello stesso senso dalle due parti di ciascuna riga. L' inflessione avviene invece in senso inverso, dappertutto, per esempio verso il basso se prima avveniva verso l' alto, invertendo il campo magnetico.

La spiegazione del fenomeno è immediata tenendo conto del forte potere rotatorio dei vapori metallici in vicinanza delle righe di assorbimento, come risulta dalle esperienze eseguite dal prof. Macaluso e da me (2). Ed è chiaro che le curve cui danno luogo le frange contorte indicano la rotazione del piano di polarizzazione in funzione della lunghezza d' onda, rappresentando l' intervallo tra due frange una rotazione di 180°.

Fin qui l' esperienza non avrebbe altro interesse che di permettere che si segua, per dir così, graficamente l' andamento della rotazione nei diversi posti dello spettro.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Palermo.

(2) Rend. Linc., 2° sem. 1898.