ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Adunanza delle due Classi del 15 dicembre 1901.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una proprietà generale delle linee di curvatura di una superficie.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Da un noto teorema di Ribaucour, relativo ai sistemi ciclici, potrebbe facilmente dedursi la proprietà delle linee di curvatura di una superficie qualunque, di cui tratto nelle linee seguenti. Ma poichè la proposizione in vista esprime una proprietà semplice ed affatto generale delle linee di curvatura, e non sembra fino ad ora esplicitamente osservata, stimo non inutile darne, insieme all' enunciato, una dimostrazione diretta.

La proposizione in discorso si enuncia:

A) *Sopra qualsiasi superficie, il luogo dei circoli osculatori delle linee di curvatura di un sistema, lungo una linea di curvatura del secondo sistema, ammette questi circoli per linee di curvatura.*

Per dimostrarla geometricamente, consideriamo sulla superficie data S le linee di curvatura (u) del primo sistema e la prima falda S_1 della evoluta di S, che è il luogo degli spigoli di regresso delle sviluppabili generate dalle normali alla S lungo ogni singola linea (u). I piani normali di questa linea (u) toccano, nei corrispondenti centri M_1 di prima curvatura, la falda S_1 dell' evoluta, e contengono gli assi dei circoli osculatori di (u), il luogo di questi assi essendo appunto la sviluppabile polare della (u), sulla quale è tracciata la linea (u) di S_1. Gli assi dei circoli osculatori della linea (u) sopra S toccano adunque la S_1 nei corrispondenti centri M_1 di prima curvatura; e, poichè formano una sviluppabile, hanno in ogni punto M_1 di S_1

la direzione coniugata a quella della relativa linea (u). Dunque: *gli assi dei circoli osculatori della linea di curvatura (u) del primo sistema sopra S sono le tangenti a quelle linee (v) della prima falda S_1 della evoluta, che corrispondono alle linee di curvatura del secondo sistema.*

Ciò posto, si considerino le sfere (principali) che toccano la superficie S, avendo il centro nel rispettivo centro M_1 di prima curvatura, e contengono per conseguenza i circoli osculatori delle linee (u) sopra S. Se spostiamo il centro M_1 lungo una linea (v) di S_1, avremo una semplice infinità di queste sfere, il cui inviluppo sarà una superficie a linee di curvatura circolari; dimostreremo il teorema A) provando che questi circoli di curvatura sono precisamente i circoli osculatori delle linee (u) di S. E infatti le sfere principali toccando la superficie S, il circolo caratteristico di una tale sfera Σ (cioè la sua intersezione colla successiva nella serie (v)) passerà pel punto M di S e giacerà nel piano condotto per M normalmente alla direzione dello spostamento del centro; questa è segnata dall' asse del circolo osculatore della (u) in M, e ciò dimostra la nostra asserzione.

2. Possiamo confermare con un breve calcolo le proprietà sopra stabilite geometricamente.

Riferita la superficie S alle sue linee di curvatura u, v, e ritenendo le consuete notazioni [1], poniamo

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v};$$

avremo le seguenti formole fondamentali:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2 - \dfrac{\sqrt{E}}{r_2}X, & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1, & \dfrac{\partial X}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{r_2}X_1 \\[2ex] \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2, & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1 - \dfrac{\sqrt{G}}{r_1}X, & \dfrac{\partial X}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{r_1}X_2, \end{cases}$$

La sfera principale avente il centro nel primo centro M_1 di curvatura, di coordinate

$$(3)\quad x_1 = x - r_1 X, \quad y_1 = y - r_1 Y, \quad z_1 = z - r_1 Z,$$

ha per equazione

$$(4)\quad (\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 + (\zeta - z_1)^2 = r_1^2,$$

indicando con ξ, η, ζ le coordinate correnti. Spostando il centro M_1 lungo una linea (v) sopra S_1, il circolo caratteristico della sfera (4) sulla superficie

[1] Vedi le mie *Lezioni di geometria differenziale*, cap. IX.

inviluppo si otterrà associando alla (4) l'equazione che ne risulta derivandola rispetto al parametro u, con che si ottiene a causa delle (2):

$$\Sigma(\xi - x)\left\{\sqrt{E}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)X_1 - \frac{\partial r_1}{\partial u}\right\} = 0.$$

Avendo riguardo alla formola di Codazzi

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = \frac{r_1}{\sqrt{G}}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

essa può scriversi anche:

$$\Sigma(\xi - x)\left\{\frac{\sqrt{G}}{r_1}X_1 - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}X\right\} = 0,$$

e combina, come dimostrano le (2), (3), colla equazione del piano osculatore alla prima linea di curvatura (u) della S:

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Ne risulta la conferma analitica del teorema A).

3. Si è visto sopra che i circoli osculatori delle linee di curvatura (u) del primo sistema lungo ciascuna linea di curvatura (v) del secondo, generano una superficie sulla quale essi sono linee di curvatura. Ancor più facilmente si vede che la stessa cosa avviene per il luogo dei circoli osculatori di una medesima linea (u); sussiste invero la proposizione generale seguente:

B) *La superficie luogo dei circoli osculatori di una curva qualunque dello spazio ammette questi circoli per linee di curvatura.*

La dimostrazione è immediata, ove si consideri che ogni circolo osculatore è l'intersezione della sfera osculatrice colla successiva, e per ciò la superficie considerata non è altro che l'inviluppo delle sfere osculatrici.

Così adunque, per qualsiasi superficie S, nella congruenza dei circoli osculatori delle linee di curvatura (u) di un sistema, sono contenute due serie ∞^1 di superficie aventi questi circoli per linee di curvatura; le prime si ottengono associando i circoli lungo le linee (u) stesse, quelle della seconda serie associandoli invece lungo le linee di curvatura (v) del secondo sistema. Risulta inoltre dalle considerazioni superiori, che le normali a queste superficie, lungo uno dei detti circoli, concorrono per la superficie (u)

della prima serie nel centro M_0 della sfera osculatrice in M alla linea di curvatura (u), e per quelle (v) del secondo sistema nel centro principale M_1 di curvatura relativo alla linea (u) stessa.

4. Da quanto precede sorge spontanea la domanda: *Quando accade che le due serie di superficie, a linee di curvature circolari, formate nel modo descritto coi circoli osculatori delle linee di curvatura di un sistema della data sugerficie* S, *si tagliano ortogonalmente lungo questi circoli?*

Pel teorema inverso di Dupin si può porre il problema sotto l'altra forma: *Per quali superficie* S *accade che i circoli osculatori delle linee di curvatura di un sistema ammettono una serie di superficie ortogonali?*

Per risolvere la questione proposta conviene esprimere che, in ogni punto M di una linea di curvatura (u), la sfera osculatrice della linea è normale alla superficie. Ora, il piano normale alla linea (u) avendo per equazione

$$(\xi - x) X_2 + (\eta - y) Y_2 + (\zeta - z) Z_2 = 0, \tag{5}$$

le coordinate ξ, η, ζ del centro della sfera osculatrice della linea (u) si calcoleranno associando alla (5) le due equazioni che se ne ottengono con una prima ed una seconda derivazione rispetto a v. A causa delle (3), si hanno così le due equazioni seguenti:

$$\Sigma(\xi - x) \left\{ \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 - \frac{\sqrt{G}}{r_1} X \right\} = \sqrt{G}$$

$$\Sigma(\xi - x) \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) X_1 - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\sqrt{G}}{r_1} \right) X \right\} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v}.$$

Ma, per le nostre ipotesi, deve essere

$$\Sigma(\xi - x) X = 0,$$

onde le due equazioni

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cdot \Sigma(\xi - x) X_1 = \sqrt{G}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) \cdot \Sigma(\xi - x) X_1 = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v}$$

debbono coincidere, ciò che si esprime colla relazione

$$\frac{\partial}{\partial v} \log \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{G}.$$

Integrando risulta

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = U, \tag{6}$$

indicando U una funzione arbitraria di u; inversamente quando sussiste la (6) ha luogo la proprietà richiesta. Il primo membro della (6) non è altro che la curvatura geodetica della linea (u); dunque ciascuna linea di curvatura (u) deve essere a curvatura geodetica costante. Ora, per un noto teorema dovuto al Brioschi, ogni linea di curvatura che sia a curvatura geodetica costante è tracciata sopra una sfera (o piano) che taglia ad angolo retto la superficie, ed inversamente.

Ne concludiamo adunque: *Le superficie per le quali la congruenza dei circoli osculatori delle linee di curvatura di un sistema ammette una serie di superficie ortogonali, sono tutte e sole quelle che hanno queste linee di curvatura sferiche, e tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie.*

È ben noto come si trovano tutte queste superficie (1). Basta prendere ad arbitrio una semplice infinità di sfere, e nella congruenza delle loro ∞^2 traiettorie ortogonali scegliere comunque una serie ∞^1 di queste traiettorie; il loro luogo costituisce la più generale superficie richiesta. Quanto al problema di trovare le traiettorie ortogonali di un sistema ∞^1 dato di sfere, esso riducesi ad un'equazione differenziale di Riccati e si risolve per quadrature, appena nota una di esse.

Meccanica. — *Di alcune nuove forme delle equazioni della Dinamica, applicabili ai sistemi anolonomi.* Nota del Corrispondente Gian Antonio Maggi.

Il concetto di formare le equazioni differenziali del movimento di un sistema vincolato di punti, valendosi dell'espressione delle velocità per funzioni lineari di parametri indipendenti, si ritrova nella *Mechanik* di Kirchhoff. Ivi, con questo principio, sono dedotte dal teorema di Hamilton le ultime equazioni del § 4 della Lezione 3ª, le quali sono applicate, nel § 2 della Lezione 4ª, alla formazione delle equazioni differenziali più generali del movimento di un solido libero, o avente un punto fisso.

Il sig. Volterra ha applicato lo stesso principio nella sua Nota *Sopra una classe di equazioni dinamiche,* pubblicata nel volume XXXIII (1898) degli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », per dedurre dall'equazione di d'Alembert e Lagrange, ridotta ad un'espressione di Beltrami (2), una forma delle equazioni del movimento di un sistema di punti i cui vincoli sono indipendenti dal tempo, ed espressi da equazioni ai diffe-

(1) Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes,* Chap. II.

(2) Beltrami, *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange,* Rendiconti del R. Istituto Lombardo, vol. XXVIII (1895).