ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

« Il mio modo di vedere è il seguente: Nel vasto campo dell'elettrochimica il com-« pito dell'elettricità è così piccolo e di natura così semplice, che la scelta di un fisico « come insegnante di elettrochimica deve essere dichiarata assurda (*geradezu sachwidrig*).

« Al signor Cannizzaro invio i più cordiali saluti.

« Colla migliore stima, suo devotissimo

« H. F. Weber.

« Zurigo, 18 ottobre 1901 ».

Matematica. — *Le superficie con infinite trasformazioni conformi in sè stesse.* Nota di Ugo Amaldi, presentata dal Socio Pincherle

Il gruppo delle trasformazioni conformi dello spazio si può anche definire come l'insieme delle trasformazioni che mutano le sfere (e i piani) in sfere (o in piani) (1), ed è perciò il *gruppo principale* di quella *Geometria delle sfere*, di cui il Lie ha scoperto la relazione essenziale, sebbene ripostissima, con la *Geometria proiettiva* (2).

Ora io qui mi propongo di determinare le superficie, che ammettono infinite trasformazioni conformi in sè stesse e che perciò in codesta Geometria delle sfere meritano un posto e un'attenzione particolari. Prendo a tale scopo le mosse dalla determinazione dei gruppi conformi, reali, ad uno e a due parametri, limitandomi a considerare, come è evidentemente lecito, gruppi continui *propri* (e non *misti*), cioè gruppi generati *completamente* da un certo numero di trasformazioni infinitesime.

Ricordo, benchè tutto ciò sia notissimo, che il gruppo conforme dello spazio è costituito dalle similitudini e dalle trasformazioni per raggi vettori reciproci (3), che esso è continuo, finito e a dieci parametri e, infine, che le trasformazioni infinitesime, che lo generano, sono, nei simboli del Lie (4).

$$q \,,\quad r \,,\quad p$$
$$zq - yr \quad,\quad xr - zp \quad,\quad yp - xq$$
$$xp + yq + zr$$
$$(x^2 - y^2 - z^2)\,p + 2xyq + 2xzr\,,\quad 2yxp + (y^2 - z^2 - x^2)q + 2yzr\,,$$
$$2zxp + 2zyq + (z^2 - x^2 - y^2)\,r.$$

(1) Cfr. per una dimostrazione semplice ed elegantissima di codesto fatto notorio: Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, t. I, p. 421.

(2) *Sur une transformation géométrique* [Comptes-Rendus, 31 ottobre 1870].

(3) Liouville, *Note au sujet de deux lettres de M. William Thomson* [Journ. de Math. pures et appl., Ière série, t. XII (1847), p. 265].

(4) Cfr. p. es.: Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. II, pag. 459; oppure: Lie-Scheffers, l. c., p. 443.

1. È ben nota l'osservazione del Klein ([1]) che il gruppo delle trasformazioni per raggi vettori reciproci e delle similitudini in uno spazio euclideo ad $n-1$ dimensioni si può ottenere, per mezzo di proiezione stereografica (trasformazione reale), dal gruppo proiettivo di una superficie del secondo ordine, non degenere, di uno spazio euclideo ad n dimensioni. Traendo da ciò profitto, noi sostituiremo alla ricerca dei gruppi conformi reali ∞^1 ed ∞^2 di S_3 la ricerca equivalente dei gruppi proiettivi reali ∞^1 ed ∞^2 di una sfera dello S_4 euclideo.

E qui notiamo subito che se un gruppo proiettivo della sfera di S_4 ammette un punto unito sulla sfera e questo punto non coincide già col centro scelto su di esso per la proiezione stereografica, il gruppo si può trasformare, mediante una trasformazione proiettiva che lascia ferma la sfera, in un gruppo che ammetta come punto unito il centro di proiezione. È allora manifesto che eseguendo la proiezione stereografica si ottiene in S_3 un gruppo di trasformazioni conformi che lasciano fermo il piano all'infinito, cioè *un gruppo di similitudini*. Si ha dunque che *ogni gruppo conforme di* S_3 *simile a un gruppo proiettivo della sfera di* S_4, *il quale ammetta un punto unito fisso sulla sfera, è equivalente dentro il gruppo conforme totale a un gruppo di similitudini.*

2. Ciò premesso, per una ben nota proprietà dei gruppi proiettivi integrabili di uno spazio a quante si vogliano dimensioni ([2]), a noi torna assai conveniente di sostituire al problema di determinare i gruppi proiettivi reali ∞^1 ed ∞^2 della sfera di S_4 la ricerca più generale dei gruppi proiettivi *integrabili* reali della sfera di S_4.

La proprietà, cui abbiamo alluso, dei gruppi proiettivi integrabili di S_n si è che ogni gruppo siffatto ammette un punto unito, una retta unita passante per esso, un piano unito contenente la retta unita , ... , uno S_{n-1} unito contenente lo S_{n-2} unito. Così un gruppo proiettivo integrabile di una sfera Q di S_4 ammette un punto unito P, una retta-unita r passante per P, un piano unito π, contenente r, e uno spazio unito a tre dimensioni S_3, contenente π. Poichè vogliamo determinare tipi di gruppi *reali*, dovremo tener conto delle condizioni di realità; e, perciò, lasciando da parte il caso in cui P cade sulla sfera (caso che, come già sappiamo, dà luogo a gruppi equivalenti dentro il gruppo conforme totale a gruppi di similitudini) distingueremo tre casi secondo che il punto P è: *a*) immaginario; *b*) reale ed esterno alla sfera; *c*) reale ed interno alla sfera.

a) *Se* P *è immaginario*, esso col suo coniugato determina una retta reale unita, che possiamo senz'altro supporre esterna alla sfera Q, poichè in

([1]) *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* [Mathematische Annalen, t. V (1872), pp. 257-277 (p. 267)].

([2]) Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*. Bd. III, pag. 681.

caso contrario codesta retta intersecherebbe Q in due punti uniti [1] rispetto al gruppo considerato, il quale sarebbe, perciò, simile ad un gruppo di similitudini dello spazio a tre dimensioni. Insieme con codesta retta sarà unito il piano reale π, polare di essa rispetto a Q, il quale segherà la sfera secondo un cerchio reale. Il gruppo subordinato nel piano π è un gruppo proiettivo integrabile, che trasforma in sè un cerchio reale, ove è facile convincersi che esso ammette necessariamente un punto unito reale, o appartenente al cerchio o interno ad esso. Nel primo caso il gruppo considerato di S_4 è simile ad un gruppo di similitudini di S_3: il secondo caso sarà discusso più innanzi [*c*)].

b) *Il punto P sia reale ed esterno a Q.* Possiamo subito escludere che il gruppo ammetta qualche punto unito interno a Q, perchè se un tal punto esistesse, la congiungente di esso con P intersecherebbe la quadrica Q in due punti uniti rispetto al gruppo. Allora nello spazio S_3 a tre dimensioni, polare di P rispetto a Q, il quale è unito, resta subordinato un gruppo proiettivo integrabile che trasforma in sè una sfera reale ordinaria. Se il punto unito, ammesso da codesto gruppo integrabile di S_3, è reale (ed esterno a Q), sul piano polare di esso rispetto alla sfera di S_3 è subordinato un gruppo integrabile che lascia fermo un cerchio reale, e si conclude, come pocanzi, che il gruppo considerato in S_4 o ammette un punto unito su Q, o rientra sotto il caso *c*), che considereremo poco avanti. Se poi quel punto unito è immaginario, esso col coniugato determina una retta unita, la cui polare rispetto alla sfera di S_3 è pur essa unita. Una di codeste due rette interseca la sfera di S_3 e quindi su Q esiste anche in questo caso un punto unito.

c) *Se, infine,* P *è reale ed interno a* Q, possiamo escludere che esistano punti uniti reali esterni a Q. Nello spazio S_3 polare di P rispetto a Q (esterno a Q) è subordinato un gruppo integrabile, che ammette un punto unito immaginario: uniti saranno il punto coniugato, la congiungente reale e la retta reale polare di questa in S_3 rispetto alla quadrica (immaginaria) sezione di S_3 con Q. Abbiamo così il gruppo proiettivo *permutabile* che ammette un punto unito reale interno a Q e quattro punti uniti immaginari a due a due coniugati.

Possiamo dunque enunciare il seguente:

TEOREMA. *Ogni gruppo conforme integrabile reale dello spazio ordinario o è equivalente dentro il gruppo conforme totale ad un gruppo di similitudini, o è simile* (mediante una proiezione stereografica di S_4 combinata eventualmente con una trasformazione conforme di S_3) *al gruppo* G *proiettivo permutabile della sfera di* S_4, *che ammette un punto unito reale*

[1] Si esclude che codesti due punti possano essere scambiati l'uno nell'altro, perchè qui intendiamo occuparci di gruppi *propri* (e non *misti*).

ed interno alla sfera e quattro punti uniti immaginari a due a due coniugati.

3. Si trova senza difficoltà di sorta, che il gruppo G è a due parametri: se

$$x^2_1 + x^2_2 + x^3_3 + x^2_4 - x^2_5 = 0 \tag{1}$$

è la sfera invariante, e il punto unito reale è il centro di essa, e i punti uniti immaginari sono [1]

$$i,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0;\ -i,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0;\ 0,\ 0,\ i,\ 1,\ 0;\ 0,\ 0,\ -i,\ 1,\ 0,$$

le equazioni finite del gruppo sono [1]

$$(2)\quad \begin{cases} y_1 \equiv x_1 \cos t_1 - x_2 \operatorname{sen} t_1 \\ y_2 \equiv x_1 \operatorname{sen} t_1 + x_2 \cos t_1 \\ y_3 \equiv x_3 \cos t_2 - x_4 \operatorname{sen} t_2 \\ y_4 \equiv x_3 \operatorname{sen} t_2 + x_4 \cos t_2 \\ y_5 \equiv x_5 \end{cases}$$

Queste equazioni si possono già assumere come le equazioni finite del gruppo conforme di S_3, che noi cerchiamo, riferito ad un sistema di *coordinate pentasferiche* omogenee [2], in cui la relazione quadratica fondamentale è la (1).

Ad ogni modo eseguendo la proiezione stereografica e riferendo il gruppo ad un ordinario sistema di coordinate cartesiane ortogonali, troviamo le seguenti equazioni finite:

$$(3)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{2(x \cos t_1 - y \operatorname{sen} t_1)}{1 + \cos t_2 - 2z \operatorname{sen} t_2 + (x^2 + y^2 + z^2)\,(1 - \cos t_2)} \\[2ex] y' = \dfrac{2(x \operatorname{sen} t_1 + y \cos t_1)}{1 + \cos t_2 - 2z \operatorname{sen} t_2 + (x^2 + y^2 + z^2)\,(1 - \cos t_2)} \\[2ex] z' = \dfrac{\operatorname{sen} t_2 + 2z \cos t_2 - (x^2 + y^2 + z^2) \operatorname{sen} t_2}{1 + \cos t_2 - 2z \operatorname{sen} t_2 + (x^2 + y^2 + z^2)\,(1 - \cos t_2)} \end{cases}$$

Le due trasformazioni infinitesime che generano il gruppo sono:

$$yp - xq \quad , \quad 2zxp + 2zyq + (z^2 - x^2 - y^2 + 1)r.$$

Poichè il gruppo G è costituito da *tutte* le trasformazioni proiettive della sfera di S_4 in sè stessa, che ammettono un determinato pentaedro unito, è manifesto che esso non è contenuto in nessun gruppo conforme più ampio,

[1] Cfr. il § III della mia Memoria: *Tipi di potenziali che, divisi per una funzione fissa, si possono far dipendere da due sole variabili* (Rendic. del Circ. mat. di Palermo, t. XVI).

[2] Cfr., p. es., Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, I^ère partie, livre II, chap. VI.

come sottogruppo invariante, e quindi che *gli* ∞^1 *gruppi ad un parametro contenuti in* G, *generati dalle trasformazioni infinitesime*

$$e_1(yp - xq) + e_2(2zxp + 2zyq + (z^2 - x^2 - y^2 + 1)\,r),$$

non sono fra loro equivalenti dentro il gruppo conforme totale.

4. Dopo queste premesse, determiniamo le superficie che ammettono ∞^1 o ∞^2 trasformazioni conformi in sè, e cominciamo dalle prime.

Le superficie che ammettono un gruppo ∞^1 di similitudini, sono già state determinate dallo Stäckel [1] e sono: i *cilindri*, i *coni*, le *superficie di rotazione*, le *elicoidi* e le *superficie spirali* di Lie e Lewy.

Restano a considerare le superficie che ammettono un gruppo ∞^1 G_1 di trasformazioni conformi, sottogruppo di G_2. Per determinare le traiettorie di un tale gruppo ∞^1, cominciamo dall'osservare che, come risulta immediatamente dalle (2), o dalle (3), il gruppo G_2 trasforma in sè ciascuno dei *tori circolari* del fascio

$$x^2 + y^2 + r^2 - 1 - c\sqrt{x^2 + y^2} = 0, \tag{4}$$

i quali, notiamo incidentalmente, sono tutti *propri*, cioè tali che i cerchi che li generano per rotazione non sono intersecati dall'asse.

Ora si osservi che G_1, come ogni gruppo conforme, trasforma in sè stesso l'insieme delle sfere (e dei piani) e quindi anche l'insieme delle loro mutue intersezioni, cioè l'insieme dei cerchi (e delle rette). Perciò G_1, che trasforma in sè ogni toro del fascio (4), scambierà fra di loro i cerchi dei due fasci (meridiani e paralleli) che si trovano in ciascun toro: anzi, data la continuità del gruppo, G_1 trasformerà i paralleli del toro fra di loro e i meridiani pur essi fra di loro. Se allora consideriamo sopra ciascun toro il sistema doppio, costituito dai due fasci dei paralleli e delle traiettorie (il primo invariante e il secondo di curve invarianti) e ricordiamo che ogni gruppo conforme conserva gli angoli, concludiamo che *le traiettorie di* G_1 *sono traiettorie isogonali ai paralleli* (e quindi ai meridiani) *dei tori del fascio invariante* (4), *cioè lossodromiche di codesti tori.* Ogni superficie che ammetta il gruppo G_1 si otterrà, dunque, considerando la semplice infinità di codeste lossodromiche toroidali, che passano pei punti di una curva arbitraria, la quale non sia una traiettoria di G_1

Per avere le equazioni di queste lossodromiche, osserviamo che le equazioni finite del gruppo G_1 generato dalla trasformazione infinitesima [2]

$$2c(xq - yp) + 2zxp + 2zyq + (z^2 - x^2 - y^2 + 1)\,r$$

(1) *Beiträge zur Flächentheorie*, VI (Leipziger Berichte, 1898, pag. 12).

(2) Dando alla costante (reale) c tutti i possibili valori, otteniamo tutti i sottogruppi ∞^1 di G_2, eccettuato il gruppo di rotazioni $yp - xq$, che rientra nei gruppi ∞^1 di similitudini, di cui abbiamo già tenuto conto.

si ottengono dalle (3) ponendovi $t_1 = ct_2 = ct$: se nello stesso tempo dalle coordinate cartesiane passiamo ad un sistema di coordinate cilindriche, in cui l'asse dei cilindri coordinati è il primitivo asse delle z, otteniamo, indicando con ϱ e φ il vettore e l'angolo polare nel piano $z = 0$,

$$\varrho' = \frac{2\varrho}{1 + \cos t - 2z \operatorname{sen} t + (1 - \cos t)(z^2 + \varrho^2)},$$

$$\varphi' = \varphi + ct,$$

$$z' = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} t - \frac{2(z - \operatorname{cotg} \frac{1}{2} t)}{1 + \cos t - 2z \operatorname{sen} t + (1 - \cos t)(z^2 + \varrho^2)}.$$

Gli invarianti di questo gruppo sono:

$$\sigma_1 = \frac{\varrho}{\varrho^2 + z^2 + 1}, \quad \sigma_2 = \varphi - c \operatorname{arctg} \frac{\varrho^2 + z^2 - 1}{2z},$$

onde risulta, se si sceglie come superficie iniziale la sfera di centro nell'origine e raggio uguale all'unità, che le equazioni delle traiettorie di G_1 [*lossodromiche* dei tori (4)] sono:

$$(5) \qquad \begin{cases} \varrho = \dfrac{\cos \psi_0}{1 - \operatorname{sen} \psi_0 \operatorname{sen} \chi}, \\[2ex] \varphi = \theta_0 + a\chi, \\[2ex] z = \dfrac{\operatorname{sen} \psi_0 \cos \chi}{1 - \operatorname{sen} \psi_0 \operatorname{sen} \chi}, \end{cases}$$

dove ψ_0 è la latitudine e θ_0 è la longitudine (rispetto ai piani diametrali $z = 0$, $y = 0$ ordinatamente) del punto, in cui la traiettoria interseca la sfera iniziale, e χ varia lungo ogni singola traiettoria.

Le equazioni parametriche delle superficie invarianti rispetto a G_1 si otterranno dalle (5) ponendovi ψ_0, θ_0, χ uguali a tre funzioni arbitrarie di due parametri u, v; e l'equazione cartesiana sarà data, se $\Omega(\sigma_1, \sigma_2)$ è una funzione arbitraria dei suoi argomenti σ_1 e σ_2, da

$$\Omega\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - c \operatorname{arctg} \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{2z}\right) = 0.$$

Abbiamo così il

TEOREMA. *Ogni superficie, che ammetta un gruppo ad un parametro di trasformazioni conformi, è trasformabile mediante una trasformazione conforme o in una superficie che ammette un gruppo di similitudini o in una superficie*

$$\Omega\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - c \operatorname{arctg} \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{2z}\right) = 0.$$

5. Riserbando per altra occasione lo studio geometrico di codeste ultime superficie, passiamo ad occuparci delle superficie che ammettono ∞^2 trasformazioni conformi in sè.

Codeste superficie sono trasformabili mediante una trasformazione conforme o in superficie che ammettono un gruppo a due parametri di similitudini, o in superficie invarianti rispetto al gruppo G_2 (n. 2).

Le superficie, che ammettono un gruppo ∞^2 di similitudini, sono state implicitamente determinate dall'Enriques (1).

Partendo dalla tabella in cui l'Enriques ha enumerato i gruppi di ∞^2 di omografie spaziali, si trova che i gruppi ∞^2 di similitudini sono i tre seguenti:

$$p\,,\, xp + yq + zr$$
$$p\,,\, zq - yr$$
$$zq - yr\,,\, xp + yq + zr\,;$$

onde risulta immediatamente che le superficie che ammettono un gruppo ∞^2 di similitudini sono i *piani*, e i *cilindri* e *coni di rotazione*.

Si verifica poi direttamente che il piano ammette un gruppo conforme ∞^6, il quale, se il piano invariante è il piano $z=0$, è il gruppo

$$p\,,\, q\,,\, yp - xq\,,\ xp + yq + zr$$
$$(x^2 - y^2 - z^2)\,p + 2\,xyq + 2\,xzr\,,\ 2\,yxp + (y^2 - z^2 - x^2),\, q + 2\,yzr\,,$$

e che il cono e il cilindro di rotazione non ammettono più di ∞^2 trasformazioni conformi (2).

Quanto poi alle superficie che ammettono un gruppo ∞^2 conforme, non equivalente a un gruppo di similitudini, esse sono trasformabili mediante una trasformazione conforme in superficie invarianti rispetto al G_2, cioè in *tori circolari* (propri), i quali, come si verifica direttamente, non ammettono altre trasformazioni conformi fuori di codesto gruppo.

6. Ci rimane a vedere se esistano superficie, le quali ammettano più di ∞^2 trasformazioni conformi in sè stesse. Tale è, come già sappiamo, il piano e quindi la sfera (3), trasformata del piano mediante una inversione (e una traslazione).

(1) *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse* (Atti del R. Ist. Ven. di sc. lett. ed arti, t. IV, s. VII, 1892-93, pag. 1590). Notiamo che la restrizione là imposta nel considerare gruppi di punti uniti distinti, si può qui considerare come soddisfatta.

(2) Qui parliamo di superficie *reali* e quindi escludiamo il *cono immaginario ciclico* delle *rette minime* passanti per un punto, il quale ammette notoriamente il gruppo conforme totale.

(3) Il gruppo ammesso dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ è generato dalle trasformazioni infinitesime:

$$zq - yr\,,\, xr - zp\,,\, yp - xq$$
$$(x^2 - y^2 - z^2 - a^2)\,p + 2xyq + 2xzr,\ 2yxp + (y^2 - z^2 - x^2 - a^2)\,q + 2yzr,$$
$$2zxp + 2zxq + (z^2 - x^2 - y^2 - a^2)\,r\,.$$

Esclusi allora il piano e la sfera, supponiamo che esista una superficie S la quale ammetta un gruppo conforme ∞^n $(n > 2)$: S conterrà un sistema ∞^1 di indice 2 di linee di curvatura, le quali, per una loro ben nota proprietà, saranno trasformate le une nelle altre dal gruppo considerato. Tenendo ferma una di codeste linee si ottiene un gruppo ∞^{n-1} che trasforma in sè la S, e tenendo fermo un punto generico si ottiene un gruppo ∞^{n-2}. Così, se $n > 2$, si riesce sempre a costruire un gruppo conforme ∞^2 trasformante in sè la S, la quale deve perciò essere trasformabile in un cilindro o in un cono di rotazione, oppure in un toro circolare. Ma ciascuna di codeste superficie non ammette più di ∞^2 trasformazioni conformi; onde concludiamo che è $n = 2$ ed enunciamo il

TEOREMA. *Le superficie, che ammettono più di* ∞^1 *trasformazioni conformi in sè sono o piani o sfere, e in tal caso il gruppo ha sei parametri, o sono trasformabili, mediante una trasformazione conforme, in un cilindro o in un cono di rotazione oppure in un toro circolare, e in tal caso il gruppo conforme è a due parametri.*

Fisica. — *Sulla doppia rifrazione circolare e la polarizzazione rotatoria.* Nota del dott. O. M. CORBINO, presentata dal socio PATERNÒ.

1. La geniale ipotesi di Fresnel che attribuiva la polarizzazione rotatoria allo sdoppiamento della vibrazione rettilinea primitiva in due vibrazioni circolari inverse, dotate di velocità di propagazione differente, ha dato luogo a delle controversie nell'ultimo ventennio, provocate da un lavoro del Gouy [1]. Questi dava un'interpretazione differente della famosa esperienza del triprisma eseguita dal Fresnel per dimostrare che quell' ipotesi non è una semplice finzione analitica, ma corrisponde alla realtà fisica.

Il Fresnel aveva addotto ancora altre prove, e all'esperienza del triprisma aveva aggiunto la spiegazione del triplo sistema di frange ottenuto da Arago addossando alle due fenditure di Young una lamina di quarzo perpendicolare all'asse.

Il Gouy fece vedere che la doppia rifrazione circolare prodotta dal triprisma può interpretarsi come un semplice effetto di diffrazione; infatti partendo dal vero risultato sperimentale che nei diversi punti di un'onda piana che traversa un prisma di quarzo la vibrazione subisce rotazioni diverse, egli dedusse con i procedimenti ordinarî seguiti nei problemi di diffrazione che una tale onda deve necessariamente produrre due imagini della sorgente polarizzate circolarmente in senso inverso. Convalidò in seguito questa dimo-

(1) C. R., t. 90, pag. 992 e 1121.