ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

Si ottiene, facendo uso delle note formole sulle funzioni sferiche,

$$\int_{\sigma'} P_n \frac{du}{d\varrho} d\sigma' = -2\varrho^{n+3} \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n + n\varrho^{n+1} \frac{4\pi}{2n+1} Y''_n + (R^2-\varrho^2) n\varrho^{n+1} \frac{4\pi}{2n+1} Y_n,$$

$$\int_{\sigma''} P_n \frac{du}{d\varrho} d\sigma'' = -\frac{2}{\varrho^{n-2}} \frac{4\pi}{2n+1} Y'''_n - \frac{n+1}{\varrho^n} \cdot \frac{4\pi}{2n+1} Y''''_n - (R^2-\varrho^2) \frac{n+1}{\varrho^n} \cdot \frac{4\pi}{2n+1} Y'''_n.$$

Passando al limite per $\varrho = R$ ed osservando che si ha per ipotesi:

$$\lim_{\varrho = R} \left(-\frac{du}{d\varrho}\right)_{\varrho<R} = f_2 \,, \quad \lim_{\varrho = R} \left(\frac{du}{d\varrho}\right)_{\varrho>R} = f_2 \,,$$

le due formole precedenti ci daranno:

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int_\sigma P_n f_2 \, d\sigma = 2R^{n+3} Y'_n - nR^{n+1} Y''_n \,,$$

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int_\sigma P_n f_2 \, d\sigma = -\frac{2}{R^{n-2}} Y'''_n - \frac{n+1}{R^n} Y''''_n \,;$$

e quindi:

$$(3)' \quad \begin{cases} Y'_n = \dfrac{2n+1}{8\pi R^{n+3}} \displaystyle\int_\sigma P_n f_2 \, d\sigma + \dfrac{n(2n+1)}{8\pi R^{n+4}} \displaystyle\int_\sigma P_n f_1 \, d\sigma \,, \\ Y'''_n = -\dfrac{2n+1}{8\pi} R^{n-2} \displaystyle\int_\sigma P_n f_2 \, d\sigma - \dfrac{(n+1)(2n+1)}{8\pi} R^{n-3} \displaystyle\int_\sigma P_n f_1 \, d\sigma \,. \end{cases}$$

Le condizioni $Y'''_0 = Y'''_1 = 0$, nel caso del campo indefinito limitato da σ, ci dànno due condizioni simultanee per le funzioni arbitrarie f_1, f_2.

Matematica. — *Carattere di divisibilità per un numero intero qualunque.* Nota di Gino Loria [1], presentata dal Socio Luigi Bianchi.

1. Un numero intero qualunque g (il quale, per ciò che segue, conviene di supporre positivo) può sempre assumersi come base di un sistema

[1] Il problema di « decidere se un numero N sia divisibile per un altro, mediante la semplice ispezione delle cifre del primo » risale, almeno, a B. Pascal, il quale, nella breve Memoria intitolata *De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis* (Oeuvres de Blaise Pascal, t. V, La Haye 1779, p. 123-134) si propose di generalizzare il notissimo criterio di divisibilità per 9; tale Memoria venne ampliamente illustrata dal prof. A. Conti (*Sulla divisibilità dei numeri*, Periodico di matematica per l'insegnamento secondario, t. XIII, 1898). La regola di divisibilità formulata da Pascal si trova nel *Formulaire de mathématiques publié par G. Peano, édition de l'an 1901* (Turin 1901, p. 89) ed, in fondo, non differisce da quella che si legge in L. Kronecker, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*. Erster Abschnitt. I Bd. (Leipzig, 1901). Non sem-

di numerazione; allora qualunque altro intero N, compreso fra 0 e g^{k+1}, si può scrivere sotto la forma seguente:

$$N = a_0 + g \cdot a_1 + g^2 \cdot a_2 + \ldots + g^k \cdot a_k, \tag{1}$$

ove $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sono interi non negativi minori di g, i quali sono determinati univocamente dalla conoscenza di N e g. Indichiamo con S_g (N) la somma delle cifre del numero N scritto nel sistema di numerazione avente g per base; poniamo, cioè,

$$S_g(N) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k \tag{2}$$

Sottraendo la (2) dalla (1) si ottiene

$$N - S_g(N) = (g-1)\, a_1 + (g^2 - 1)\, a_2 + \ldots + (g^k - 1)\, a_k.$$

Ora tutti i binomî $g - 1$, $g^2 - 1, \ldots, g^k - 1$ sono divisibili per $g - 1$, onde lo stesso accade per tutto il secondo membro dell'ultima eguaglianza scritta e quindi per la differenza $N - S_g(N)$. Se quindi a è un qualunque divisore di $g - 1$, affinchè esso divida anche N bisogna e basta che sia un fattore della somma S_g (N). Si raccoglie da ciò il seguente

Teorema I. — *Affinchè un intero* N *sia divisibile per un altro numero intero* a, *è necessario e sufficiente che risulti divisibile per* a *la somma* S_g (N) *delle cifre del numero* N *scritto in un sistema di numerazione avente per base* g *un multiplo arbitrario di* a *aumentato di uno.*

Questa proposizione insegna in sostanza un procedimento per *ridurre* la ricerca delle condizioni di divisibilità di N per a ad altra analoga, ma concernente un numero $<$ N. Orbene, se il numero N è molto grande, per raggiungere lo scopo bisognerà applicare nuovamente il teorema ora dimostrato, cioè considerare la somma delle sue cifre, vale a dire il numero $S_g[S_g(N)] = S_g^{(2)}(N)$; se ciò non basta si ricorrerà a $S_g[S_g^{(2)}(N)] = S_g^{(3)}(N)$, e così via. Ora la considerazione delle *somme successive delle cifre di un numero* complica un po' la ricerca e si può evitare talvolta ricorrendo ad un teorema simile al precedente e che in modo analogo si dimostra.

2. Chiamiamo per brevità *somma alternata* delle cifre del numero N, scritto sotto la forma (1), la somma delle sue cifre, prese con segni alternati, e poniamo:

$$S_g^*(N) = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^k a_k. \tag{3}$$

---

brando essa capace di soddisfare pienamente le esigenze della pratica, altre ne vennero escogitate: la più recente conta poche settimane di vita, essendo stata pubblicata nel fascicolo di agosto-settembre 1901 del giornale *Mathésis* (v. l'articolo J. Malengreau, *Caractère de divisibilité par un nombre quelconque*); tale regola è più complicata (tanto nell'enunciato, quanto nell'applicazione) di quella che è oggetto del presente scritto, ma potrebbe agevolmente dedursene.

Togliendo la (3) dalla (1) si trova:

$$N - S_g^*(N) = a_1 (g+1) + a_2 (g^2 - 1) + \dots a_k (g^k + (-1)^{k+1}).$$

Ora tutti i binomî $g+1$, $g^2-1, \dots g^k + (-1)^{k+1}$ sono divisibili per $g+1$, onde lo stesso vale per tutto il secondo membro di questa relazione e quindi anche per la differenza $N - S_g^*(N)$. Si può pertanto ritenere dimostrato il seguente

Teorema II. — *Affinchè un intero* N *sia divisibile per un altro numero intero a, è necessario e sufficiente che riesca divisibile per a la somma alternata* $S_g^*(N)$ *delle cifre del numero* N *scritto in un sistema di numerazione avente per base un numero g, il quale sia eguale ad un multiplo di a aumentato di uno* (1).

3. Emerge dalle due proposizioni precedenti che la ricerca delle condizioni di divisibilità di un numero qualsivoglia N per un numero intero a, non differisce dalla questione di scrivere N in un assegnato sistema di numerazione. È questo un problema che non offre alcuna difficoltà teorica, ma che in pratica conduce, mediante calcoli laboriosi, a conclusioni di forma variabile al mutare di a. Orbene, entrambi questi inconvenienti si evitano quando, partendo da un numero scritto nell'ordinario sistema decimale, si assume poi come base g una potenza di 10. Se infatti è

$$N = a_0 + 10\, a_1 + 10^2\, a_2 + \dots \tag{4}$$

e si scrive

$$N = (a_0 + 10\, a_1 + \dots + 10^{m-1} a_{m-1}) + 10^m (a_m + 10\, a_{m+1} + \dots + 10^{m-1} a_{2m-1}) + \dots,$$

tosto si vede che il numero N, scritto nel sistema avente per base il numero 10^m, ha per *cifre* consecutive

$$a_0 + 10\, a_1 + \dots + 10^{m-1}\, a_{m-1}\,,\; a_m + 10\, a_{m+1} + \dots + 10^{m-1}\, a_{2m-1}\,, \dots$$

le quali si ottengono semplicemente ripartendo le cifre del dato numero N (supposto sempre scritto nel modo ordinario) a partire dalla destra in tanti gruppi formati, tutti meno eventualmente l'ultimo, ciascuno di m cifre consecutive. Applicando ora i teoremi precedenti si traggono tosto questi altri:

Teorema III. — *Affinchè un numero* N, *scritto nel sistema decimale, sia divisibile per un numero intero a, il quale sia fattore di* $10^m - 1$, *è necessario e sufficiente che riesca divisibile per a la somma dei numeri risultanti dal separare, finchè ciò sia possibile, le cifre di* N *in tanti gruppi di m cifre ciascuno, a partire dalla destra.*

Teorema IV. — *Affinchè un numero* N, *scritto nel sistema decimale, sia divisibile per un numero intero a, il quale sia fattore di* $10^m + 1$,

(1) I teoremi I e II sono già noti: v. ad es. Kronecker, op. cit. p. 109-110.

è necessario e sufficiente che riesca divisibile per a la **somma alternata** *dei numeri risultanti dal separare, finchè ciò sia possibile, le cifre di* N *in tanti gruppi di m cifre ciascuno, a partire dalla destra.*

Per $m = 1$ si ritrovano così i notissimi criterî di divisibilità per 3, 9 e per 11.

Esempî: I. *Tutti i numeri della forma* $10^{mk} - 1$ *sono divisibili per* $10^m - 1$. Essendo infatti

$$N = 10^{mk} - 1 = \underbrace{9 \ldots 9}_{(1)}\,\underbrace{9 \ldots 9}_{(2)} \ldots \underbrace{9 \ldots 9}_{(k)},$$

ove ogni gruppo ha m cifre, si ha

$$S_{10^m}(N) = k \,.\, (9 + 9 \,.\, 10 + \ldots + 9 \,.\, 10^{m-1}) = k\,(10^m - 1).$$

II. *Tutti i numeri della forma* $10^{mk} - (-1)^k$ *sono divisibili per* $10^m + 1$. Si ha infatti:

se $k = 2h$, $N = 10^{mk} - (-1)^k = 10^{2mh} - 1 =$

$$= \underbrace{9 \ldots 9}_{(1)}\,\underbrace{9 \ldots 9}_{(2)} \ldots \underbrace{9 \ldots 9}_{(2h-1)}\,\underbrace{9 \ldots 9}_{(2h)},\ S^{\star}_{10^m}(N) = 0$$

se $k = 2h + 1$, $N = 10^{mk} - (-1)^k = 10^{m(2h+1)} + 1 =$

$$= \underbrace{10 \ldots 00}_{(1)}\,\underbrace{0 \ldots 00}_{(2)} \ldots \underbrace{0 \ldots 00}_{(2h)}\,\underbrace{0 \ldots 01}_{(2h+1)},\ S^{\star}_{10^m}(N) = 0.$$

4. Per determinare i confini della regione aritmetica alla quale si estendono le considerazioni precedenti, basta ricordare che, in forza del teorema di Fermat generalizzato da Eulero, *se a è primo con* 10, *il numero* $10^{\varphi(a)} - 1$ *è divisibile per a*, essendo al solito $\varphi(a)$ il numero dei numeri delle serie $1, 2, \ldots a$ che sono $< a$ e primi con esso. Il teorema III è dunque applicabile a qualunque numero a primo con 10, purchè si assuma $m = \varphi(a)$ [1]. Ma, osservando essere $\varphi(a)$ un numero pari e potendosi quindi scrivere $10^{\varphi(a)} - 1 = \left(10^{\frac{\varphi(a)}{2}} - 1\right)\left(10^{\frac{\varphi(a)}{2}} + 1\right)$, si vedrà che a divide o $10^{\frac{\varphi(a)}{2}} - 1$ oppure $10^{\frac{\varphi(a)}{2}} + 1$; nel primo caso si applicherà il teorema III, nell'altro

[1] Il prof. G. Vivanti, al quale comunicai l'essenza dell'attuale ricerca, ebbe la cortesia di richiamare la mia attenzione sopra l'articolo di M. Nassò intitolato *Alcuni teoremi di aritmetica* (*Revue de mathématiques publiée par G. Peano*, t. VII, 1900), ove si trovano, fra altri enunciati, dovuti all'abate E. Gelin, i teor. III e IV; ivi però non è segnalata la più importante prerogativa di cui essi godono, di essere cioè il germe di un criterio generale di divisibilità.

il IV sempre assumendo $m = \frac{\varphi(a)}{2}$. Ma v'ha di più. Se ω è un fattore (1 *non* escluso) di $\frac{\varphi(a)}{2}$, può accadere che p divida un numero della forma $10^{\omega} \pm 1 \left(\omega < \frac{\varphi(a)}{2}\right)$; allora conviene evidentemente applicare il III o il IV dei teoremi dimostrati, assumendo m eguale al minimo valore di ω. La determinazione di ω si può fare con un numero limitato di tentativi o coll'aiuto di una tabella che dia la decomposizione in fattori dei numeri della forma $10^m \pm 1$ (1), o finalmente *ricorrendo alla trasformazione della frazione* $\frac{1}{a}$ *in frazione decimale periodica* (2), come ora mostreremo. Sia

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) + \frac{1}{10^n}\left(\frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) + \ldots;$$

se ne deduce che

$$\frac{10^n - 1}{a} = a_n + 10\, a_{n-1} + \ldots + 10^{n-2}\, a_2 + 10^{n-1}\, a_1,$$

onde si può sempre applicare il teorema III, purchè si assuma m eguale al numero delle cifre costituenti un periodo della frazione decimale in cui può svolgersi $\frac{1}{a}$. Nel caso in cui n sia un numero pari 2ν e si abbia $a_{\nu+1} = 9 - a_1$, $a_{\nu+2} = 9 - a_2 \ldots$, $a_{2\nu} = 9 - a_\nu$ (3), dalla relazione precedente si deduce agevolmente

$$\frac{10^\nu + 1}{a} = a_\nu + 10\, a_{\nu-1} + \ldots + 10^{\nu-1}\, a_1 + 1,$$

perciò è applicabile il teorema IV a patto che si assuma m eguale alla metà

(1) A comodo dei calcolatori trascriviamo qui i primi elementi di questa tabella:

$10 - 1 = 3^2$	$10 + 1 = 11$
$10^2 - 1 = 3^2 \times 11$	$10^2 + 1 = 101$
$10^3 - 1 = 3^3 \times 37$	$10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$
$10^4 - 1 = 3^2 \times 11 \times 101$	$10^4 + 1 = 73 \times 137$
$10^5 - 1 = 3^2 \times 41 \times 271$	$10^5 + 1 = 11 \times 9090$
$10^6 - 1 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$	$10^6 + 1 = 101 \times 9901$

(2) L'uso di tale trasformazione venne suggerita dal prof. Bianchi, quando esposi in compendio il contenuto della presente Nota al Congresso matematico tenuto a Livorno nei giorni 17-22 agosto 1901, auspice l'Associazione « Mathesis »; essa riesce particolarmente giovevole a chi abbia sott'occhio la III delle tabelle che chiudono le *Disquisitiones arithmeticae* di Gauss.

(3) Esempî di siffatti sviluppi: $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$; $\frac{1}{73} = 0{,}01\,69863\ldots$; $\frac{1}{137} = 0{,}00729927\ldots$; ecc.

del numero delle cifre costituenti un periodo della frazione decimale a cui equivale $\frac{1}{a}$ (¹).

Per chiarire questo procedimento lo applicheremo alla ricerca del criterio di divisibilità pel numero primo 271. Essendo in tal caso

$$10^{\varphi(a)} - 10^{a-1} - 1 = 10^{270} - 1 = (10^{3^3 \cdot 5} - 1)\,(10^{3^3 \cdot 5} + 1),$$

bisognerà cercare se 271 sia divisore di un numero della forma $10^{\omega} \pm 1$, ove ω è uno dei numeri 1, 3, 3^2, 3^3, 5, $5 \cdot 3$, $5 \cdot 3^2$; ora essendo $10^5 - 1 = 3^2 \times 41 \times 271$ si può affermare che *affinchè un numero* N *sia divisibile per* 271 *è necessario e sufficiente che lo sia la somma dei numeri risultanti dal separare, finchè ciò sia possibile, le cifre di* N *in tanti gruppi di cinque cifre ciascuno, a partire dalla destra.* Alla stessa conclusione si giunge notando essere

$$\frac{1}{271} = 0{,}0036909369\ldots$$

Mostreremo quanto sia facile l'usare di questo criterio, applicandolo ad un esempio offerto da uno che si occupò di recente della questione che stiamo esaminando (²); si tratti, cioè, di vedere se è divisibile per 271 il seguente numero di trentasette cifre:

$$3345678984640138761350882563003775062.$$

A tale scopo lo scriveremo come segue:

$$33 \mid 45678 \mid 98464 \mid 01387 \mid 61350 \mid 88256 \mid 30037 \mid 75062\,;$$

facendo la somma degli otto nnmeri così risultanti otterremo 400267; per applicare ad esso il medesimo criterio lo scriveremo sotto la seguente forma

$$4 \mid 00267,$$

per poi dedurne il numero $267 + 4 = 271$; siccome questo è divisibile per 271, così altrettanto succede pel dato (³).

(¹) Siccome in pratica è del massimo interesse che il numero delle cifre di ognuno dei guppi, in cui si ripartiscono le cifre N, sia il più piccolo possibile, così converrà decomporre previamente a nei suoi fattori primi, e poi applicare a ciascuno il metodo esposto.

(²) V. il citato articolo del Malengreau.

(³) Le considerazioni esposte nel n. 4 guidano nel modo più naturale al seguente Teorema di Plateau. *Fra i multipli di un numero a primo con* 10 *se ne trova sempre uno della forma* 11... 1. Essendo infatti $111 = 3 \times 37$, $111\,111 = 7 \times 15873$ e $111\,111\,111 = 9 \times 12345679$ basterà dimostrare il teorema per $a > 10$. Ora si noti che essendo $10^{\varphi(a)} - 1 = 9 \cdot 1\,1 \ldots 1$ (supposto questo numero di $\varphi(a)$ cifre) divisibile per 9 deve

5. Il teorema III, combinato con le osservazioni esposte nel numero precedente, dimostra che la ricerca delle condizioni di divisibilità del numero

$$N = a_0 + 10\, a_1 + 10^2\, a_2 + \cdots$$

pel numero intero a è ridotta alla ricerca analoga pel numero

$$(5)\quad S_{10^m}(N) = a_0 + a_1 + \cdots + 10^{m-1} a_{m-1} + \sum_{k=1}^{k=n-1} [a_{km} + 10\, a_{km+1} + \cdots + 10^{m-1} a_{(k+1)\,m-1}]\ (^1),$$

m essendo un numero tale che $10^m - 1$ sia multiplo di a. Ora il *criterio generale di divisibilità di* N per a così risultante si può evidentemente trasformare in infiniti altri, potendosi al numero $S_{10^m}(N)$ sostituirne un altro che ne differisca per un multiplo qualsivoglia di a; di tale circostanza si può trarre profitto per dedurre dei *criterî speciali*, relativi ad assegnati valori di a, purchè primi con 10. Sono molto noti per la loro utilità quelli del seguente tipo: *affinchè* N *sia divisibile per a è necessario e sufficiente che lo sia un multiplo determinato del numero delle sue decine accresciuto o diminuito di un multiplo pure determinato del numero delle sue unità* (²). Per dimostrare e precisare siffatto enunciato, consideriamo l'espressione

$$(6)\quad S = \varrho a_0 + \lambda a_1 + 10\, \lambda a_2 + \cdots + 10^{m-2}\, \lambda a_{m-1} + \sum_{k=1}^{k=n-1} 10^{km-1}\, \lambda [a_{km} + 10 a_{km+1} + \cdots + 10^{m-1} a_{(k+1)m-1}],$$

ove ϱ è un intero, positivo o negativo, da determinarsi, e λ è uno dei numeri 1, 2, 5. Posto $\mu = \frac{10}{\lambda}$, dalle (5) (6) si trae

$$\mu S - S_{10^m}(N) = (\mu\varrho - 1)\, a_0 + \sum_{k=1}^{k=n-1} (10^{km} - 1)\, [a_{km} + 10 a_{km+1} + \cdots + 10^{m-1} a_{(k+1)\,m-1}].$$

---

essere 9 oppure 11 ... 1 un multiplo di a; ma la prima ipotesi è da escludersi perchè $9 < a$, onde si conclude il teorema. Si noti che da questo ragionamento si trae un metodo per determinare il numero di cui parla la proposizione di Plateau (che è un vero *porisma*); così ad es. se $a = 21$ è $\varphi(a) = 12$, $10^{\varphi(a)} - 1 = (10^6 - 1)\,(10^6 + 1)$ e si trova essere 111 111 111 111 multiplo di 21. Aggiungiamo che, essendo $10^{\varphi(a)} - 1$ multiplo di a, lo sarà anche $10^{\varphi(a)+k} - 10^k$, qualunque sia k, quindi *ogni numero primo con* 10 *ammette un multiplo della forma* $10^p - 10^q$ (v. Moriconi, *Frazioni decimali periodiche e loro generatrici*, Periodico di matematica per l'insegnamento secondario, t. I, 1886), anzi ne ammette infiniti, essendo per ciò sufficiente che gli esponenti p e q soddisfacciano alla condizione $p - q = \varphi(a)$.

(¹) Scrivendo questa formola non si esclude che il numero delle cifre di N sia primo con m, dal momento che alcuni degli ultimi numeri a possono essere nulli.

(²) V. fra altri l'ottimo *Libro di aritmetica e di algebra elementare* del prof. Gazzaniga (3ª ed. Padova, 1900).

Si osservi che $10^{km} - 1$ è divisibile per $10^m - 1$ (v. n. 3, Es. I), onde lo è eziandio per a; se ne dedurrà

$$\mu S - S_{10^m}(N) \equiv (\mu\varrho - 1)\, a_0 \pmod{a}.$$

Ma essendo a primo con 10, mentre μ è uno dei numeri 10, 5, 2 (fattori di 10) esistono sempre infinite coppie di numesi ϱ, σ tali che sia

$$\mu\varrho - 1 = \sigma a\,; \tag{7}$$

scelto ϱ in questo modo, la congruenza precedente potrà surrogarsi con questa altra:

$$\mu S - S_{10^m}(N) \equiv 0 \pmod{a}$$

ossia, essendo μ primo con a,

$$S_{10^m}(N) \equiv S \pmod{a}.$$

Questa prova che, *nella ricerca dei criterî di divisibilità pel numero a primo con* 10 *a* $S_{10^m}(N)$ *si può sostituire il numero* S: resta così dimostrata la esistenza di criterî dell' annunciato tipo e stabilito che, dato a e attribuito a λ (e quindi a μ) uno dei valori leciti, la ricerca del coefficiente ϱ dipende dalla risoluzione dell' equazione indeterminata (7).

6. Applicheremo lo schema di calcolo ora esposto ad alcuni valori (primi) speciali di a: verrà così dimostrato che molti noti speciali criterî di divisibilità fanno parte di una intesa serie di analoghi criterî, in cui anzi talora se ne trovano di preferibili a quelli.

$a = 7$. Si hanno queste tre serie di valori leciti (ove k è un intero qualunque)

$$\lambda = 1\,,\ \varrho = 5 + 7k\,;\quad \lambda = 2\,,\ \varrho = 3 + 7k\,;\quad \lambda = 5\,,\ \varrho = 1 + 7k\,;$$

fra essi bisognerà scegliere i più piccoli; volendoli positivi si assumerà $\lambda = 1$, $\varrho = 5$ e quindi si concluderà che *affinchè un numero sia divisibile per* 7 *è necessario e sufficiente che sia un multiplo di* 7 *il numero delle sue decine aumentato del quintuplo delle sue unità*; ma se si ammettono anche valori negativi si potrà prendere $\lambda = 1$, $\varrho = -2$ e concludere che *affinchè un numero sia divisibile per* 7 *deve esserlo il numero delle sue decine diminuito del doppio del numero delle sue unità*; è chiaro che questo nuovo criterio è da preferirsi al precedente.

$a = 13$. I valori più convenienti sono $\lambda = 1$, $\varrho = 4$, i quali riconducono ad un criterio noto, cioè: *affinchè un numero sia divisibile per* 13 *bisogna che ciò accada pel numero delle sue decine aumentato del quadruplo del numero delle sue unità.*

$a = 17$. Si può assumere $\lambda = 1$, $\varrho = -5$, onde *affinchè un numero sia divisibile per* 17 *è necessario e sufficiente che lo sia il numero delle*

sue decine diminuito del quintuplo del numero delle sue unità, criterio più utile di quello noto, che nasce assumendo $\lambda = 2$ e $\mu = 7$.

$a = 19$. Si assuma $\lambda = 1$, $\varrho = 2$ e si vedrà che *affinchè un numero sia divisibile per* 19 *dev'esserlo il numero delle sue decine aumentato del doppio di quello delle sue unità.*

$a = 23$. Prendendo $\lambda = 1$, $\varrho = 7$, si ritrova (come nel caso $a = 19$) un criterio conosciuto e di facile enunciazione.

Questi criterî speciali devono invocarsi in pratica allorquando si tratti di numeri piccoli, ma per numeri grandi la loro utilità è inferiore a quella del criterio generale; a provarlo valga la questione (il cui enunciato è tolto dalla memoria di Pascal citata in principio) di provare la divisibilità per 7 del numero

$$287\,542\,178\,;$$

servendosi dei due criterî speciali più sopra stabiliti, fa mestieri vedere se sia divisibile per 7 l'uno o l'altro dei numeri

$$287\,542\,17 + 5 \times 8 = 287\,542\,57$$
$$287\,542\,17 - 2 \times 8 = 287\,542\,01\,,$$

e per far ciò non v'ha di meglio che applicare ripetutamente gli stessi criterî. Se invece si adopera il criterio generale, basta scrivere il dato numero come segue

$$287 \mid 542 \mid 178$$

e fare la somma alternata dei tre numeri risultanti; tale somma essendo 77 si conclude subito la divisibilità per 7 del numero scelto da Pascal.

Chimica. — *Sopra alcuni acidi dell'azoto.* Nota di Angelo Angeli, presentata dal Socio G. Ciamician.

La maggior parte delle trasformazioni che può subire l'acido nitroidrossilamminico si spiegano nel miglior modo ammettendo che questa sostanza, nei suoi sali, possieda la struttura:

$$\begin{array}{c} NOH \\ \| \\ NO_2H \end{array}$$

Essa si può riguardare come un prodotto di ossidazione dell'acido iponitroso e reciprocamente come un prodotto di riduzione dell'acido nitroso. Anche l'acido iponitroso contiene due atomi di azoto riuniti direttamente fra di loro; l'acido nitroso invece nella maggior parte dei casi si comporta secondo la formola semplice:

$$HNO_2\,.$$