ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 6 ottobre 1901.

Matematica. — *Sulle funzioni biarmoniche.* Nota del prof. GIUSEPPE LAURICELLA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Mi propongo di dimostrare che una funzione biarmonica — per fissare le idee — nei punti di uno spazio a tre dimensioni, si può sempre sviluppare in serie di funzioni razionali, intere, omogenee nei punti dell'interno di una sfera, in serie di funzioni razionali, fratte, omogenee nei punti dello spazio indefinito esterno a questa sfera; e che i termini di questi sviluppi si possono determinare per mezzo dei valori nei punti della superficie sferica di questa funzione e della sua derivata normale, valori che, come è noto, si possono dare ad arbitrio.

È facile comprendere come questo teorema si possa estendere al caso delle funzioni poliarmoniche.

1. Sia R il raggio della sfera, sia per semplicità il centro della sfera nell'origine degli assi, e sia ϱ il raggio vettore che parte dal centro della sfera e va ad un punto qualsiasi dello spazio.

È noto [1] che un integrale regolare qualunque u della doppia equazione di Laplace nei punti della sfera di raggio R, si può sempre porre sotto la forma:

$$u = (\mathrm{R}^2 - \varrho^2)\,\varphi + \psi\,, \tag{1}$$

dove φ, ψ sono due convenienti funzioni armoniche.

[1] Cfr. Almansi, *Sulla deformazione della sfera elastica.* Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, serie II, tom. XLVII, pag. 9; *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Annali di Mat. ser. III, t. 2.

Questo principio si può estendere al caso dello spazio indefinito limitato dalla superficie sferica di raggio R. Infatti basterebbe estendere al caso nostro i calcoli del prof. Almansi; ma è più semplice procedere nel seguente modo.

Sia u una funzione biarmonica, regolare nei punti dello spazio indefinito limitato dalla superficie σ della sfera di raggio R; e sia, per un momento, ϱ' il raggio vettore che parte dall'origine e va ad un punto qualsiasi di tale spazio. Mediante un'inversione, fatta in base alla sfera data, la u si trasformerà in una funzione u' regolare nei punti dell'interno della sfera e la $\varrho u'$ sarà una funzione biarmonica [1] dei punti di questo spazio; e, se si vuole che la u a distanza infinita divenga infinitesima del primo ordine, la $\varrho u'$ dovrà divenire per $\varrho = 0$ infinitesima del secondo ordine. Ora la $\varrho u'$ si può porre sotto la forma:

$$\varrho u' = (\mathrm{R}^2 - \varrho^2)\,\varphi_1 + \psi_1\,,$$

con φ_1, ψ_1 funzioni armoniche tali che per $\varrho = 0$ l'espressione $\mathrm{R}^2\,\varphi_1 + \psi_1$ divenga infinitesima del secondo ordine.

Si ha ancora, ripetendo la medesima inversione,

$$u = \varrho' \left\{ \left(\mathrm{R}^2 - \frac{\mathrm{R}^4}{\varrho'^2}\right)\varphi'_1 + \psi'_1 \right\} = (\varrho'^2 - \mathrm{R}^2)\left(\mathrm{R}^2\,\frac{\varphi'_1}{\varrho'} + \frac{\psi'_1}{\varrho'}\right) + \mathrm{R}^2\,\frac{\psi'_1}{\varrho'}\,,$$

dove φ'_1, ψ'_1 sono le trasformate di φ_1, ψ_1 e dove le espressioni

$$\mathrm{R}^2\,\frac{\varphi'_1}{\varrho'} + \frac{\psi'_1}{\varrho'}\,,\quad \mathrm{R}^2\,\frac{\psi'_1}{\varrho'}$$

sono due funzioni armoniche, di cui la prima a distanza infinita diviene infinitesima del terzo ordine, la seconda infinitesima del primo ordine. Adunque per lo spazio indefinito limitato da σ varrà ancora la formola (1), con l'avvertenza che a distanza infinita la φ divenga infinitesima del terzo ordine, la ψ del primo ordine.

2. Si ha per i punti dell'interno della sfera di raggio R:

$$(2)\qquad \varphi = \sum_0^\infty{}_n\, \varrho^n\,\mathrm{Y}'_n\,,\qquad \psi = \sum_0^\infty{}_n\, \varrho^n\,\mathrm{Y}''_n\,,$$

per i punti dello spazio indefinito esterno alla sfera di raggio R:

$$(2)'\qquad \varphi = \sum_0^\infty{}_n\, \frac{\mathrm{Y}'''_n}{\varrho^{n+1}}\,,\qquad \psi = \sum_0^\infty{}_n\, \frac{\mathrm{Y}''''_n}{\varrho^{n+1}}\,,$$

dove Y'_n, Y''_n, Y'''_n, Y''''_n sono convenienti funzioni sferiche di ordine n, e dove

[1] Cfr. Volterra, *Sulle funzioni poliarmoniche*. Atti del R. Ist. Veneto, tom. LVII.

ancora $Y_0''' = Y_1''' = 0$; per cui sarà nei punti dell'interno della sfera:

$$(1)' \qquad u = \sum_0^\infty {}_n\, \varrho^n \{ R^2\, Y'_n - Y'_{n-2} + Y''_n \},$$

nei punti dello spazio indefinito esterno alla sfera:

$$(1)'' \qquad u = \sum_0^\infty {}_n\, \frac{1}{\varrho^{n+1}} \{ R^2\, Y'''_n - Y'''_{n+2} + Y''''_n \}.$$

Queste due formule dimostrano la prima parte del risultato enunciato.

3. Indichiamo ora con f_1 i valori arbitrariamente dati di u nei punti della superficie σ, con f_2 quelli della derivata normale di u pure dati ad arbitrio nei punti di σ; e vediamo in che maniera si possono determinare le funzioni sferiche $Y'_n, Y''_n, Y'''_n, Y''''_n$ da sostituire nelle (1)′, (1)″.

Osserviamo anzitutto che, come apparisce dalla (1), la funzione armonica ψ nei punti di σ coincide con la funzione u; in questo modo nei punti di σ si dovrà avere $\psi = f_1$; e quindi sarà:

$$(3) \qquad Y''_n = \frac{2n+1}{4\pi R^{n+2}} \int_\sigma P_n f_1\, d\sigma, \qquad Y''''_n = \frac{2n+1}{4\pi} R^{n-1} \int_\sigma P_n f_1\, d\sigma,$$

dove P_n è la nota *funzione di Legendre*.

Le serie (2) nei punti della sfera e le serie (2)′ nei punti dello spazio indefinito limitato da σ sono derivabili termine a termine; per cui si potrà scrivere per i punti dell'interno della sfera:

$$(4) \qquad \frac{du}{d\varrho} = -2\varrho\varphi + \frac{d\psi}{d\varrho} + (R^2 - \varrho^2) \frac{d\varphi}{d\varrho} =$$

$$= -2\varrho \sum_0^\infty {}_n\, \varrho^n Y'_n + \sum_0^\infty {}_n\, n\varrho^{n-1} Y''_n + (R^2 - \varrho^2) \sum_0^\infty {}_n\, n\varrho^{n-1}\, Y'_n,$$

per i punti del campo indefinito limitato da σ:

$$(4)' \qquad \frac{du}{d\varrho} = -2\varrho \sum_0^\infty {}_n\, \frac{Y'''_n}{\varrho^{n+1}} - \sum_0^\infty {}_n\, (n+1) \frac{Y''''_n}{\varrho^{n+2}} - (R^2 - \varrho^2) \sum_0^\infty {}_n\, (n+1) \frac{Y'''_n}{\varrho^{n+2}}.$$

Moltiplichiamo ambo i membri della (4) per P_n e integriamo a tutta la superficie sferica σ' di raggio $\varrho < R$; moltiplichiamo ambo i membri della (4)′ per P_n e integriamo a tutta la superficie sferica σ'' di raggio $\varrho > R$.

Si ottiene, facendo uso delle note formole sulle funzioni sferiche,

$$\int_{\sigma'} \mathrm{P}_n \frac{du}{d\varrho} d\sigma' = -2\varrho^{n+3} \frac{4\pi}{2n+1} \mathrm{Y}'_n + n\varrho^{n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \mathrm{Y}''_n + (\mathrm{R}^2 - \varrho^2) n\varrho^{n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \mathrm{Y}_n ,$$

$$\int_{\sigma''} \mathrm{P}_n \frac{du}{d\varrho} d\sigma'' = -\frac{2}{\varrho^{n-2}} \frac{4\pi}{2n+1} \mathrm{Y}'''_n - \frac{n+1}{\varrho^n} \cdot \frac{4\pi}{2n+1} \mathrm{Y}''''_n - (\mathrm{R}^2 - \varrho^2) \frac{n+1}{\varrho^n} \cdot \frac{4\pi}{2n+1} \mathrm{Y}'''_n .$$

Passando al limite per $\varrho = \mathrm{R}$ ed osservando che si ha per ipotesi:

$$\lim_{\varrho = \mathrm{R}} \left(-\frac{du}{d\varrho}\right)_{\varrho<\mathrm{R}} = f_2 , \quad \lim_{\varrho = \mathrm{R}} \left(\frac{du}{d\varrho}\right)_{\varrho>\mathrm{R}} = f_2 ,$$

le due formole precedenti ci daranno:

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int_\sigma \mathrm{P}_n f_2 \, d\sigma = 2\mathrm{R}^{n+3} \mathrm{Y}'_n - n\mathrm{R}^{n+1} \mathrm{Y}''_n ,$$

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int_\sigma \mathrm{P}_n f_2 \, d\sigma = -\frac{2}{\mathrm{R}^{n-2}} \mathrm{Y}'''_n - \frac{n+1}{\mathrm{R}^n} \mathrm{Y}''''_n ;$$

e quindi:

$$(3)' \quad \begin{cases} \mathrm{Y}'_n = \dfrac{2n+1}{8\pi \mathrm{R}^{n+3}} \displaystyle\int_\sigma \mathrm{P}_n f_2 \, d\sigma + \dfrac{n(2n+1)}{8\pi \mathrm{R}^{n+4}} \displaystyle\int_\sigma \mathrm{P}_n f_1 \, d\sigma , \\ \mathrm{Y}'''_n = -\dfrac{2n+1}{8\pi} \mathrm{R}^{n-2} \displaystyle\int_\sigma \mathrm{P}_n f_2 \, d\sigma - \dfrac{(n+1)(2n+1)}{8\pi} \mathrm{R}^{n-3} \displaystyle\int_\sigma \mathrm{P}_n f_1 \, d\sigma . \end{cases}$$

Le condizioni $\mathrm{Y}'''_0 = \mathrm{Y}'''_1 = 0$, nel caso del campo indefinito limitato da σ, ci dànno due condizioni simultanee per le funzioni arbitrarie f_1, f_2.

Matematica. — *Carattere di divisibilità per un numero intero qualunque.* Nota di GINO LORIA [1], presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Un numero intero qualunque g (il quale, per ciò che segue, conviene di supporre positivo) può sempre assumersi come base di un sistema

[1] Il problema di « decidere se un numero N sia divisibile per un altro, mediante la semplice ispezione delle cifre del primo » risale, almeno, a B. Pascal, il quale, nella breve Memoria intitolata *De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis* (Oeuvres de Blaise Pascal, t. V, La Haye 1779, p. 123-134) si propose di generalizzare il notissimo criterio di divisibilità per 9; tale Memoria venne ampliamente illustrata dal prof. A. Conti (*Sulla divisibilità dei numeri*, Periodico di matematica per l'insegnamento secondario, t. XIII, 1898). La regola di divisibilità formulata da Pascal si trova nel *Formulaire de mathématiques publié par G. Peano, édition de l'an 1901* (Turin 1901, p. 89) ed, in fondo, non differisce da quella che si legge in L. Kronecker, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*. Erster Abschnitt. I Bd. (Leipzig, 1901). Non sem-