ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVIII.

1901

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1901

regioni e quali dovrebbero essere a mente nostra le pratiche da seguire per difendersi da tanto malanno, è ciò che esporremo nella Memoria *in extenso* che daremo alla luce, illustrata da disegni e fotografie, non appena compiute le osservazioni e le esperienze in corso.

Prima di chiudere la presente Nota, crediamo opportuno riportare qui sotto le diagnosi di tre fungilli nuovi che abbiamo quasi costantemente trovati sulle cicatrici dei rami in corrispondenza alle foglie cadute.

Se e quali rapporti questi microrganismi abbiano colla malattia di cui ci occupiamo o con qualcuna delle altre che affliggono il Gelso, noi ora non possiamo dire; anche per essi gli studî continuano e matureranno forse nella ventura primavera.

PHOMA PYRIFORMIS n. sp.

Peritheciis sparsis vel leniter gregariis, minimis, bruneis, membranaceis, basi peridermio insculptis, pyriformibus, in ostiolum breve conicum productis, 40-51 $\times$ 44-62 μ diam.; *sporulis oblongo-elipticis, hyalinis*, 4-5, $\times$ 1, 5-2 μ; *basidiis hyalinis, suffultis*, 5-6 μ *longis*.

Hab. in cicatricibus foliorum in ramulis vivis Mori albae: Papiae 1901.

PHOMA CICATRICULAE n. sp.

Peritheciis sparsis, bruneis, membranaceis, immersis, globosis vel globoso-depressis, 111-120 μ diam.; *sporulis elipticis, hyalinis* 2,3 $\times$ 4,5 μ; *basidiis hyalinis*, 10-12 μ *longis*.

Hab. in cicatricibus foliorum, in ramulis vivis Mori albae: Papiae 1901.

CONIOTHYRIUM MORORUM n. sp.

Peritheciis sparsis, pallido-bruneis, membranaceis, basi peridermio insculptis, globosis, papillatis, ostiolatis, 100-222 μ diam.; *sporulis elliptico-oblongis*, 7, 5-10 $\times$ 3, 5 μ, *luteolis*.

Hab. in cicatricibus foliorum in ramulis vivis Mori albae; Papiae 1901.

Matematica. — *Intorno ad alcune corrispondenze per proiezione delle superficie*. Nota del dott. UGO GRASSI, presentata dal Socio BIANCHI.

È noto, e facilmente verificabile, che una quadrica Q si proietta da un ombelico O su di un piano π parallelo al piano tgente in O in modo tale che le sue linee coniugate abbiano per imagine linee ortogonali di π. Viceversa: se una superficie S è con la sua proiezione piana da un punto O in una corrispondenza tale che le sue linee coniugate abbiano per imagine linee ortogonali del piano π di proiezione, la S è una quadrica, avente in O un ombelico ed in esso un piano tgente parallelo a π.

Infatti: posta in O la origine e π essendo definito da

$$z = h \quad (h = \text{cost}),$$

e la S da

$$z = z(xy),$$

un punto di S verrà a proiettarsi in

$$x' = h\frac{x}{z(xy)} \quad y' = h\frac{y}{z(xy)} \quad z' = h.$$

e, in forza della corrispondenza stabilita, devesi avere

$$\mathrm{E} : \mathrm{F} : \mathrm{G} :: r : s : t,$$

essendo su π $ds^2 = \mathrm{E}dx^2 + 2\mathrm{F}\,dx\,dy + \mathrm{G}dy^2$, ed $r\,s\,t$ i simboli di Monge per le derivate seconde di $z(xy)$. Ossia, indicata con μ una funzione di xy, devesi avere

$$(1) \quad \begin{cases} \mu r = z^2 - 2xpz + p^2(x^2 + y^2) \\ \mu s = z(qx + py) - pq(x^2 + y^2) \\ \mu t = z^2 - 2yqz + q^2(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Se però noi poniamo

$$u = \frac{x^2 + y^2}{z}$$

si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(2z - (x^2 + y^2)\,r)\,z^2 - 2z\,p\,(2xz - (x^2 + y^2)\,p)}{z^4} =$$

$$= -\frac{u}{z}\,r + \frac{2}{z^3}\,(z^2 - 2xpz + p^2\,(x^2 + y^2))$$

dalla quale, unita alle analoghe per $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, tenuto conto delle (1) si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(2\frac{\mu}{z^3} - \frac{u}{z}\right)r \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(2\frac{\mu}{z^3} - \frac{u}{z}\right)s \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \left(2\frac{\mu}{z^3} - \frac{u}{z}\right)t.$$

Ossia r, s, t differiscono dalle analoghe derivate seconde di u per un fattore di proporzionalità k, che (come si dimostra con semplici calcoli di derivazione) deve essere costante, a meno che $rt - s^2$ non sia nullo. Il caso $rt - s^2 = 0$ porta alla soluzione ovvia $z = \text{cost}$. Escluso questo caso, la funzione $u - kz$ ha tutte le derivate seconde nulle, ossia è lineare in x, y e quindi

$$x^2 + y^2 - kz^2 = z(ax + by + c)\,;$$

e ciò dimostra il teorema.

Se il centro di proiezione si allontanasse a distanza infinita nella direzione dell'asse delle z, dovremmo integrare il sistema

$$1:0:1::r:s:t\,,$$

da cui in primo luogo si ha

$$z = f_1(x) + f_2(y)$$

ed in seguito

$$z = a(x^2 + y^2) + bx + cy + d\,;$$

la superficie è un paraboloide segato dai piani $z = \text{cost}$ in sezioni circolari; e ciò rientra, come caso limite, nel teorema generale. La espressione del teorema diretto ed inverso precedentemente enunciato mi venne fatta conoscere dal prof. Luigi Bianchi.

Ci proponiamo ora la seguente questione: Quali superficie S possono proiettarsi in modo conforme su altre superficie S'?

Posto il centro di proiezione nella origine, se $z = z(xy)$ è la equazione di S, il punto di S' imagine del punto (xyz) di S sarà

$$x' = \varrho x \qquad y' = \varrho y \qquad z' = \varrho z$$

ed avremo

$$\mathrm{E} = 1 + p^2 \qquad \mathrm{F} = pq \qquad \mathrm{G} = 1 + q^2$$

$$\mathrm{E}' = (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)^2 + 2\varrho(x + pz)\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \varrho^2(1 + p^2)$$

$$\mathrm{F}' = (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \varrho(x + pz)\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \varrho(y + qz)\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \varrho^2 pq$$

$$\mathrm{G}' = (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)^2 + 2\varrho(y + qz)\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \varrho^2(1 + q^2)$$

Notiamo poi che in forma analitica il problema propostoci è quello di risolvere il sistema

$$\mathrm{E}:\mathrm{F}:\mathrm{G}::\mathrm{E}':\mathrm{F}':\mathrm{G}',$$

ossia: posto

$$k = \lg \varrho \qquad \mathrm{R} = \lg(x^2 + y^2 + z^2)$$

quello della risoluzione del sistema

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu(1+p^2) &= \frac{\partial k}{\partial x}\left(\frac{\partial k}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\right)\\ 2\mu\, pq &= \frac{\partial k}{\partial x}\left(\frac{\partial k}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}\right)+\frac{\partial k}{\partial y}\left(\frac{\partial k}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\right)\\ \mu(1+q^2) &= \frac{\partial k}{\partial y}\left(\frac{\partial k}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

La ipotesi che μ o una delle $\frac{\partial k}{\partial x}\,\frac{\partial k}{\partial y}$ siano nulle porta per conseguenza

$$\frac{\partial k}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial k}{\partial y}=0 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{\partial k}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial k}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}=0\,.$$

Nel primo caso, essendo $k=\text{cost}$, si avrebbe una similitudine e nel secondo una inversione per raggi vettori reciproci. Esclusi questi due casi dalle (2) ricaviamo

$$2pq=\frac{\partial k}{\partial y}\,\frac{1+p^2}{\frac{\partial k}{\partial x}}+\frac{\partial k}{\partial x}\,\frac{1+q^2}{\frac{\partial k}{\partial y}}\,,$$

ossia

$$(3)\qquad \left|\frac{\frac{\partial k}{\partial x}}{\frac{\partial k}{\partial y}}\right|^2(1+q^2)-2pq\,\frac{\frac{\partial k}{\partial x}}{\frac{\partial k}{\partial y}}+(1+q^2)=0$$

da cui

$$\frac{\frac{\partial k}{\partial x}}{\frac{\partial k}{\partial y}}=\frac{pq\pm\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}\,.$$

Dividendo poi la prima per la terza delle formole (2) ottengo

$$(4)\qquad \frac{\frac{\partial k}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}}{\frac{\partial k}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}}=\frac{1+p^2}{1+q^2}\;\frac{1+q^2}{pq\pm\sqrt{-1-p^2-q^2}}=\frac{pq\mp\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}\,.$$

Notiamo intanto come la (3) o la (4) indifferentemente ci forniscono il teorema:

L'unico caso in cui una superficie reale S *può proiettarsi in modo conforme su di un'altra* S′ *pure reale si verifica quando* S′ *sta con la* S *in relazione di similitudine o d'inversione per raggi vettori reciproci rispetto al centro di proiezione.*

Passando al campo imaginario dalle (3) e (4) otteniamo

$$\frac{\partial k}{\partial x}=\frac{(1+p^2)\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}-pq\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}}{\pm 2i\sqrt{1+p^2+q^2}}-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}=\frac{\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}}{\pm 2i\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial k}{\partial y}=\frac{(1+q^2)\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}-pq\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}}{\mp 2i\sqrt{1+p^2+q^2}}-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}=\frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}}{\mp 2i\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}$$

e le condizioni d'integrabilità per il binomio $\frac{\partial k}{\partial x}dx+\frac{\partial k}{\partial y}dy$ ci danno per per la S la nota equazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}=0$$

essa ci dice che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie S ammetta, oltre alle proiezioni per similitudine ed a quelle per inversione reciproca, altre proiezioni conformi su superficie S′ (imaginarie se la S è reale), è che le sfere aventi il centro nel punto di proiezione segnino sopra S un sistema isotermo di linee ed il logaritmo della distanza di un punto variabile della superficie dal centro di proiezione sia parametro d'isometria.

In tale caso, ridotto l'elemento lineare di S alla forma isoterma

$$\lambda(d\mathrm{R}^2+d\Psi^2)$$

si avrà

$$k=\frac{\pm\Psi}{2i}-\mathrm{R}\qquad \varrho=\frac{e^{\mp\frac{\Psi i}{2}}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Notiamo poi come se il centro di proiezione si allontana all'infinito da S, la serie di linee sferiche concentriche costituenti sistema isotermo sulla superficie S tendono a divenire linee piane parallele costituenti un sistema isotermo.

Trattiamo questo caso notevole per via diretta:

Assunta la z nella direzione della proiezione, siano $z=z(xy)$ e $\vartheta=\vartheta(xy)$ le equazioni delle superficie S ed S′; avremo

$$\mu(1+p^2)=1+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)^2\qquad \mu pq=\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\qquad \mu(1+q^2)=\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2+1$$

e da queste ricavasi facilmente

$$(\mu(1+p^2)-1)\,(\mu(1+q^2)-1)-\mu^2 p^2 q^2=0$$

ossia

$$\mu^2(1+p^2+q^2)-\mu(2+p^2+q^2)+1=0\,.$$

Questa equazione in μ è soddisfatta da $\mu=1$ e $\mu=\dfrac{1}{1+p^2+q^2}$.

Trascurando la prima soluzione, che porta all'identità di S con S', abbiamo

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\frac{\mp iq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\qquad\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=\frac{\pm ip}{\sqrt{1+q^2+p^2}}$$

e le condizioni d'integrabilità mi portano alla nota equazione differenziale delle superficie minime. Da ciò ritroviamo indirettamente la proprietà caratteristica (Beltrami) delle superficie minime che si enuncia: *In ogni superficie minima le sezioni fatte con una serie di piani paralleli appartengono ad un sistema isotermo e la distanza di un piano variabile nella serie da un piano fisso è parametro d'isometria.*

Fisica. — *Sul volume specifico dei liquidi a pressione infinitamente grande.* Nota del prof. Stefano Pagliani, presentata dal Socio Blaserna.

O. Tumlirz in una Memoria sulla legge di compressibilità dei liquidi [1] deduce dalla nota equazione di Van der Waals, ridotta alla sua forma più semplice per il caso d'un vapore molto rarefatto:

1) $$p\,(\nu-a)=\mathrm{RT}$$

due espressioni, l'una del coefficiente di compressibilità dei liquidi, l'altra della variazione di volume specifico colla pressione, in funzione del peso molecolare della sostanza.

Dalla precedente equazione infatti si ha:

$$\frac{1}{\nu}\left(\frac{\delta\nu}{\delta p}\right)\mathrm{T}=-\frac{(\nu-a)^2}{\mathrm{RT}\nu}$$

(1) Sitzungsberichte d. Kais. Akad. d. Wissenschaften. Wien, Band CIX, anno 1900.