ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° dicembre 1901.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Su alcuni problemi di equilibrio elastico.* Nota I del prof. ORAZIO TEDONE, presentata dal Socio VOLTERRA.

1. In questa Nota e nell'altra, sullo stesso argomento, che presento all'Accademia, mi propongo di dar notizia di una parte di alcune mie ricerche sulle equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo omogeneo ed isotropo.

Supposto introdotto un sistema di assi cartesiani ortogonali che chiameremo, indifferentemente, (x, y, z), ovvero (ξ, η, ζ), dinotiamo con S la porzione di spazio limitata dal semipiano $\xi = 0$ in cui la ζ è positiva e che chiameremo σ_1, e dal semipiano $\zeta = 0$ in cui è positiva la ξ e che chiameremo σ_2. Ogni punto di S viene, quindi, ad essere caratterizzato dall'avere le coordinate ξ e ζ positive.

Vogliamo, dapprima, risolvere il problema della determinazione della deformazione elastica di un mezzo omogeneo ed isotropo, che occupa lo spazio S quando su σ_1 e σ_2 sieno dati i valori degli spostamenti.

Siano perciò, (x, y, z) le coordinate di un punto qualunque A, fisso in S, e indichiamo con A_1, A_2, A_3 i punti $(-x, y, z)$, $(-x, y, -z)$, $(x, y, -z)$ i quali cadono, evidentemente, fuori di S, e con r, r_1, r_2, r_3 le distanze rispettive di ciascuno di questi punti, da un punto (ξ, η, ζ) variabile in S. Avremo allora:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}, \qquad r_1 = \sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$
$$r_2 = \sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}, \qquad r_3 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}.$$

Se (ξ, η, ζ) cade in un punto di σ_1 è: $r = r_1$, $r_2 = r_3$; se cade in un punto di σ_2 è: $r = r_3$, $r_1 = r_2$.

Ciò posto, notiamo che il valore di una funzione φ la quale sia armonica in S ed assume valori fissati su σ_1 e σ_2, nel punto A, è dato dalla formola

$$(1)\qquad 2\pi\varphi = x\int_{\sigma_1}\varphi\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_3^3}\right)d\sigma_1 + z\int_{\sigma_2}\varphi\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)d\sigma_2$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\varphi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 - \frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\varphi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2\,;$$

mentre il valore di una funzione ψ la quale in S soddisfi all' equazione $\Delta^2\Delta^2\psi = 0$ ed è tale che tanto ψ e $\Delta^2\psi$ assumano valori fissati su σ_1 e σ_2, nello stesso punto A, è dato dalla formola

$$(2)\qquad -2\pi\psi = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 + \frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2$$

$$+\frac{x}{2}\int_{\sigma_1}\Delta^2\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 + \frac{z}{2}\int_{\sigma_2}\Delta^2\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_3$$

nelle cui formole ξ, η, ζ sono le variabili d' integrazione.

2. Sieno ora:

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta^2 u = -\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{\partial\theta}{\partial\xi}, \\ \Delta^2 v = -\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{\partial\theta}{\partial\eta}, \qquad \theta = \dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\partial v}{\partial\eta}+\dfrac{\partial w}{\partial\zeta} \\ \Delta^2 w = -\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{\partial\theta}{\partial\zeta}, \end{cases}$$

le equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo omogeneo ed isotropo da integrarsi nello spazio S in modo che u, v, w assumano su σ_1 e σ_2 valori fissati. Con λ e μ indichiamo le due costanti di Lamé e, ricordiamo, che $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, onde, anche: $\lambda + \mu > 0$, In quanto ai valori di u, v, w su σ_1 e σ_2, ammetteremo che u, v, w, su σ_2, abbiano le derivate rispetto ad η e ζ almeno fino al second' ordine finite ed integrabili e che su σ_2 abbiano le derivate rispetto a ξ e η soddisfacenti alle stesse condizioni, ed ammetteremo, inoltre, che u, v, w all' infinito, tanto su σ_1 che su σ_2, si annullino almeno del prim' ordine.

È chiaro, poi, che possiamo limitarci a considerare soltanto il caso in cui u, v, w sieno differenti da zero soltanto su σ_1, senza restringere, perciò, la generalità delle nostre conclusioni. In questa ipotesi, tenendo conto che $\Delta^2\theta = 0$, a causa delle (2), possiamo scrivere:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
2\pi u &= -\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1} u\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 \\
&\quad + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2, \\
2\pi v &= -\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1} v\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 \\
&\quad + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2, \\
2\pi w &= -\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1} w\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 \\
&\quad + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2 .
\end{aligned}
\right.
$$

E ci proponiamo, dapprima, di trasformare queste formole opportunamente.

Perciò notiamo che, qualunque sia θ su σ_1 e σ_2, purchè soddisfi a condizioni generali derivanti da quelle imposte, sopra, ad u, v, w su σ_1 e σ_2, valgono sempre le formole:

$$
\begin{aligned}
&(a) && \int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 = \frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma, \\
&(a') && \int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2 = \frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2, \\
&(b) && \int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 = \frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 + 2\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_1}\frac{\theta}{r_3}\,d\sigma_1, \\
&(b') && \int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_1 = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2 + 2\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma 2}\frac{\theta}{r_1}\,d\sigma_2,
\end{aligned}
$$

le quali si ricavano facilmente con integrazioni per parti. Se poi θ è anche, come nel caso nostro, una funzione armonica in S, applicando il teorema di Green in S, alle due funzioni armoniche θ e $\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}$, si trova

$$
-4\pi\theta = \int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 + 2\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\theta\frac{d\sigma_2}{r}
$$

e questa formola, paragonata con l'altra

$$
-2\pi\theta = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1 + \frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2
$$

ci dà subito

$$(c)\qquad \int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1=\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1-2\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\theta\frac{d\sigma_2}{r_1}.$$

Allo stesso modo si stabilirà l'altra formola

$$(c')\qquad \int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2=\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2-2\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\theta\frac{d\sigma_1}{r_3}.$$

Facendo uso di questi risultati, le (4) si trasformano, facilmente, nelle altre formole:

$$(5)\quad\begin{cases}2\pi u=-\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_{\sigma_1}u\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1+\\ \qquad+\dfrac{\lambda+\mu}{2\mu}z\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_{\sigma_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\frac{\xi\theta}{r_1}d\sigma_2,\\ 2\pi v=-\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_{\sigma_1}v\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1+\\ \qquad+\dfrac{\lambda+\mu}{2\mu}z\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_{\sigma_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2,\\ 2\pi w=-\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_{\sigma_1}w\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_1+\\ \qquad+\dfrac{\lambda+\mu}{2\mu}z\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_{\sigma_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\sigma_2+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\frac{\zeta\theta}{r_3}d\sigma_1.\end{cases}$$

Queste formole risolvono completamente il nostro problema se riusciamo a determinare i valori di θ su σ_1 e σ_2 in funzione dei valori dati di u, v, w.

Per raggiungere questo scopo, deriviamo successivamente le (5) rispetto ad x, y, z e sommiamo. Tenendo presente la (1), si trova, facilmente

$$(6)\qquad \frac{\pi}{\mu}(\lambda+3\mu)\,\theta=-\int_{\sigma_1}\left\{u\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)+v\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)+\right.$$
$$\left.+w\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)\right\}d\sigma_1+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left[\int_{\sigma_1}\frac{\zeta\theta}{r_3}d\sigma_1+\int_{\sigma_2}\frac{\xi\theta}{r_1}d\sigma_2\right].$$

Prima di procedere oltre, osserviamo che l'integrale

$$\int_{\sigma_1}\left\{u\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)+v\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)+w\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)\right\}d\sigma_1$$

che, per brevità, possiamo indicare con T, è una funzione finita e continua, insieme a tutte le sue derivate, in S, tranne nei punti di σ_1 nei quali l'integrale stesso è improprio. Possiamo, però, facilmente, dimostrare che T tende ad un limite determinato e finito quando ci avviciniamo, restando sempre in S, ad un punto qualunque di σ_1, fatta eccezione, al più, per i punti dell' asse y. Abbiamo, infatti:

$$\mathrm{T} = -\int_{\sigma_1} u \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right) d\sigma_1 - \int_{\sigma_1} u \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right) d\sigma_1 +$$
$$+\int_{\sigma_1} v \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right) d\sigma_1 + \int_{\sigma_1} w \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right) d\sigma_1$$
$$= -\int_{\sigma_1} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right) d\sigma_1 - \int_{\sigma_1} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right) d\sigma_1 - 2\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{r}\, d\eta +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1} \frac{\partial v}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right) d\sigma_1 + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1} \frac{\partial w}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right) d\sigma_1 +$$
$$+2\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1} \frac{\partial w}{\partial \zeta}\frac{d\sigma_1}{r_3} - 2\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w}{r}\, d\eta .$$

Questo risultato si ottiene, facilmente, con delle integrazioni per parti, tenendo presenti le (a) e (b) e nella ipotesi che gli assi (x, y, z) sieno orientati nel modo solito, in modo, cioè, che se una persona ha i piedi sul piano x, y e la testa secondo la direzione positiva dell' asse z, quando guarda verso la direzione positiva dell' asse y, ha la direzione positiva dell' asse x alla sua sinistra. Ora di tutti i termini che compaiono nella nuova espressione di T soltanto

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{r}\, d\eta , \quad \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w}{r}\, d\eta \text{ (1)}$$

possono diventare infiniti nei punti dell' asse y. Però noi supporremo, a causa della continuità, che il limite di u, v, w, quando ci avviciniamo ad un punto qualunque dell' asse y, restando su σ_1, sia zero in modo che i due integrali precedenti saranno identicamente nulli. Questo valore limite di T è, inoltre, una funzione continua dei punti di σ_1.

Indicando con $\mathrm{T}'(y, z)$ il limite di T per $x = 0$ e con $\mathrm{T}''(x, y)$ il valore di T per $z = 0$, dalla (6) risultano subito le due equazioni seguenti:

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi}{\mu}(\lambda+3\mu)\,\theta(0, y, z) = -\mathrm{T}'(y, z) + 3\,\frac{\lambda+\mu}{\mu}\, z \int_{\sigma_2} \frac{\xi^2\,\theta(\xi, \eta, 0)\, d\sigma_2}{[x^2+(y-\eta)^2+\xi^2]^{\frac{5}{2}}}, \\ &\frac{\pi}{\mu}(\lambda+3\mu)\,\theta(x, y, 0) = -\mathrm{T}''(x, y) + 3\,\frac{\lambda+\mu}{\mu}\, x \int_{\sigma_1} \frac{\zeta^2\,\theta(0, \eta, \zeta)\, d\sigma_1}{[x^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \right.$$

(1) Nel caso in cui i valori di u, v, w su σ_2 sieno diversi da zero, ma passando attraverso l' asse y, da σ_1 a σ_2, sia conservata la continuità, i due integrali in quistione si distruggono con quelli che proverrebbero trasformando, analogamente a quello che abbiamo fatto per l' integrale T esteso a σ_1, l' integrale analogo a T, esteso a σ_2, e la dimostrazione del nostro assunto non ha bisogno di altre osservazioni.

ed il nostro problema è ridotto a determinare le due funzioni $\theta(0\,,y\,,z)$, $\theta(x\,,y\,,0)$ da queste due equazioni.

3. Cominciamo col dimostrare che, se $u\,,v\,,w$ si annullano, oltre che su σ_2, anche su σ_1, e quindi sia $T'(y\,,z) = T''(x\,,y) = 0$, le equazioni (7) non ammettono altra soluzione che $\theta(0\,,y\,,z) = \theta(x\,,y\,,0) = 0$. E difatti, nella nostra ipotesi, supponendo che $\theta(0\,,y\,,z)$, $\theta(x\,,y\,,0)$ non sieno identicamente nulle, chiamando A il massimo fra i massimi moduli di $\theta(0\,,y\,,z)$ e di $\theta(x\,,y\,,0)$, dalla prima delle (7) si avrebbe:

$$|\theta(0\,,y\,,z)| \leq \frac{3}{\pi}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,\mathrm{A}z\int_{\sigma_2}\frac{\xi^2\,d\sigma_2}{[\xi^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}$$

qualunque sia il punto $(y\,,z)$ su σ_1. E questa disuguaglianza, osservando che

$$3z\int_{\sigma_2}\frac{\xi^2\,d\sigma_2}{[\xi^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{5}{2}}} = z\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_0^{+\infty}\frac{d\xi}{[\xi^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} = \pi\,,$$

si può scrivere

$$|\theta(0\,,y\,,z)| \leq \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,\mathrm{A}.$$

Allora, dalla seconda delle (7), risulterebbe

$$|\theta(x\,,y\,,0)| \leq \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)^2\mathrm{A}$$

e quindi ancora dalla prima

$$|\theta(0\,,y\,,z)| \leq \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)^3\mathrm{A}$$

e dalla seconda

$$|\theta(x\,,y\,,0)| \leq \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)^4\mathrm{A}\,.$$

Ripetendo un numero sufficiente di volte questo ragionamento, risulta che tanto il modulo di $\theta(x\,,y\,,0)$ che il modulo di $\theta(0\,,y\,,z)$ sono più piccoli di qualunque numero, giacchè, $0 < \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} < 1$. Ciò mostra, appunto, che $\theta(0\,,y\,,z)$ e $\theta(x\,,y\,,0)$ sono identicamente nulle.

Da questo teorema risulta anche, immediatamente, che ad un sistema di valori di $u\,,v\,,w$ dati su σ_1, non può corrispondere che un solo sistema di funzioni $\theta(0\,,y\,,z)$, $\theta(x\,,y\,,0)$, soddisfacenti alle (7). Se, difatti, vi corrispondessero i due sistemi distinti: $\theta(0\,,y\,,z)$, $\theta'(0\,,y\,,z)$; $\theta(x\,,y\,,0)$, $\theta'(x,y\,,0)$ le due funzioni, non identicamente nulle: $\theta(0,y,z) - \theta'(0\,,y,z)$,

$\theta(x, y, 0) - \theta'(x, y, 0)$ corrisponderebbero a spostamenti u, v, w nulli anche su σ_1, il che è impossibile.

4. Determineremo ora le due funzioni $\theta(0, y, z)$, $\theta(x, y, 0)$ soddisfacenti alle (7), per mezzo di approssimazioni successive. Partendo dai valori $\theta(0, y, z) = \theta(x, y, 0) = 0$, poniamo successivamente:

$$\theta_1(0, y, z) = -\frac{\mu}{\pi} \frac{T'(y, z)}{\lambda + 3\mu},$$

$$\theta_2(0, y, z) = -\frac{\mu}{\pi} \frac{T'(y, z)}{\lambda + 3\mu} + \frac{3}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} z \int_{\sigma_2} \frac{\xi^2 \theta_1(\xi, \eta, 0)\, d\sigma_2}{[\xi^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}},$$

$$\theta_3(0, y, z) = -\frac{\mu}{\pi} \frac{T'(y, z)}{\lambda + 3\mu} + \frac{3}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} z \int_{\sigma_2} \frac{\xi^2 \theta_2(\xi, \eta, 0)\, d\sigma_2}{[\xi^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}},$$

. . . .

$$\theta_n(0, y, z) = -\frac{\mu}{\pi} \frac{T'(y, z)}{\lambda + 3\mu} + \frac{3}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} z \int_{\sigma_2} \frac{\xi^2 \theta_{n-1}(\xi, \eta, 0)\, d\sigma_2}{[\xi^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}},$$

. . . .

$$\theta_1(x, y, 0) = -\frac{\mu}{\pi} \frac{T''(x, y)}{\lambda + 3\mu},$$

$$\theta_2(x, y, 0) = -\frac{\mu}{\pi} \frac{T''(x, y)}{\lambda + 3\mu} + \frac{3}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x \int_{\sigma_1} \frac{\zeta^2 \theta_1(0, \eta, \zeta)\, d\sigma_1}{[x^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2]^{\frac{5}{2}}},$$

$$\theta_3(x, y, 0) = -\frac{\mu}{\pi} \frac{T''(x, y)}{\lambda + 3\mu} + \frac{3}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x \int_{\sigma_1} \frac{\zeta^2 \theta_2(0, \eta, \zeta)\, d\sigma_1}{[x^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2]^{\frac{5}{2}}},$$

. . . .

$$\theta_n(x, y, 0) = -\frac{\mu}{\pi} \frac{T''(x, y)}{\lambda + 3\mu} + \frac{3}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x \int_{\sigma_1} \frac{\zeta^2 \theta_{n-1}(0, \eta, \zeta)\, \partial\sigma_1}{[x^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2]^{\frac{5}{2}}},$$

. . . .

Vogliamo dimostrare che al crescere di n all' infinito $\theta_n(0, y, z)$, $\theta_n(x, y, 0)$ tendono a limiti determinati $\theta(0, y, z)$, $\theta(x, y, 0)$ soddisfacenti alle equazioni (7). Chiamiamo, perciò, A il massimo dei massimi valori assoluti raggiunti da $\theta_1(0, y, z)$ e $\theta_1(x, y, 0)$. Dalle formole:

$$\theta_2(0, y, z) - \theta_1(0, y, z) = \frac{3}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} z \int_{\sigma_2} \frac{\xi^2\, \theta_1(\xi, \eta, 0)\, d\sigma_2}{[\xi^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}}$$

$$\theta_2(x, y, 0) - \theta_1((x, y, 0) = \frac{3}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x \int_{\sigma_1} \frac{\zeta^2\, \theta_1(0, \eta, \zeta)\, d\sigma_1}{[x^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2]^{\frac{5}{2}}}$$

si deduce, ragionando come sopra:

$$|\theta_2(0, y, z) - \theta_1(0, y, z)| \leq \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \mathrm{A}, \quad |\theta_2(x, y, 0) - \theta_1(x, y, 0)| \leq \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \mathrm{A}.$$

Similmente, dalle formole:

$$\theta_3(0\,,y\,,z)-\theta_2(0\,,y\,,z)=\frac{3}{\pi}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,z\int_{\sigma_2}\frac{\xi^2[\theta_2(\xi\,,\eta\,,0)-\theta_1(\zeta\,,\eta\,,0)]\,d\sigma_2}{[\xi^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}\,,$$

$$\theta_3(0\,,y\,,z)-\theta_2(0\,,y\,,z)=\frac{3}{\pi}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,x\int_{\sigma_1}\frac{\zeta^2[\theta_2(0\,,\eta\,,\zeta)-\theta_1(0\,,\eta\,,\zeta)]\,d\sigma_1}{[x^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{\frac{5}{2}}}$$

si deduce:

$$|\theta_3(0,y,z)-\theta_2(0,y,z)|\leq\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)^2\mathrm{A}\,,\qquad|\theta_3(x,y,0)-\theta_2(x,y,0)|\leq\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)^2\mathrm{A}.$$

E, più in generale, dalle formole:

$$\theta_n(0,y,z)-\theta_{n-1}(0,y,z)=\frac{3}{\pi}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,z\int_{\sigma_2}\frac{\xi^2[\theta_{n-1}(\xi\,,\eta\,,0)-\theta_{n-2}(\xi\,,\eta\,,0)]\,d\sigma_2}{[\xi^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}\,,$$

$$\theta_n(x,y,0)-\theta_{n-1}(x,y,0)=\frac{3}{\pi}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,x\int_{\sigma_1}\frac{\zeta^2[\theta_{n-1}(0\,,\eta\,,\zeta)-\theta_{n-2}(0\,,\eta\,,\zeta)]\,d\sigma_1}{[x^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{\frac{5}{2}}}$$

tenendo conto dei risultati precedenti, si deduce:

$$|\theta_n(0,y,z)-\theta_{n-1}(0,y,z)|\leq\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)^{n-1}\mathrm{A}\,,\ |\theta_n(0,y,z)-\theta_{n-1}(0,y,z)|\leq\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)^{n-1}\mathrm{A}.$$

Ora

$$|\theta_n(0\,,y\,,z)-\theta_{n+k}(0\,,y\,,z)|\leq|\theta_{n+1}(0\,,y\,,z)-\theta_n(0\,,y\,,z)|+$$
$$+|\theta_{n+2}(0\,,y\,,z)-\theta_{n+1}(0\,,y\,,z)|+\cdots+|\theta_{n+k}(0\,,y\,,z)-\theta_{n+k-1}(0\,,y\,,z)|$$

quindi

$$|\theta_n(0,y,z)-\theta_{n+k}(0,y,z)|<\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)^n\mathrm{A}\left[1+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}+\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)^2+\cdots\right]=$$
$$=\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\right)^n\mathrm{A}\,\frac{\lambda+3\mu}{2\mu}.$$

Questo risultato mostra, appunto, che al crescere di n all' infinito $\theta_n(0\,,y\,,z)$ tende ad un limite determinato e finito $\theta(0\,,y\,,z)$, che può considerarsi come somma della serie convergente assolutamente ed in egual grado

$$\theta_1(0\,,y\,,z)+[\theta_2(0\,,y\,,z)-\theta_1(0\,,y\,,z)]+[\theta_3(0\,,y\,,z)-\theta_2(0\,,y\,,z)]+\cdots$$

onde può anche scriversi

$$\theta(0\,,y\,,z)=-\frac{\mu}{\pi}\,\frac{\mathrm{T}'(y\,,z)}{\lambda+3\mu}+\frac{3}{\pi}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,z\int_{\sigma_2}\Big\{\theta_1(\xi\,,\eta\,,0)+$$
$$+[\theta_2(\zeta,\eta,0)-\theta_1(\xi,\eta,0)]+[\theta_3(\xi,\eta,0)-\theta_2(\xi,\eta,0)]+\cdots\Big\}\frac{\xi^2\,d\sigma_2}{[\xi^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}$$

Questo risultato e l' altro analogo relativo a $\theta(x\,,y\,,0)$, dimostrano completamente quello che ci eravamo proposti.