ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

indicando U una funzione arbitraria di u; inversamente quando sussiste la (6) ha luogo la proprietà richiesta. Il primo membro della (6) non è altro che la curvatura geodetica della linea (u); dunque ciascuna linea di curvatura (u) deve essere a curvatura geodetica costante. Ora, per un noto teorema dovuto al Brioschi, ogni linea di curvatura che sia a curvatura geodetica costante è tracciata sopra una sfera (o piano) che taglia ad angolo retto la superficie, ed inversamente.

Ne concludiamo adunque: *Le superficie per le quali la congruenza dei circoli osculatori delle linee di curvatura di un sistema ammette una serie di superficie ortogonali, sono tutte e sole quelle che hanno queste linee di curvatura sferiche, e tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie.*

È ben noto come si trovano tutte queste superficie (1). Basta prendere ad arbitrio una semplice infinità di sfere, e nella congruenza delle loro ∞^2 traiettorie ortogonali scegliere comunque una serie ∞^1 di queste traiettorie; il loro luogo costituisce la più generale superficie richiesta. Quanto al problema di trovare le traiettorie ortogonali di un sistema ∞^1 dato di sfere, esso riducesi ad un'equazione differenziale di Riccati e si risolve per quadrature, appena nota una di esse.

Meccanica. — *Di alcune nuove forme delle equazioni della Dinamica, applicabili ai sistemi anolonomi.* Nota del Corrispondente Gian Antonio Maggi.

Il concetto di formare le equazioni differenziali del movimento di un sistema vincolato di punti, valendosi dell'espressione delle velocità per funzioni lineari di parametri indipendenti, si ritrova nella *Mechanik* di Kirchhoff. Ivi, con questo principio, sono dedotte dal teorema di Hamilton le ultime equazioni del § 4 della Lezione 3ª, le quali sono applicate, nel § 2 della Lezione 4ª, alla formazione delle equazioni differenziali più generali del movimento di un solido libero, o avente un punto fisso.

Il sig. Volterra ha applicato lo stesso principio nella sua Nota *Sopra una classe di equazioni dinamiche*, pubblicata nel volume XXXIII (1898) degli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », per dedurre dall'equazione di d'Alembert e Lagrange, ridotta ad un'espressione di Beltrami (2), una forma delle equazioni del movimento di un sistema di punti i cui vincoli sono indipendenti dal tempo, ed espressi da equazioni ai diffe-

(1) Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Chap. II.

(2) Beltrami, *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo, vol. XXVIII (1895).

renziali totali fra le coordinate, egualmente valida se queste formano o no un sistema integrabile, vale a dire se il sistema mobile è olonomo o anolonomo. Sono le equazioni differenziali (C), stabilite fra il tempo, le coordinate, e le *caratteristiche del moto*, in numero eguale a queste: così chiamando tanti parametri quanti sono i gradi di libertà del sistema, mediante i quali, in virtù dei vincoli, si esprimono per funzioni lineari omogenee le componenti della velocità d'ogni punto. E il sig. Volterra si propone particolarmente d'indagare il caso che dette equazioni siano sufficienti a determinare le caratteristiche in funzione del tempo.

Infine il sig. Appell, col medesimo principio delle caratteristiche, ha dedotto dall'equazione di d'Alembert e Lagrange una forma elegante di equazioni differenziali del movimento, applicabili, come le precedenti, a sistemi olonomi e anolonomi, come pure al caso di vincoli dipendenti dal tempo, nella sua Nota *Sur les mouvements de roulement — Équations analogues à celles de Lagrange*, inserita nel tomo CXXIX dei « Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences » di Parigi (1899), e nell'altra *Sur une forme générale des équations de la dynamique*, pubblicata nel tomo CXXI del « Giornale di Crelle » (1900) (1).

Mi permetto di mostrare, con questa breve Nota, come le equazioni del sig. Appell e quelle del sig. Volterra si deducano da una forma di equazioni della dinamica, che si trovano nel § 493 della mia *Meccanica* (2), dedotta, alla sua volta, assai speditamente dal teorema di Hamilton: le quali, per quanto apparisce, passarono inosservate, quantunque siano applicate, nel seguente §, a formare le equazioni del movimento di un solido, con un metodo che ci sembra presentare, in confronto di quello di Kirchhoff, il vantaggio di una maggiore prontezza.

Comincierò col rammentare la semplicissima deduzione delle equazioni in discorso. Partiamo dal teorema di Hamilton:

$$(1) \qquad \int_{t'}^{t''} (\delta T + \Pi)\, dt = 0,$$

dove, indicando $q_1, q_2, \dots q_n$ una specie qualsivoglia di coordinate, libere o no, del sistema mobile, si ha

$$(2) \qquad \delta T = \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right), \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \quad \Pi = \sum_1^n{}_i Q_i \, \delta q_i .$$

(1) V. anche Appell, *Les mouvements de roulement en Dynamique*, § 24 (Scientia 4°). Parigi, 1899.

(2) *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi*. Milano, 1896.

Siano i vincoli rappresentati da

$$(3) \qquad \sum_1^n{}_i \, \Phi_{i,j} \, dq_i = \mathrm{T}_j \, dt, \qquad (j = 1, 2, \ldots m)$$

con che le $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n$ riescono definite da

$$(4) \qquad \sum_1^n{}_i \, \Phi_{ij} \, \delta q_i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots m)$$

Queste ultime equazioni potranno sempre supporsi risolute rispetto ad $n - m$ delle $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n$, se occorre, opportunamente scelte, quindi tali da fornire

$$(5) \qquad \delta q_i = \sum_1^{n-m}{}_r \, \mathrm{E}_{ir} \, \varepsilon_r \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

dove le $\varepsilon_r, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n-m}$ sono altrettanti parametri arbitrarii.

Ora (1), conformemente a (2), può porsi notoriamente sotto la forma

$$\int_{t'}^{t''} dt \sum_1^n{}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} - \mathrm{Q}_i \right) \delta q_i = 0,$$

che fornisce immediatamente

$$\sum_1^n{}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} - \mathrm{Q}_i \right) \delta q_i = 0.$$

Nella quale relazione introducendo le (5), raccogliendo le singole ε_r, eguagliando a 0 il coefficiente di ciascuna, e ponendo

$$\sum_1^n{}_i \, \mathrm{Q}_i \, \mathrm{E}_{ir} = \mathrm{E}_r$$

con che, per (2),

$$(6) \qquad \Pi = \sum_1^{n-m}{}_r \, \mathrm{E}_r \, \varepsilon_r,$$

si ottiene

$$(7) \qquad \sum_1^n{}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} \right) \mathrm{E}_{ir} = \mathrm{E}_r. \qquad (r = 1, 2, \ldots n - m)$$

Queste sono le equazioni cercate, formanti colle (3) un sistema di n equazioni differenziali, dove t funge da variabile indipendente, e le $q_1, q_2, \dots q_n$ da incognite: valide per sistemi olonomi e anolonomi, e per vincoli indipendenti e dipendenti dal tempo.

Per porre queste equazioni sotto la forma del sig. Appell, basta osservare che da (3) si ricaverà, conformemente a (5),

$$\dot{q}_i = \mathrm{E}_i + \sum_1^{n-m}{}_r \, \mathrm{E}_{ir} \, e_r \,, \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

con che $e_1, e_2, \dots e_{n-m}$ rappresentano le caratteristiche del movimento del considerato sistema, per modo che

$$\mathrm{E}_{ir} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial e_r} = \frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \dot{e}_r} \tag{8}$$

Mentre, d'altra parte, posto, col sig. Appell,

$$\mathrm{S} = \tfrac{1}{2} \sum m \, (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) \,,$$

dove m e x, y, z rappresentano la massa e le coordinate del punto generico del sistema, e la somma è estesa a tutti i punti, si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \ddot{q}_i} \,. \tag{9}$$

Difatti

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \ddot{q}_i} = \sum m \left(\ddot{x} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \ddot{q}_i} + \ddot{y} \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \ddot{q}_i} + \ddot{z} \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \ddot{q}_i} \right).$$

Ma si ha

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i \,,$$

donde

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \ddot{q}_i}$$

e le analoghe. Quindi

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \ddot{q}_i} = \sum m \left(\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i} + \ddot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

E stando

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2} \sum m \, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{10}$$

anche

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \sum m\left(\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \dot{y}\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \dot{z}\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i};$$

poichè

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial t} + \sum_1^n{}_j \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial q_i} + \sum_1^n{}_j \frac{\partial^2 x}{\partial q_j \partial q_i}\cdot \dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i}.$$

Ciò posto, per (8) e (9), le (7) diventano

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i}\frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \dot{e}_r} = E_r \qquad (r = 1, 2, \dots n - m)$$

ossia

$$(7^{\text{bis}}) \qquad \frac{\partial S}{\partial \dot{e}_r} = E_r, \qquad (r = 1, 2, \dots n - m)$$

che sono le equazioni del sig. Appell, svincolate da ogni ipotesi speciale sulla scelta delle caratteristiche.

Le equazioni del sig. Volterra si ottengono, ponendo le (7), conformemente a (8), sotto la forma

$$\sum_1^n{}_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial e_r} = E_r,$$

ossia

$$\frac{d}{dt}\sum_1^n{}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial e_r} = \sum_1^n{}_i \frac{dE_{ir}}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \sum_1^n{}_i E_{ir}\frac{\partial T}{\partial q_i} + E_r,$$

o infine

$$(7^{\text{ter}}) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial e_r} = \sum_1^n{}_i \frac{dE_{ir}}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \sum_1^n{}_i E_{ir}\frac{\partial T}{\partial q_i} + E_r \qquad (r = 1, 2, \dots n - m).$$

Queste equazioni si applicano propriamente a qualunque specie di coordinate $q_1, q_2 \dots q_n$, e a vincoli anche dipendenti dal tempo. Supposto che le $q_1, q_2 \dots q_n$, con $n = 3\nu$, rappresentino le coordinate cartesiane ortogonali, x, y, z, di un sistema di ν punti, e che i vincoli siano indipendenti dal tempo, si ha, conformemente a (10),

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i = m_i \sum_1^{n-m}{}_u E_{iu} e_u \quad (i = 1, 2, \dots 3\nu;\ m_i = m_{i+1} = m_{i+2})$$

Inoltre,

$$\frac{d\mathrm{E}_{ir}}{dt} = \sum_1^n{}_j \frac{\partial \mathrm{E}_{ir}}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_1^{n-m}{}_v \, e_v \sum_1^{3\nu}{}_j \frac{\partial \mathrm{E}_{ir}}{\partial q_j} \mathrm{E}_{jv} .$$

Quindi, in dette ipotesi, le precedenti equazioni diventano

$$(7^{\mathrm{IV}}) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial e_r} = \sum_1^{n-m}{}_u \sum_1^{n-m}{}_v \, b_{rv}^{(u)} \, e_u \, e_v ,$$

dove

$$b_{rv}^{(u)} = \sum_1^{3\nu}{}_j \mathrm{E}_{jv} \sum_1^{3\nu}{}_i \, m_i \frac{\partial \mathrm{E}_{ir}}{\partial q_j} \mathrm{E}_{iu} :$$

forma semplice, alla quale (salvo le lettere differenti) si riducono le equazioni (C) del sig. Volterra, valendosi delle premesse relazioni, ed eseguendo le operazioni indicate.

Termino con brevi osservazioni sull' opportunità e la legittimità dell' uso del teorema di Hamilton.

Pare a me, quanto ad opportunità, che l' equazione in cui si traduce questo teorema possa sempre considerarsi come una riduzione a forma più concisa dell' equazione di d' Alembert e Lagrange, che si presta spontaneamente per la deduzione delle equazioni del movimento in coordinate generali.

Quanto a legittimità, all' eccezione del sig. Appell, che forma oggetto della sua Nota *Sur les équations de Lagrange et le principe d'Hamilton*, nel tomo XXVI del « Bulletin de la Société Mathématique de France » (1898), può obbiettarsi che la dimostrazione della incompatibilità di

$$(11) \qquad d\delta x = \delta dx , \qquad d\delta q_i = \delta dq_i ,$$

nel caso della anolonomia, si fonda sulla deduzione di

$$\delta \left[dx - (\mathrm{A}_1 \, dq_1 + \mathrm{A}_2 \, dq_2) \right] = 0$$

dall' equazione traducente i vincoli

$$dx - (\mathrm{A}_1 \, dq_1 + \mathrm{A}_2 \, dq_2) = 0 .$$

Ora, ciò significa imporre al movimento virtuale di soddisfare i medesimi vincoli del movimento effettivo. Che se, conformemente all' ordinario canone, la variazione relativa al passaggio ad un movimento virtuale si definisce colle (11), e, nel caso in discorso, con

$$\delta x - (\mathrm{A}_1 \, \delta q_1 + \mathrm{A}_2 \, \delta q_2) = 0 ,$$

il ragionamento del sig. Appell dimostra come, nel medesimo caso, l' olonomia sia condizione necessaria e sufficiente perchè coincidano movimento virtuale e movimento soddisfacente agli stessi vincoli del movimento effettivo [1].

[1] Cfr. Hölder, *Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis*, § 6. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen (1896).