ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 7 luglio 1901.

Meccanica. — *Sulla resistenza dei mezzi fluidi.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Socio Siacci [1].

. . . .

A me pare che la legge di Newton (resistenza proporzionale al quadrato della velocità v), relativa ai fluidi incompressibili, si possa ricavare teoricamente, senza uscire dalla idrodinamica pura.

Per i fluidi compressibili, come ad es. l'aria, la cosa si complica un pochino. Tuttavia, finchè una certa serie converge, ciò che sembra ben plausibile per v inferiore ad un certo limite (forse 279$^{\mathrm{m}}$ al secondo, se si risguarda il movimento del fluido come un processo isotermico) [2], la legge della resistenza si presenta sotto l'aspetto

$$R = \varrho v^2 \left\{ a_0 + a_1 \frac{v^2}{c} + \cdots \right\}$$

essendo ϱ la densità del mezzo (opportunamente precisata), le a costanti, che dipendono soltanto dalla forma del corpo, e c la costante della legge di Boyle (quindi $\frac{1}{c}$ una quantità molto piccola), talchè, per valori moderati di v, potranno bastare il primo, o al più i primi due termini della serie.

[1] Estratto di una lettera al senatore prof. F. Siacci.

[2] Considerazioni dello stesso tipo si potrebbero istituire, risguardandolo invece come adiabatico. Tale del resto andrebbe ritenuto nel caso di grandi velocità. Come probabile velocità limite (per la convergenza dello sviluppo di R) si presenta allora quella del suono. Lascierò qui di occuparmene, per non complicare con formule poco istruttive un semplice abbozzo, quale il presente.

Risultati questi perfettamente conformi all' esperienza [1].

Il difficile rimane sempre, anche sotto questo punto di vista, di riconoscere il comportamento della resistenza per v molto grande (o, se si vuole, la espressione asintotica di R, al crescere indefinito di v). Ciò spiega in certo modo l' origine delle gravi difficoltà, che si incontrano nella balistica, e che Ella ha così luminosamente discusse.

Ecco come io giustifico le mie asserzioni.

Considero, per maggior semplicità, un corpo S animato di velocità traslatoria uniforme v, e immerso in un fluido indefinito non sollecitato da forze.

Per effetto del moto di S, il fluido pure entra in movimento. Con quale legge?

Come è ben noto, l' ipotesi di un movimento *continuo in tutto lo spazio esterno ad* S conduce a conseguenze affatto inattendibili circa la resistenza del fluido. La risultante delle pressioni, esercitate dal fluido su S, riesce identicamente nulla; ossia un corpo in moto traslatorio uniforme non incontra alcuna resistenza di mezzo.

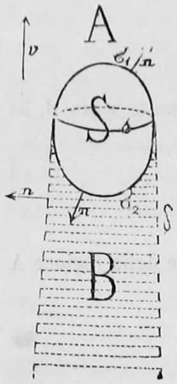
Di solito si attribuisce questo risultato, così apertamente in contraddizione coll' esperienza, all' ipotesi teorica che si tratti di fluidi ideali. I fluidi naturali sono viscosi, si dice; nessuna meraviglia dunque che essi si comportino in modo diverso. Ogni difficoltà logica vien così tolta di mezzo. Ma resta pur sempre assai strano che, mentre in moltissime altre questioni la ipotesi della perfetta fluidità risponde con discreta approssimazione alle condizioni di fatto, in questo solo caso se ne tragga una deduzione affatto contraria all' esperienza. Ciò fa pensare che, proprio in questo caso, la posizione analitica del problema introduca qualche elemento, apparentemente innocuo, ma ben più lontano dalla realtà che non sia il carattere di fluido perfetto. Tale è, a mio avviso, l' ipotesi della continuità del movimento del fluido in tutto lo spazio esterno al corpo. Sostituendo questa ipotesi con altra, più conforme all' esperienza quotidiana (delle colonne fluide, che i corpi in movimento un po' rapido si tirano dietro), e del resto perfettamente analoga a quella ammessa nella teoria delle vene fluenti, si pone assai bene in evidenza il fenomeno della resistenza del mezzo, indipendentemente dalla viscosità. Oserei anzi affermare che, per velocità superiori ad un certo limite, l' influenza della viscosità si può ritenere affatto trascurabile.

1. Introduco pertanto le seguenti ipotesi:

1°. *Il movimento del fluido, prodotto dal corpo* S (stazionario rispetto allo stesso S), *presenta dietro il mobile una superficie di discontinuità* δ *estendentesi fino all' infinito a partire da una certa curva* s *del contorno* σ *di* S.

(1) Cfr. per es. Nazzani, *Idraulica pratica*, vol. I, pag. 302; Loria, *Le strade ferrate*, vol. II, cap. 1.

2°. *Le molecole fluide, appartenenti alla regione posteriore* B, *si comportano come se fossero rigidamente collegate con* S.



3°. *Il moto del fluido nella regione* A *è irrotazionale; e soddisfa alle solite condizioni all' infinito* (in quanto naturalmente vi si tenda senza uscire da A).

Diciamo σ_1 e σ_2 le due regioni (anteriore e posteriore) della superficie σ del corpo, separate da s. Gli assi di riferimento x, y, z si suppongano rigidamente collegati ad S, coll' asse z diretto come la velocità. Sia γ il coseno dell' angolo, che la normale esterna n, in un punto generico di σ_1, σ_2 o di δ, forma coll' asse z (chiamando esterna, rispetto a δ, la direzione rivolta verso A); $v\varphi$ il potenziale di velocità relativo ai punti di A.

2. Considero dapprima il caso di un fluido incompressibile di densità costante ϱ, e allora φ deve soddisfare in A alla equazione indefinita

(1) $$\Delta_2\varphi = 0 \text{ (}^1\text{)},$$

sul contorno $\sigma_1 + \delta$ alla

(2) $$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \gamma,$$

nonchè alle condizioni all' infinito.

Dicendo p_A e p_B (quest' ultima evidentemente costante) le pressioni in un punto generico di A e di B, si ha sopra δ

$$p_A = p_B.$$

Dacchè in tutto lo spazio A la pressione è definita in termini di φ dalla relazione

$$\frac{1}{\varrho}\, p_A = \mathrm{C} - \frac{v^2}{2}(\Delta_1\varphi)^2 + v^2\frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ (}^2\text{)},$$

(1) Abbrevio al solito in $\Delta_2\varphi$ e $(\Delta_1\varphi)^2$ i trinomi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

rispettivamente.

(2) Rispetto ad assi fissi ξ, η, ζ, si avrebbe

$$\frac{1}{\varrho}\, p_A = \mathrm{C} - \frac{v^2}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right\} - v\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

immaginando naturalmente il potenziale φ espresso per ξ, η, ζ, t. Ora si può supporre che $\varphi(\xi, \eta, \zeta; t)$ provenga dalla espressione qui considerata $\varphi(x, y, z)$, ponendovi $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta - vt$. Si ha in tal caso

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -v\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

donde la formula sopra scritta.

dove C è una costante, e che nei punti di A situati a distanza infinita le derivate di φ si annullano, si ha

$$C = \frac{1}{\varrho} p_A^{(\infty)}.$$

Considerando in particolare un punto infinitamente distante sopra δ, ne deduciamo

$$C = \frac{1}{\varrho} p_B ,$$

con che la espressione della pressione in un punto qualunque della regione A diviene

$$(3) \qquad p_A = p_B + \varrho v^2 \tfrac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\varDelta_1 \varphi)^2 \right\}.$$

Nei punti di δ si ha conseguentemente

$$(4) \qquad (\varDelta_1 \varphi)^2 - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 ,$$

e così in definitiva la incognita funzione φ deve soddisfare alle equazioni (1), (2), (4). Se δ fosse data a priori, le (1), (2) (tenuto conto delle condizioni all'infinito) basterebbero a determinare la φ. Ma δ non è data, e si tratta appunto di determinarla in modo da rendere simultaneamente soddisfatte le (1), (2), (4). Dal punto di vista del rigore matematico inceppiamo qui in una questione di esistenza, che cogli attuali mezzi analitici non si saprebbe discutere. Fisicamente la questione di esistenza viene sostituita, e risoluta in senso affermativo, dalle ipotesi sopra dichiarate.

Ciò posto, l'essenziale per noi si è di osservare che la definizione di φ, in base alle (1), (2), (4), dipende unicamente dalla forma del corpo S, e non dalla velocità v, nè dalla densità ϱ del mezzo.

Di quà segue immediatamente la legge di Newton. Infatti la resistenza totale R, incontrata dal corpo nel suo movimento, è data da

$$R = \int_\sigma p\gamma \, d\sigma = \int_{\sigma_1} p_A \gamma \, d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} p_B \gamma \, d\sigma_2 .$$

Ma, p_B essendo costante e $\sigma_1 + \sigma_2$ costituendo una superficie chiusa,

$$\int_{\sigma_2} p_B \gamma \, d\sigma_2 = - \int_{\sigma_1} p_B \gamma \, d\sigma_1 ;$$

quindi, posto per p_A il suo valore (3),

$$R = \varrho v^2 \int_{\sigma_1} \tfrac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} - (\varDelta_1\varphi)^2 \right\} \gamma d\sigma_1 , \tag{5}$$

e ciò dimostra l'asserto.

Prendendo $f = \varphi - z$, si ha in vf il potenziale di velocità di una corrente, (di velocità limite v nel senso delle z negative) interrotta dal corpo S. La forza, che è necessario vincere perchè S non sia trasportato dalla corrente, è ancora espressa dalla (5), ossia, introducendovi f al posto di φ, da

$$R = \varrho v^2 \int_{\sigma_1} \tfrac{1}{2} \{ 1 - (\varDelta_1 f)^2 \} \gamma \, d\sigma_1 .$$

Questa formula è un'ovvia estensione, al caso di tre dimensioni, di quella stabilita da Lord Rayleigh per la pressione, che si esercita sopra l'unità di lunghezza di una lamina infinitamente lunga a orli paralleli [1].

3. Venendo ora al caso di fluidi elastici, avremo, supposta la validità della legge di Boyle,

$$p = c\varrho \quad (c \text{ costante}),$$

$$P = \int \frac{dp}{\varrho} = c \log p .$$

La equazione di continuità assume l'aspetto

$$\frac{d \log \varrho}{dt} + v \varDelta_2 \varphi = 0 ,$$

ossia anche

$$\frac{1}{c} \frac{dP}{dt} + v\varDelta_2\varphi = 0 ;$$

mentre le equazioni di Eulero si riassumono in

$$P = C + v^2 \tfrac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} - (\varDelta_1\varphi)^2 \right\} .$$

[1] Cfr. per es. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik*, B. I, pag. 307.

Eliminando P fra queste due equazioni e ponendo

$$\frac{v^2}{c} = \lambda ,$$

$$\frac{1}{v} \frac{d}{dt} \tfrac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\} + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial z} - 1 \right\} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\} \right] = \Theta \varphi ,$$

si ha

$$(1^{\text{bis}}) \qquad \Delta_2 \varphi + \lambda \Theta \varphi = 0 .$$

Un ragionamento identico al precedente mostra che

$$\mathrm{C} = \mathrm{P}_{\mathrm{B}} = c \log p_{\mathrm{B}} ;$$

quindi

$$(3^{\text{bis}}) \qquad p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{B}} \left[e^{\frac{v^2}{c} \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\}} - 1 \right] ,$$

$$(5^{\text{bis}}) \qquad \mathrm{R} = p_{\mathrm{B}} \int_{\sigma_1} \left[e^{\frac{v^2}{c} \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\}} - 1 \right] \gamma \, d\sigma_1 .$$

Le condizioni determinative di φ sono ora la equazione indefinita (1^{bis}) colle (2), (4) e condizioni all'infinito.

Per λ abbastanza piccolo [1], è presumibile che la espressione analitica di φ si possa sviluppare in serie di potenze di λ

$$\varphi_0 + \lambda \varphi_1 + \cdots ;$$

lo stesso avviene allora per $e^{\lambda \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\}}$; quindi per R. Il primo termine dello sviluppo di R è

$$p_{\mathrm{B}} \frac{v^2}{c} \int_{\sigma_1} \tfrac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi_0)^2 \right\} \gamma \, d\sigma_1 = \varrho_{\mathrm{B}} v^2 \int_{\sigma_1} \tfrac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi_0)^2 \right\} \gamma \, d\sigma_1 ,$$

che corrisponde alla resistenza di un fluido incompressibile, avente dappertutto la densità costante della regione B.

(1) Se si tratta dell'aria, si ha in unità [C. G. S] $c = \frac{1{,}013}{1{,}293} 10^9$; quindi, qualora basti per la convergenza dello sviluppo che sia $\lambda < 1$, il limite per v, in metri, si trova essere $v = 279^{\mathrm{m}}$.

Badando che $\lambda = \frac{v^2}{c}$, risulta in definitiva

$$R = \varrho_0 v^2 \left\{ a_0 + a_1 \frac{v^2}{c} + \cdots \right\},$$

dove i coefficienti a dipendono esclusivamente dalla forma del corpo S.

4. *Osservazione.* — La circostanza che, supponendo il movimento del fluido ovunque continuo, la resistenza incontrata da S riesce identicamente nulla si suol rendere intuitiva per via energetica, ragionando come segue:

Dacchè si tratta di un fluido perfetto, la forza viva, posseduta da S in un generico istante, non può cambiarsi in altra forma di energia (termica o chimica per es.); per il carattere stazionario (rispetto ad S) del movimento del fluido, determinato dall'uniforme traslazione di S, non vi può essere trasmissione di forza viva da S al fluido. Dunque l'energia cinetica di S rimane inalterata, il che equivale appunto ad una resistenza nulla.

Molto opportunamente il sig. Föppl, nelle sue *Vorlesungen über technische Mechanik* (¹), aggiunge a questo proposito che non può nemmeno sorgere il dubbio che si stabilisca un flusso (stazionario rispetto ad S) di energia accumulantesi all'infinito, dato il comportamento all'infinito del potenziale di velocità, quando appunto lo si determina in base alle ipotesi consuete.

Colle nostre ipotesi il comportamento è diverso, poichè concorre all'infinito anche la superficie σ. Il flusso non è più identicamente nullo, e questo spiega la sottrazione di forza viva, che un fluido, anche perfetto, determina colla sua resistenza nei corpi in movimento. La energia, sottratta ad S, non si distrugge naturalmente, nè si trasforma, ma soltanto si trasporta all'infinito e vi si accumula; in teoria. Quel che avviene nella realtà si è una dispersione per la massa fluida di energia cinetica, assorbita dalle varie resistenze passive. Tale dispersione ha però rispetto al movimento di S (che qui costituisce la parte essenziale del fenomeno) gli stessi effetti del trasporto a distanza infinita contemplato dalla teoria.

. . . .
. . . .

Geodesia. — *Un principio fondamentale nello studio delle superficie di livello terrestri.* Nota di PAOLO PIZZETTI, presentata dal Socio BIANCHI.

Storia della scienza. — *Di una lettera inedita di Nicolò Tartaglia.* Nota di V. TONNI-BAZZA, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(¹) B. IV, pag. 367.