ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 febbraio 1902.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Una estensione del metodo di Eulero-Laplace per l'integrazione di una classe di equazioni a derivate parziali del secondo ordine*. Memoria del Socio ULISSE DINI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Meccanica. — *Sul principio delle immagini di Thomson e le equazioni dell'elasticità*. Nota del Corrisp. C. SOMIGLIANA.

Geologia. — *I terreni eocenici presso Bribir in Croazia* Nota del Socio C. DE STEFANI e del dott. G. DAINELLI.

Le due precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre*. Nota di FRANCESCO SEVERI, presentata dal Socio C. SEGRE.

La ricerca delle condizioni perchè una forma, particolarmente ternaria, si possa esprimere come combinazione lineare di altre due forme date, ha occupato molti geometri, e fra i più insigni.

Ai noti lavori, fondamentali, di Nöther, han fatto seguito altri (di Nöther stesso, di Voss, Stickelberger, Zeuthen, Bertini, Brill, ecc.) nei quali il problema fu considerato dal punto di vista puramente algebrico ed anche sotto altri aspetti.

Recentemente nei Mathematische Annalen, i quali accolsero la maggior parte dei lavori precedenti, vide la luce una breve Nota della sig.[na] Scott ([1]), nella quale è dimostrato il « *Fundamentalsatz* » di Nöther, per le forme ternarie, con mezzi molto semplici.

1. Date h ($\leq r$) forme $F_1, F_2, \dots F_h$ delle $r+1$ variabili $x_0, x_1, \dots, x_r$, supposto che le equazioni

$$
(1) \qquad F_1 = 0, \dots, F_h = 0, \quad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \dots\dots\dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_r} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \frac{\partial F_h}{\partial x_0} & \dots\dots\dots & \frac{\partial F_h}{\partial x_r} \end{matrix} \right\| = 0
$$

abbiamo meno che ∞^{r-h} soluzioni comuni, trovare le condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma F, delle medesime variabili, si possa esprimere come combinazione lineare di $F_1, F_2, \dots, F_h$; ossia affinchè esistano certe forme $A_1, A_2, \dots, A_h$ in guisa che:

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \dots + A_h F_h .$$

Tale è il problema che ci occuperà nella presente Nota.

Esso assume un aspetto geometrico quando $x_0, x_1, \dots, x_r$, s'interpretino come coordinate omogenee di punto in uno spazio S_r. Alla totalità delle soluzioni dell'equazione $F_1 = 0$ viene a corrispondere una ∞^{r-1} di punti dello S_r, i quali diremo costituire una *ipersuperficie* ([2]), che denoteremo con la lettera $\mathbf{F}_1$; e analogamente per le equazioni $F_2 = 0, \dots, F_h = 0$.

Mentre la forma F_1 determina $\mathbf{F}_1$, a questa corrispondono infinite forme che differiscono tra loro per fattori costanti.

Se in un punto comune a $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_h$ sono soddisfatte le equazioni $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| = 0$, $\begin{pmatrix} i = 1, \dots, h \\ j = 0, \dots, r \end{pmatrix}$, quel punto o sarà multiplo per qualcuna delle $\mathbf{F}$, oppure in esso gli iperpiani tangenti alle $\mathbf{F}$ saranno linearmente dipendenti; e quindi o il punto sarà multiplo per la varietà Φ comune alle $\mathbf{F}$, oppure apparterrà ad una varietà, più che $r-h$ volte estesa, costituita da punti comuni alle $\mathbf{F}$. Questa osservazione prova che se le equazioni (1) hanno meno che ∞^{r-h} soluzioni, la varietà Φ comune alle $\mathbf{F}$ sarà precisamente di dimensione $r-h$ e non avrà parti multiple ([3]), potendo del resto possedere

([1]) *A proof of Nöther's fundamental Theorem* (Math. Ann., Bd. 52, pag. 593 [1899]).

([2]) Non adoperiamo, come si usa anche di fare, la parola *forma* per indicare l'insieme delle soluzioni di $F_1 = 0$, e analoghe, perchè *in questo lavoro* è utile non confondere la concezione della forma F_1, con la concezione della totalità de' suoi zeri.

([3]) Ora e nel seguito parlando di *parte* di una varietà, s'intenderà di parlare di una varietà di *ugual dimensione*, in essa contenuta.

singolarità qualunque; e viceversa. Sicchè geometricamente le condizioni a cui sono assoggettate le F si traducono in ciò che *la varietà Φ è di dimensione $r - h$ e non ha parti multiple.*

2. Per rispondere alla domanda che abbiam fatto al numero precedente, ci occorreranno alcune nozioni sulla teoria dei moduli, e, per comodità del lettore, le riuniremo qui [1].

Si dice che un sistema illimitato di forme costituisce un *modulo* quando combinando linearmente un numero qualsiasi di forme del sistema si ottiene una forma di questo.

Si dimostra allora [2] che tra le forme di un modulo se ne può sempre trovare un numero finito $F_1, \dots, F_h$, talchè ogni forma F del modulo possa esprimersi come combinazione lineare di quelle:

$$F \equiv A_1 F_1 + \dots + A_h F_h .$$

Le forme $F_1, \dots, F_h$ posson dirsi gli *elementi fondamentali* del modulo, che s'indicherà con $(F_1, F_2, \dots, F_h)$.

Interpretando le variabili $x_0, \dots, x_r$, delle quali le F son funzioni, come coordinate di punti in uno S_r, avremo le ipersuperficie $F_1, \dots, F_h$ corrispondenti agli elementi fondamentali, e se c'è una varietà M comune alle F potrà chiamarsi la *varietà base* del modulo.

Considerando la totalità delle ipersuperficie passanti per M [3], verremo a considerare in corrispondenza un certo sistema di forme, il quale subito si scorge essere un modulo: bisogna però ben badare di non confondere questo modulo col modulo $(F_1, F_2, \dots, F_h)$; ci saranno dei casi in cui i due moduli coincidono, ma è facile persuadersi sopra esempî, che non è sempre così.

Nella Memoria citata di Hilbert [4] si dimostra inoltre che il numero $\chi(l)$ delle condizioni indipendenti che s'impongono ad una forma d'ordine l (ai suoi coefficienti), obbligandola ad appartenere ad un certo modulo, se l è abbastanza grande, si rappresenta così:

$$\chi(l) = \chi_0 + \chi_1 \binom{l}{1} + \chi_2 \binom{l}{2} + \dots + \chi_d \binom{l}{d},$$

ove $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_d$ sono certi numeri, indipendenti da l, caratteristici del modulo dato, del quale $\chi(l)$ si chiama la *funzione caratteristica.*

[1] Vedasi l'importante Memoria di Hilbert, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen* (Math. Ann., Bd. XXXVI, pag. 473 [1890]). Ivi si troveranno le citazioni relative ai lavori anteriori di Kronecker, Dedekind e Weber.

[2] Hilbert, loc. cit., pag. 479.

[3] Dicendo « ipersuperficie *passante* per M » intendiamo, come è d'uso nella geometria iperspaziale, alludere ad una ipersuperficie corrispondente ad una forma che si annulla in tutti i punti di M, senza che sia *necessariamente* soddisfatta qualche altra condizione circa l'annullarsi della forma stessa nei punti di M.

[4] Ved. a pag. 512.

3. La questione del n. 1 è risoluta dal teorema seguente:

Se le ipersuperficie $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_h$ $(h \leq r)$ *corrispondenti alle forme* $F_1, \dots, F_h$ *delle* $r+1$ *variabili* $x_0, \dots, x_r$, *si tagliano in una varietà di dimensione* $r-h$, *priva di parti multiple, la condizione necessaria e sufficiente perchè una ipersuperficie* $\mathbf{F}$ *corrisponda ad una forma* F *tale che*

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \dots + A_h F_h ,$$

le $A_1, \dots, A_h$ *essendo forme di convenienti ordini, è che* $\mathbf{F}$ *passi per la varietà comune ad* $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_h$ (¹).

Insieme alla proposizione enunciata noi dimostreremo quest'altra:

La funzione caratteristica del modulo $(F_1, F_2 \dots, F_h)$ *ove* $F_1, \dots, F_h$ *sono* $h\,(\leq r)$ *forme (di* $r+1$ *variabili), rispettivamente degli ordini* $n_1, n_2, \dots, n_h$, *alle quali corrispondono le ipersuperficie* $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_h$ *intersecantesi secondo una varietà* $r-h$ *volte estesa e priva di parti multiple, è*:

$$\binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \\ + \sum \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \dots + (-1)^h \binom{l-n_1-\dots-n_h+r}{r}$$

ove i sommatori s'estendono alle combinazioni semplici di 1ª, 2ª, ... $(h-1)$ª *classe degli indici* $1, 2, \dots, h$ (²).

La dimostrazione delle due proposizioni antecedenti si farà simultaneamente e per induzione completa. Si osservi che l'un teorema e l'altro sono veri quando $h = 1$; perciò li avremo dimostrati in ogni caso quando, ammettendoli veri per $h-1$ forme, di un numero qualsiasi di variabili, riusciremo a dimostrarli anche per h forme.

(¹) Nella Memoria di Hilbert, *Ueber die vollen Invariantensysteme* (Math. Annalen, Bd. 42 [1892], ved. a pag. 320), si dimostra un teorema di cui è caso particolare il seguente: *Se una forma* F *di* $x_0, x_1, \dots, x_r$ *si annulla per gli stessi valori delle* x *per i quali si annullano simultaneamente le forme* $F_1, \dots, F_h$ *delle medesime variabili, si può sempre determinare un numero intero* s *tale che* $F^s \equiv A_1 F_1 + \cdot + A_h F_h$.

Nella Nota, di poco anteriore, del prof. Bertini, *Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2), t. XXIV [1891]) il numero s, di cui parla il teorema precedente, è determinato quando $h = 2$ e F, F_1, F_2 son forme ternarie. Il teorema da noi dato nel testo dice che quando $h \leq r$ e le equazioni $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| = 0$ passano per meno che ∞^{r-h} zeri di $F_1, \dots, F_h$, il numero s di Hilbert è uguale ad 1.

(²) Nella Memoria di Wirtinger, *Untersuchungen über Thetafunctionen*, Leipzig, Teubner 1895, a pag. 20, trovasi una formola che esprime la funzione caratteristica della intersezione di una varietà, di data funzione caratteristica, con un certo numero di forme generiche. Ma la dimostrazione della formola suddetta mi sembra in qualche punto dubbia, sicchè non ne ho fatto uso.

4. Le ipersuperficie $F_1, \ldots, F_h$ di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_h$, e di equazioni $F_1 = 0, \ldots, F_h = 0$ s'intersechino secondo la varietà Φ, ad $r - h$ dimensioni, e senza parti multiple.

Una ipersuperficie F, d'ordine l, insieme ad un iperpiano che tagli Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple, corrisponda ad una forma appartenente al modulo $(F_1, \ldots, F_h)$; allora io dico che anche *la forma* F, *corrispondente a* F, *appartiene a questo modulo.*

Supponiamo che l'iperpiano $x_0 = 0$ sia generico in guisa che tagli Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple; per ipotesi la forma $x_0 F$ apparterrà allora al modulo $(F_1, \ldots, F_h)$, ossia avremo:

$$(1) \qquad x_0 F \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h,$$

donde:

$$A_1(0, x_1, \ldots, x_r) F_1(0, x_1, \ldots, x_r) + \ldots + A_h(0, x_1, \ldots, x_r) F_h(0, x_1, \ldots, x_r) \equiv 0,$$

dalla quale rilevasi che alla forma $A_1(0, x_1, \ldots, x_r) F_1(0, x_1, \ldots, x_r)$ corrisponderà una ipersuperficie passante per la M_{r-h}, *senza parti multiple*, comune alle ipersuperficie, che nell' iperpiano $x_0 = 0$, son determinate dalle forme $F_2, \ldots, F_h$, delle quali (al pari della F_1) nessuna, nelle nostre ipotesi, si annulla identicamente ponendovi $x_0 = 0$. Siccome la sezione di F_1 con $x_0 = 0$ non passa per la suddetta M_{r-h}, chè altrimenti $x_0 = 0$ secherebbe Φ secondo una varietà più che $r - h - 1$ volte estesa, dovrà l'ipersuperficie corrispondente ad $A_1(0, x_1, \ldots, x_r)$ passare per la M_{r-h} più volte nominata; e, pel teorema ammesso per $h - 1$ forme, sarà:

$$A_1(0, x_1, \ldots, x_r) \equiv B_2(x_1, \ldots, x_r) F_2(0, x_1, \ldots, x_r) + \cdots + B_h(x_1, \ldots, x_r) F_h(0, x_1, \ldots, x_r),$$

ossia:

$$A_1(x_0, x_1, \ldots, x_r) \equiv B_2(x_1, \ldots, x_r) F_2(x_0, x_1, \ldots x_r) + \cdots + B_h(x_1, \ldots, x_r) F_h(x_0, \ldots, x_r) + x_0 A_1'(x_0, \ldots, x_r).$$

Sostituendo nella (1), verrà:

$$x_0 F \equiv x_0 A_1' F_1 + (A_2 + B_2 F_1) F_2 + \cdots + (A_h + B_h F_1) F_h,$$

la quale prova che la ipersuperficie corrispondente alla forma $x_0(F - A_1' F_1)$ passa per la M_{r-h+1}, *priva di parti multiple*, comune a $F_2, \ldots, F_h$. Siccome $x_0 = 0$ non passa per la M_{r-h+1} suddetta, ci passerà l'ipersuperficie di equazione $F - A_1' F_1 = 0$, ossia, sempre pel teorema ammesso per $h - 1$ forme, $F - A_1' F_1$ apparterrà al modulo $(F_2, \ldots, F_h)$:

$$F - A_1' F_1 \equiv A_2' F_2 + \cdots + A_h' F_h,$$

donde:

$$F \equiv A_1' F_1 + A_2' F_2 + \ldots + A_h' F_h,$$

che dimostra quanto abbiamo enunciato al principio di questo numero.

5. Per l'ipotesi fatta sulla Φ, comune a $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_h$, le $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_{h-1}$, come già abbiamo osservato, s'intersecheranno secondo una varietà ψ, ad $r-h+1$ dimensioni, priva di parti multiple.

Il modulo $(F_1, \ldots, F_h)$, di cui indichiamo con $\chi_1(l)$ la funzione caratteristica, è il « *grösste gemeinsame Modul* » (1) rispetto ai due moduli (F_h) e $(F_1, \ldots, F_{h-1})$, dei quali sono $\binom{l+r}{r}-\binom{l-n_h+r}{r}$ e $\chi(l)$ rispettivamente le funzioni caratteristiche. Il « *kleinste enthaltende Modul* » dei due (F_h) e $(F_1, \ldots, F_{h-1})$, ossia il sistema delle forme appartenenti contemporaneamente ai moduli suddetti, è costituito dalle forme B tali che:

$$B \equiv A_h F_h \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_{h-1} F_{h-1}.$$

Ad ogni tal forma B risponderà una ipersuperficie $\mathbf{B}$ passante per ψ; e siccome la ipersuperficie $\mathbf{F}_h$ non passa per ψ, dovrà la $\mathbf{A}_h$ passare per ψ, e *quindi*, pel teorema ammesso per $h-1$ forme, sarà A_h del modulo $(F_1, .., F_{h-1})$; ossia il kleinste enthaltende Modul, del quale parlavamo, è, nelle nostre ipotesi $(F_1 F_h, \ldots, F_{h-1} F_h)$. Una forma d'ordine l di questo modulo dipende da tante costanti quante sono quelle contenute in una forma d'ordine $l-n_h$ del modulo $(F_1, \ldots, F_{h-1})$, sicchè la funzione caratteristica del modulo suddetto è $\chi(l-n_h)+\binom{l+r}{r}-\binom{l-n_h+r}{r}$.

Applicando la relazione fondamentale di Hilbert (pag. 519), avremo:

$$\chi(l)+\binom{l+r}{r}-\binom{l-n_h+r}{r}=\chi_1(l)+\chi(l-n_h)+ \\ +\binom{l+r}{r}-\binom{l-n_h+r}{r},$$

donde, in virtù della espressione ammessa per $\chi(l)$, si trae:

$$\chi_1(l)=\binom{l+r}{r}-\sum\binom{l-n_i+r}{r}+\sum\binom{l-n_i-n_k+r}{r}-\cdots+ \\ +(-1)^h\binom{l-n_1-\ldots-n_h+r}{r},$$

ove i sommatorî si estendono alle combinazioni semplici di 1ª, 2ª, ..., $(h-1)$ª classe degli indici $1, 2, \ldots h$.

6. Suppongasi $r=h$. In tal caso è facile vedere che se nella $\chi_1(l)$ si pone una qualunque delle n uguale a 0, i termini si elidono a due a due, e si ha $\chi_1(l)=0$. Siccome $\chi_1(l)$ è funzione intera di grado h nelle $n_1, n_2, \ldots, n_h$, si deduce $\chi_1(l)=C n_1 n_2 \ldots n_h$, essendo C indipendente da $n_1, \ldots, n_h$. Esa-

(1) Hilbert, loc. cit., pag. 517.

minando poi l'espressione trovata di $\chi(l)$ si vede che in essa il coefficiente di $n_1 \dots n_h$ è 1. Dunque:

$$\chi_1(l) = n_1 n_2 \dots n_h .$$

Ciò posto, nelle ipotesi nostre, le ipersuperficie $F_1, \dots, F_h$ si tagliano in $n_1 n_2 \dots n_h$ punti P tutti distinti. Questi punti alle ipersuperficie d'ordine $l \geq n_1 \dots n_h - 1$ obbligate a contenerli, impongono $n_1 n_2 \dots n_h$ condizioni semplici, perchè è possibile costruire una ipersuperficie d'ordine l per $n_1 n_2 \dots n_h - 1$ punti P e non pel rimanente; p. e. mediante $n_1 n_2 \dots n_h - 1$ iperpiani per altrettanti punti P e una ipersuperficie generica d'ordine $l - n_1 \dots n_h + 1$.

Sicchè le ipersuperficie d'ordine $l \geq n_1 \dots n_h - 1$ passanti pei P, formano un sistema lineare di dimensione

$$\binom{l+h}{h} - 1 - n_1 n_2 \dots n_h ;$$

cioè un sistema così esteso come il sistema delle ipersuperficie, pure passanti pei P, che corrispondono a forme d'ordine l, abbastanza alto, appartenenti al modulo $(F_1, \dots, F_h)$. Ne segue che ogni forma $F(x_0, x_1, \dots, x_r)$ d'ordine $l \geq N$, ove N è un conveniente limite, passante per gli $n_1 n_2 \dots n_h$ zeri, tutti distinti, comuni alle forme $F_1(x_0, x_1, \dots, x_r), \dots, F_h(x_0, x_1, \dots, x_r)$, appartiene al modulo $(F_1, \dots, F_h)$ (¹).

Se F è una forma d'ordine $N - 1$ passante per gli zeri comuni a $F_1, \dots, F_h$, considerandola insieme ad una forma lineare generica, avremo una forma d'ordine N passante per gli zeri comuni a $F_1, \dots, F_h$, e quindi appartenente al modulo $(F_1, \dots, F_h)$. Ma allora per la proposizione del n. 4 anche F apparterrà a questo modulo. Analogamente dalle forme di ordine $N - 1$ si passa a quelle di ordine $N - 2$, etc. Onde si può enunciare:

Ogni forma $F(x_0, \dots, x_r)$ *passante per gli* $n_1 n_2 \dots n_h$ *zeri, tutti distinti, comuni alle forme* $F_1, \dots, F_h$, *è del modulo* $(F_1, \dots, F_h)$.

7. Infine, sia $r = h + k$ $(k \geq 1)$, e supponiamo di aver dimostrato che se h forme delle r variabili $x_1, \dots, x_r$, corrispondono ad altrettante ipersuperficie che si secano secondo una M_{r-h-1} priva di parti multiple, ogni forma di $x_1, \dots, x_r$, corrispondente a una ipersuperficie per questa M_{r-h-1}, appartiene al modulo delle h forme primitive; il che (grazie alla proposizione ammessa per $h - 1$ forme) si è dimostrato quando $k = 1$, al numero precedente.

Le ipersuperficie $F_1, \dots, F_h$ di ordini $n_1, \dots, n_h$, corrispondenti alle forme $F_1, \dots, F_h$, si sechino secondo una varietà Φ di dimensione $r - h$,

(¹) Questo ragionamento è analogo a quello fatto dalla Scott (loc. cit.), nel caso di due forme ternarie.

priva di parti multiple, e supponiamo che l'iperpiano $x_0 = 0$ sechi Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple. Se F è una ipersuperficie, di ordine l, passante per Φ, considerando le sezioni di $F, F_1, \ldots, F_h$ con $x_0 = 0$ si potrà scrivere, nelle nostre ipotesi,

$$F(0, x_1, \ldots, x_r) \equiv A_1(x_1, \ldots, x_r) F_1(0, x_1, \ldots, x_r) + \cdots + A_h(x_1, \ldots, x_r) F_h(0, x_1, \ldots, x_r),$$

donde:

$$F(x_0, \ldots, x_r) \equiv A_1(x_1, \ldots, x_r) F_1(x_0, x_1, \ldots, x_r) + \cdots + A_h(x_1, \ldots, x_r) F_h(x_0, x_1, \ldots, x_r) + \\ + x_0 F'(x_0, x_1, \ldots, x_r),$$

la quale mostra che la ipersuperficie F', di ordine $l-1$, passa per Φ.

Se $l = m$, essendo m l'ordine minimo delle ipersuperficie passanti per Φ, dovrà dunque essere $F' \equiv 0$; se poi $l = m + q \; (q > 0)$, ragionando su F' come su F, e così di seguito, avremo una successione di forme $F, F', F'', \ldots$, corrispondenti ad altrettante ipersuperficie passanti per Φ, e di ordini decrescenti, di una unità alla volta. Al più questa successione di forme si spingerà fino alla forma $F^{(q)}$, giacchè la forma successiva $F^{(q+1)}$, per essere di ordine $m-1$, sarà identicamente nulla. Ne viene che $F^{(q)}, \ldots, F'', F', F$ apparterranno al modulo $(F_1, \ldots, F_h)$.

I teoremi enunciati al n. 3 risultano così pienamente dimostrati.

8. Una conseguenza immediata del primo di questi teoremi è che il modulo $(F_1, \ldots, F_h)$, quando le forme F_i corrispondano ad h ipersuperficie che si taglino secondo una varietà Φ_{r-h}, priva di parti multiple, coincide col modulo delle forme a cui corrispondono ipersuperficie per Φ.

Dunque pel secondo dei teoremi del n. 3 abbiamo:

La postulazione di una varietà Φ_{r-h}, priva di parti multiple, ma avente singolarità qualsiasi, che sia completa intersezione di h ipersuperficie di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_h$, per le ipersuperficie di ordine l abbastanza alto, è espressa da

$$\binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \sum \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \cdots + \\ + (-1)^h \binom{l-n_1-\cdots-n_h+r}{r},$$

i sommatori essendo estesi come al n. 3.

Osservazioni sul caso di due forme.

9. Il caso di due forme si può trattare particolarizzando i ragionamenti fatti in generale, per una via del tutto elementare, senza neppure ricorrere alla teoria dei moduli. Basta osservare che, nel caso di due forme, la dimostrazione dell'esistenza della funzione caratteristica $\chi(l)$ del modulo (F_1, F_2)

e il calcolo effettivo di essa, si posson condurre molto semplicemente, partendosi dall'ipotesi (più larga di quella che abbiam fatto nel caso generale di un numero qualsiasi di forme) che le due forme non abbiano *fattori comuni*; giacchè allora se una forma F, d'ordine l, è del modulo (F_1, F_2), ossia se

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2$$

ogni altra rappresentazione della F, quando $l \geq n_1 + n_2$, è data dalla identità:

$$F \equiv (A_1 + XF_2) F_1 + (A_2 - XF_1) F_2,$$

ove X è una forma arbitraria di ordine $l - n_1 - n_2$; sicchè il numero delle costanti indipendenti che determinano F, si ottiene togliendo dalla somma dei numeri di costanti che compaiono in A_1 e in A_2, il numero delle costanti che compaiono in X; e quindi:

$$\chi(l) = \binom{l+r}{r} - \left[\binom{l-n_1+r}{r} + \binom{l-n_2+r}{r} - \binom{l-n_1-n_2+r}{r}\right].$$

Il ragionamento del n. 6, nel caso di due forme, ci dà facilmente la dimostrazione della rappresentabilità di una forma ternaria, che passi per gli zeri comuni a due altre, come combinazione lineare di queste, non solo nella ipotesi che le ultime due forme abbian comuni zeri tutti distinti, ma anche nelle ipotesi più generali di Nöther. E infine il ragionamento del n. 7 permette di risalire dal caso di due forme ternarie, al caso di Nöther per due forme qualunque [1].

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali.* Nota del dott. Guido Fubini, presentata dal Socio Dini.

La teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali, non appartenenti alla classe di Fuchs, presenta molte difficoltà, perchè certi elementi, algebrici per le equazioni di Fuchs, sono trascendenti per quelle. Lo scopo, che io ora mi propongo in questa Nota, è di far vedere come lo studio delle equazioni non di Fuchs, possa per certi lati essere immaginato come lo studio di un caso limite delle equazioni di Fuchs. Il metodo consiste nel

[1] Nella *Théorie des fonctions algébriques des deux variables indépendantes* di Picard et Simart, alla pag. 17 del t. II, si estende alle forme quaternarie il *Fundamentalsatz,* deducendolo dall'analogo per le forme ternarie, con un procedimento che si può ripetere per *due* forme qualunque. Ma questo procedimento non è certo più semplice di quello che ci dà in tal caso il ragionamento del n. 7, nè si può estendere facilmente al caso di un numero *qualsiasi* di forme.