# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME X.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

Sul materiale raccolto non si rinvenne sul posto alcuna fruttificazione del fungillo, ma le foglie stesse invase dal micelio e tenute in laboratorio in condizioni opportune svilupparono un corpo fruttifero che permise di riferire il fungillo all' ordine dei *discomiceti* ed al genere *stictis*.

Ritornati entrambi sul posto alla metà di dicembre, i dubbî che potevano rimanere sulla natura della malattia furono risolti completamente, giacchè i caratteri di essa erano molto più accentuati e di più non solo si rinvenne la fruttificazione del fungo sulle abbondantissime foglie cadute, ma anche su quelle ancor vive e sulla pianta, fruttificazione perfettamente identica a quella ottenuta in laboratorio.

L' esame poi delle radici degli olivi più sofferenti nel territorio di Vernole confermò una seconda volta non potersi attribuire in alcun modo al marciume radicale la malattia in questione.

Non rimane quindi secondo noi alcun dubbio sulla origine crittogamica della dannosissima malattia della *brusca* nell' agro Leccese. Il fatto ci sembra di grande importanza, poichè non è improbabile che lo studio accurato, che vedrà la luce a suo tempo, delle condizioni dello sviluppo del fungillo e della sua biologia ci diano una norma sicura, finora completamente mancata, per combattere questa malattia che, colla sua persistenza, ha completamente immiserito e posta alla disperazione la popolazione di molti paesi, pei quali l' unica risorsa è il prodotto dell' olivo.

## Meccanica. — *Su alcuni problemi di equilibrio elastico.* Nota II [1] del prof. ORAZIO TEDONE, presentata dal Socio VOLTERRA.

5. Come una generalizzazione immediata del problema precedente, indichiamo, senza insisterci, la soluzione del problema della determinazione della deformazione elastica di un mezzo isotropo ed omogeneo compreso fra le facce di un triedro trirettangolo quando in superficie sono dati gli spostamenti.

Mantenendo, per quanto è possibile, le notazioni precedenti, supponiamo che il mezzo elastico omogeneo di cui vogliamo occuparci occupi il triedro trirettangolo S in cui $\xi, \eta, \zeta$ sono positive, e chiamiamo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ le facce corrispondenti a $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$. Insieme ai punti $A, A_1, A_2, A_3$, introduciamo anche gli altri punti $A', A'_1, A'_2, A'_3$ e le distanze: $r', r'_1, r'_2, r'_3$ di questi quattro punti dal punto $(\xi, \eta, \zeta)$ di S.

Come nel caso precedente, noteremo che il valore di una funzione armonica in S la quale su $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ assume valori fissati, nel punto A, è dato dalla formola

[1] V. pag. 251.

$$(8)\qquad -2\pi\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\varphi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\right)d\sigma_1 +$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\varphi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_1}\right)d\sigma_2+\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_3}\varphi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_3\,,$$

mentre il valore di una funzione $\psi$ che in S soddisfaccia all'equazione $\varDelta^2\varDelta^2\psi=0$ ed è tale che $\psi$ e $\varDelta^2\psi$ assumano su $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ valori fissati, nello stesso punto A, è dato dalla formola

$$(9)\qquad -2\pi\psi = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\right)d\sigma_1 +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_2}\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_2+\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_3}\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_1}\right)d\sigma_3$$
$$+\frac{x}{2}\int_{\sigma_1}\varDelta^2\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\right)d\sigma_1 +$$
$$+\frac{y}{2}\int_{\sigma_2}\varDelta^2\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_2+\frac{z}{2}\int_{\sigma_3}\varDelta^2\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_1}\right)d\sigma_3\,.$$

Senza trascriverle, notiamo, pure, che sussistono delle formole analoghe alle $(a)$, $(a')$, $(b)$, $(b')$, $(c)$, $(c')$ e che si dimostrano allo stesso modo. Applicando la (9) a ciascuna delle (3) e trasformando i risultati con le formole a cui or ora abbiamo accennato, si trova, nella ipotesi che $u, v, w$ sieno differenti da zero soltanto su $\sigma_1$:

$$(10)\left\{\begin{aligned}
2\pi u &= -\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}u\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\right)d\sigma_1+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\right)d\sigma_1+\\
&+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}y\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_2+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_3}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_1}\right)d\sigma_3+\\
&+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_2}\xi\theta\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)d\sigma_2+\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_3}\xi\theta\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'_1}\right)d\sigma_3\right],\\
2\pi v &= -\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}v\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\right)d\sigma_1+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\right)d\sigma_1+\\
&+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}y\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_2+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_3}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_1}\right)d\sigma_3+\\
&+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_3}\eta\theta\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_1}\right)d\sigma_3+\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\eta\theta\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_3}\right)d\sigma_3\right],\\
2\pi w &= -\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}w\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\right)d\sigma_1+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\right)d\sigma_1+\\
&+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}y\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)d\sigma_2+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_3}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_1}\right)d\sigma_3+\\
&+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\zeta\theta\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'_3}\right)d\sigma_1+\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_2}\zeta\theta\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_2}\right)d\sigma_2\right].
\end{aligned}\right.$$

Derivando queste formole successivamente rispetto ad $x$, $y$, $z$, sommando e tenendo presente le (8), si trova

$$
\begin{aligned}
(11) \qquad & \frac{\pi}{\mu}(\lambda+3\mu)\,\theta = -\int_{\sigma_1}\Big\{ u\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\Big)+ \\
& + v\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\Big)+w\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\Big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\Big)\Big\}\,d\sigma_1+ \\
& + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big\{\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Big[\int_{\sigma_1}\eta\theta\Big(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_3}\Big)d\sigma_1+\int_{\sigma_2}\zeta\theta\Big(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\Big)d\sigma_2\Big]+ \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\Big[\int_{\sigma_2}\zeta\theta\Big(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_2}\Big)d\sigma_2+\int_{\sigma_3}\zeta\theta\Big(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_1}\Big)d\sigma_3\Big]+ \\
& + \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\Big[\int_{\sigma_3}\xi\theta\Big(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'_1}\Big)d\sigma_3+\int_{\sigma_1}\zeta\theta\Big(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'_3}\Big)d\sigma_1\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Questa equazione al limite, per $x=0$, $y=0$, $z=0$, successivamente, chiamando $T'(y,z)$, $T''(x,z)$, $T'''(x,y)$ il valore limite ed i valori dell'integrale

$$
\begin{aligned}
& \int_{\sigma_1}\Big\{ u\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\Big)+v\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\Big)+ \\
& \qquad + w\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\Big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_3}\Big)\Big\}\,d\sigma_1
\end{aligned}
$$

per $x=0$, $y=0$, $z=0$, ci da:

$$
(12)\left\{
\begin{aligned}
& \frac{\pi}{\mu}(\lambda+3\mu)\,\theta(0,y,z) = -T'(y,z)+ \\
& \quad + 3\,\frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big[y\int_{\sigma_2}\zeta^2\theta(\xi,0,\xi)\Big(\frac{1}{r_3^5}-\frac{1}{r_2^5}\Big)d\sigma_2+z\int_{\sigma_3}\eta^2\theta(\xi,\eta,0)\Big(\frac{1}{r'^5}-\frac{1}{r_1'^5}\Big)d\sigma_3\Big], \\
& \frac{\mu}{\pi}(\lambda+3\mu)\,\theta(x,o,z) = -T''(x,y)+ \\
& \quad + 3\,\frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big[z\int_{\sigma_3}\xi^2\theta(\xi,\eta,0)\Big(\frac{1}{r_1^5}-\frac{1}{r_1'^5}\Big)d\sigma_3+x\int_{\sigma_1}\zeta^2\theta(0,\eta,\zeta)\Big(\frac{1}{r_3^5}-\frac{1}{r_3'^5}\Big)d\sigma_1\Big], \\
& \frac{\pi}{\mu}(\lambda+3\mu)\,\theta(x,y,0) = -T''(y,z)+ \\
& \quad + 3\,\frac{\lambda+\mu}{\mu}\Big[x\int_{\sigma_1}\eta^2\theta(0,\eta,\zeta)\Big(\frac{1}{r'^5}-\frac{1}{r_3'^5}\Big)d\sigma_1+y\int_{\sigma_2}\xi^2\theta(\xi,0,\zeta)\Big(\frac{1}{r_1^5}-\frac{1}{r_2^5}\Big)d\sigma_2\Big].
\end{aligned}
\right.
$$

E queste equazioni si possono risolvere, come le (7), per mezzo di approssimazioni successive.

6. Termineremo osservando che il metodo da noi adottato è suscettibile di essere applicato anche al caso generale in cui il mezzo elastico è limitato da due piani formanti un angolo diedro commensurabile con $\pi$, ovvero da tre piani formanti un triedro birettangolo in cui l'angolo diedro non retto è commensurabile con $\pi$, e conduce alla soluzione del problema anche quando, invece di dare in superficie gli spostamenti, si dieno i valori delle tensioni.