ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia sino al 21 luglio 1901.

Geodesia. — *Un principio fondamentale nello studio delle superficie di livello terrestri.* Nota di Paolo Pizzetti, presentata dal Socio Bianchi.

Si ammette di solito, o tacitamente, o come dato di fatto, nei fondamenti della Geodesia, che le superficie di livello terrestri siano superficie *chiuse*. L' ammissione a priori è arbitraria. La dimostrazione di fatto si fonda sulla presunta possibilità di tracciare una rete di canali che allaccino i varî mari, in guisa che la superficie oceanica, prolungata attraverso i continenti, dia, essa stessa, una immagine materiale di una superficie chiusa di livello. Ma, oltrechè è alquanto arrischiato il considerare, a priori, la superficie media dei mari come una superficie di livello, questa dimostrazione presuppone la uguaglianza di livello dei varî mari, la quale è bensì molto probabile, ma non è accertata.

Intendo qui di far vedere come, in modo semplice, si possa dimostrare che le superficie di livello sono *chiuse*, almeno dentro uno spazio che si estende per circa *cinque volte* il raggio medio terrestre, al di fuori della terra. Gli unici dati di fatto dei quali farò uso sono i seguenti:

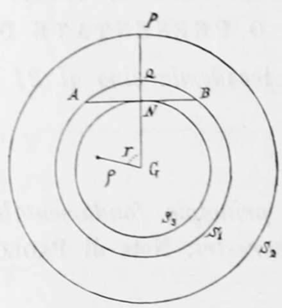
1°. La superficie materiale del globo è poco diversa da una sfera, e più precisamente: si può assumere sull' asse della rotazione diurna un punto G tale che i raggi vettori massimo e minimo della detta superficie, rispetto all' origine G, differiscano dal raggio vettore medio R_m di meno di $^1/_{100}\, R_m$.

2°. Detto R_1 il massimo raggio vettore, M la massa terrestre, ε la costante dell' attrazione, ω la velocità angolare diurna, si ha

$$\frac{\omega^2 R_1^3}{\varepsilon M} < \frac{1}{280}. \tag{1}$$

Il primo di questi fatti è accertato dalle più comuni osservazioni astronomiche e specialmente dalla misura delle *parallassi lunari*. Quanto al secondo, il valore del rapporto $\frac{\omega^2 R_m^3}{\varepsilon M}$ può dedursi dal movimento della luna (¹), e si trova pressapoco uguale a $\frac{1}{289}$. Tenendo conto che $R_1 - R_m < \frac{1}{100} R_m$ si ha la diseguaglianza (1).

2. Sia un punto P a distanza a da G ed esterno alla sfera S_1 di



raggio R_1. La componente, secondo PG, dell' attrazione che la massa elementare dm esercita su P è data da

$$\frac{\varepsilon(a - \varrho\cos\gamma) \,.\, dm}{(a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\gamma)^{3/2}}$$

dove ϱ è la distanza di dm da G e γ l'angolo che il raggio vettore $G(dm)$ fa con GP. La detta componente è dunque sempre maggiore di $\frac{\varepsilon\, dm}{(a+\varrho)^2}$ (poichè $a > \varrho$). Poichè tutta la massa terrestre è contenuta dentro la sfera S_1, la componente, secondo PG, dell' attrazione che questa massa esercita su P è dunque maggiore di $\frac{\varepsilon M}{(a+R_1)^2}$; la componente della forza centrifuga è $< \omega^2 a$. Quindi la componente, secondo PG, della *gravità* in P è

$$X > \frac{\varepsilon M}{(a+R)^2} - \omega^2 a.$$

(¹) Se per semplicità si considera come circolare l'orbita della luna, e si trascura la massa di questa rispetto alla Terra si ha $\varepsilon M = \frac{4\pi^2 D^3}{T^2}$, dove D è la distanza media, T la durata del mese anomalistico; chiamando N il numero di giorni siderali compresi in T, si ha quindi $\frac{\omega^2 R^3_m}{\varepsilon M} = N^2 \left(\frac{R_m}{D}\right)^3$.

Posto $a = x\,R_1$, e tenuto conto della (1) abbiamo:

$$\text{(2)} \qquad \frac{X\,R_1^2}{\varepsilon M} > \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x}{280}.$$

Il 2° membro è positivo per x compreso fra 0 e 5,89...; sarà dunque X positivo per valori di a compresi fra R_1 e $5{,}89 \ldots R_1$. Detto V il potenziale attrattivo della massa terrestre in un punto, r la distanza di questo punto dall' asse terrestre e posto

$$W = \varepsilon V + \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,r^2,$$

sarà $W = \text{cost}$ l'equazione delle superficie di livello e il valore della derivata $\frac{\partial W}{\partial \varrho}$ presa secondo il raggio vettore GP in P sarà uguale a $-X$. Resta dunque dimostrato che *lungo ogni raggio vettore la funzione* W *è continuamente decrescente* a partire da S_1 fino, almeno, ad una distanza da G uguale, in cifra tonda, a *sei* volte il raggio terrestre.

3. Consideriamo ora una sfera S_2 di centro G e di raggio a, tale che si abbia insieme:

$$\text{(3)} \qquad a < 5{,}89 \ldots R, \qquad \frac{\varepsilon M}{2R_1} > \frac{\varepsilon M}{a - R_1} + \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,a^2.$$

Poniamo, per fissare le idee, $a = 4R_1$, valore che soddisfa a entrambe queste condizioni [1]. Siano Q e P le intersezioni di un raggio uscente da G colle sfere S_1, S_2. In Q la W è certamente maggiore di $\frac{\varepsilon M}{2R_1}$; in P si ha $W < \frac{\varepsilon M}{a - R_1} + \frac{1}{2}\omega^2 a^2$, e tenuto conto della (3), a fortiori sarà nel punto P, $W < \frac{\varepsilon M}{2R_1}$. Poichè W decresce di continuo da Q a P, vi sarà, fra Q e P un punto, ed un solo, nel quale $W = \frac{\varepsilon M}{2R_1}$. Il ragionamento vale per ogni raggio uscente da G. Vi ha quindi una superficie di livello *chiusa*, tutta compresa fra le due sfere S_1, S_2, e che incontra una sola volta ognuno dei raggi uscenti da G.

[1] Poichè $\frac{\omega^2 R_1^3}{\varepsilon M}$ non è $> \frac{1}{280}$ la (3) sarà soddisfatta, quando lo sia quest'altra

$$1 > \frac{2R_1}{a - R_1} + \frac{1}{280}\left(\frac{a}{R_1}\right)^2$$

la quale è soddisfatta da ogni valore di a compreso fra $3{,}02 \,.\, R_1$ e $15 \,.\, R_1$.

Procedendo ora dalla superficie Σ così trovata, verso l'interno o verso l'esterno, poichè la derivata $\frac{\partial W}{\partial \varrho}$ è finita, diversa da zero, e di segno costante, è manifesta l'esistenza di una infinità di altre superficie di livello chiuse, incontranti una sola volta ogni raggio uscente da G, ben inteso entro lo spazio compreso fra la sfera S_1 e quella di raggio $= 5,89 \ldots R_1$.

4. Vediamo ora fino a qual punto, in base ai nostri postulati, possa accertarsi, al di dentro della sfera S_1, l'esistenza di superficie di livello godenti della stessa proprietà della Σ. Basta cercare fino a quale profondità si possa ritenere positiva la componente radiale X della gravità. Ciò non può farsi senza qualche ipotesi sulla densità degli strati terrestri; noi porremo la condizione che *fino a una certa profondità* la densità θ non superi 6, o più precisamente, detta θ_m la densità media della terra:

$$\frac{\theta}{\theta_m} \overline{<} 1,1 . \tag{6}$$

(Fanno eccezione a questa ipotesi talune porzioni affatto limitate della corteccia terrestre, quali i giacimenti metallici; ma questi non possono avere un'influenza sensibile sul risultato dei nostri calcoli). La componente, secondo NG, dell'attrazione che la massa terrestre esercita sopra un punto N posto alla distanza $R_1 - h$ da G, sarà maggiore di quella che si ottiene supponendo che sul punto N agisca la massa M_1 racchiusa entro la sfera S_3 di raggio $R_1 - h$, e la massa M_2 contenuta nel segmento sferico AQB (vedi figura) compreso fra la sfera S_1 e il piano tangente alla S_3 in N. L'attrazione della massa M_2 è $< 2\pi\varepsilon\theta h$. La massa M_1 è maggiore di $M - 4\pi R_1^2 h\theta$ e la componente radiale dell'attrazione che la M_1 esercita su N è $> \frac{\varepsilon M_1}{4(R_1 - h)^2}$.

Quindi la componente X, secondo NG, della gravità in N sarà

$$X > \frac{\varepsilon}{4(R_1 - h)^2}(M - 4\pi R_1^2 h\theta) - 2\pi\varepsilon\theta h - \omega^2(R_1 - h).$$

Posto $h = xR_1$, ricordando le diseguaglianze (1) e (6) e osservando che per approssimazione $M = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \theta_m$, avremo:

$$\frac{XR_1^2}{\varepsilon M} > \frac{1 - 3.3}{4(1 - x)^2} - 1,65 . x - \frac{1 - x}{280} \tag{7}$$

Il secondo membro è positivo da $x = 0$ fino a $x = 0,11$ circa, ossia da $h = 0$ fino ad $h = 700$ Km. circa. Se ammettiamo che la nostra ipotesi $\left(\frac{\theta}{\theta_m} \overline{<} 1,1\right)$ valga fino ad una profondità di 600 Km. (il che è assai probabile: vedi Radau, Bull. Astron., T. VII, pag. 80), potremo esser certi che fino a quella *profondità* le superficie di livello godranno delle proprietà della Σ.

È inutile dire, che per la pochissima limitazione delle nostre ipotesi fondamentali, abbiamo ottenuto in questi calcoli dei limiti assai più ristretti di quelli reali.

Storia della scienza. — *Di una lettera inedita di Nicolò Tartaglia.* Nota di V. Tonni-Bazza, presentata dal Socio V. Cerruti.

Carlo Promis, nella biografia di Francesco de Marchi [1] affermava di aver visto, presso la Segreteria comunale di Urbino, più lettere originali, inedite di Nicolò Tartaglia.

Volendo completare alcune ricerche sul matematico bresciano — ricerche non intraprese di recente — abbiamo fatto pazienti indagini nell' archivio comunale di Urbino, seguendo la traccia data dal Promis, e ci è difatti riuscito di trovare una lettera del Tartaglia, diretta all' architetto militare Jacopo Fusti Castriotti da Urbino. Tale lettera è inserita in uno scartafaccio in folio, di dieci carte [2], contenente lettere scritte e ricevute dallo stesso Castriotti, ed essa pure è risposta ad altra del Castriotti, che per maggior chiarezza riportiamo in precedenza.

Con tutta probabilità, si tratta di una delle lettere cui alludeva il Promis; ma non crediamo prudente affermare ciò con sicurezza; perchè, quanto è rimasto in quell'archivio, è ben poca cosa in confronto a ciò che vi si conservava in tempo passato, ed anche quando scriveva il Promis.

Infatti lo stesso schedario dice dello scartafaccio, come di *già grosso volume, ora mancante, lacerato e infamemente manomesso.* Basti sapere, del resto, che è il solo che si possegga, di 29 grandi quinterni che costituivano la raccolta.

Le lettere sono evidentemente copie, e la mano che le esemplò deve essere del Cinquecento.

Dopo la lettera del Castriotti, e prima che cominci quella del Tartaglia, vi è un brano non firmato che però non appartiene nè all'una nè all'altra, bensì al capitano Frate, da Modena; il che è avvertito da due richiami nel manoscritto (due mani disegnate a penna). Forse i disegni o ragionamenti del Castriotti erano accompagnati da una lettera dello stesso Frate; ma di tale lettera non si ha conoscenza.

(1) Questa biografia è inserita nella *Miscellanea di Storia Italiana*, edita a cura della R. Deputazione di Storia Patria, t. IV, Torino, 1863, pag. 641.

(2) Archivio Comunale di Urbino, rip. 3°, busta 122, fasc. 3.