ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

e il calcolo effettivo di essa, si posson condurre molto semplicemente, partendosi dall'ipotesi (più larga di quella che abbiam fatto nel caso generale di un numero qualsiasi di forme) che le due forme non abbiano *fattori comuni*; giacchè allora se una forma F, d'ordine l, è del modulo (F_1, F_2), ossia se

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2$$

ogni altra rappresentazione della F, quando $l \geq n_1 + n_2$, è data dalla identità:

$$F \equiv (A_1 + XF_2) F_1 + (A_2 - XF_1) F_2,$$

ove X è una forma arbitraria di ordine $l - n_1 - n_2$; sicchè il numero delle costanti indipendenti che determinano F, si ottiene togliendo dalla somma dei numeri di costanti che compaiono in A_1 e in A_2, il numero delle costanti che compaiono in X; e quindi:

$$\chi(l) = \binom{l+r}{r} - \left[\binom{l-n_1+r}{r} + \binom{l-n_2+r}{r} - \binom{l-n_1-n_2+r}{r}\right].$$

Il ragionamento del n. 6, nel caso di due forme, ci dà facilmente la dimostrazione della rappresentabilità di una forma ternaria, che passi per gli zeri comuni a due altre, come combinazione lineare di queste, non solo nella ipotesi che le ultime due forme abbian comuni zeri tutti distinti, ma anche nelle ipotesi più generali di Nöther. E infine il ragionamento del n. 7 permette di risalire dal caso di due forme ternarie, al caso di Nöther per due forme qualunque [1].

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali.* Nota del dott. Guido Fubini, presentata dal Socio Dini.

La teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali, non appartenenti alla classe di Fuchs, presenta molte difficoltà, perchè certi elementi, algebrici per le equazioni di Fuchs, sono trascendenti per quelle. Lo scopo, che io ora mi propongo in questa Nota, è di far vedere come lo studio delle equazioni non di Fuchs, possa per certi lati essere immaginato come lo studio di un caso limite delle equazioni di Fuchs. Il metodo consiste nel

[1] Nella *Théorie des fonctions algébriques des deux variables indépendantes* di Picard et Simart, alla pag. 17 del t. II, si estende alle forme quaternarie il *Fundamentalsatz*, deducendolo dall'analogo per le forme ternarie, con un procedimento che si può ripetere per *due* forme qualunque. Ma questo procedimento non è certo più semplice di quello che ci dà in tal caso il ragionamento del n. 7, nè si può estendere facilmente al caso di un numero *qualsiasi* di forme.

far sovrapporre i punti singolari di un'equazione Fuchsiana. Noi sappiamo infatti che un'equazione

$$(1) \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n y = 0$$

a coefficienti razionali è o non è appartenente alla classe di Fuchs, secondo che l'ordine di polarità di p_k nei varî punti singolari per l'equazione non supera, o supera il numero k (supposto il punto all'infinito punto non singolare). Ed è ben chiaro che se questo limite fosse superato p. es. in un punto A, noi potremo immaginare che si sia arrivato ad esso, facendo sovrapporre parecchi punti singolari, in cui questi limiti non erano superati. Mi spiegherò con un esempio.

L'equazione:

$$(\alpha) \qquad y'' + \frac{m}{(x-b)^2(x-c)^2} y' + \frac{n}{(x-b)^6(x-c)^4} y = 0$$

dove m, n, b, c sono costanti si può immaginare dedotta dalla:

$$(\beta) \qquad y'' + \frac{m}{(x-b)(x-\beta)(x-c)(x-\gamma)} y' +$$
$$+ \frac{n}{(x-b)^2(x-\beta)^2(x-l)^2(x-c)^2(x-\gamma)^2} y = 0$$

facendo tendere i punti β ed l verso il punto b fino a sovrapporsi a esso, e facendo quindi tendere il punto γ verso il punto c fino a sovrapporsi a c. E si osserva che, mentre la (β) è della classe di Fuchs, la (α) non appartiene alla classe delle equazioni Fuchsiane.

In generale noi stabiliremo il seguente teorema:

Per stabilire la sostituzione lineare che un sistema di integrali della (1) *subisce in un punto* A *singolare non di Fuchs dell'equazione, in cui però le* p_i *non hanno singolarità essenziali e sono monodrome, basterà, nel modo precisato sostituire alla* (1) *un'altra equazione che in luogo del punto singolare* A *abbia altri punti singolari* B, B′ ... *di Fuchs, studiare per questa l'effetto di un giro attorno i punti* B, B′ ..... *e passare quindi al limite facendo coincidere i punti* B, B′ .....

E se le p_i non hanno singolarità essenziali, ossia sono razionali, si potrà ripetere questo procedimento per (1) in tutti i punti singolari non di Fuchs.

Per dimostrare questo teorema, basterà chiaramente dimostrare il lemma seguente:

Sia

$$(2) \quad y^{(n)} + \frac{l_1(x)}{(x-a)^{p_1}(x-b)^{q_1}} y^{(n-1)} + \frac{l_2(x)}{(x-a)^{p_2}(x-b)^{q_2}} y^{(n-2)} + \ldots = 0$$

un'equazione lineare a derivate ordinarie; e siano $l_1(x)$, $l_2(x)$, ... *fun-*

zioni razionali di x, regolari nei punti a, b e indipendenti da b. La sostituzione Σ fondamentale che un sistema di integrali subisce per un giro C chiuso, finito, non intrecciantesi attorno ai punti $x = a$, $x = b$ e a nessun altro punto singolare della (2) *tende a un limite, quando b tende ad a e precisamente alla sostituzione* T *fondamentale per l'equazione*

$$(3)] \qquad y^{(n)} + \frac{l_1}{(x-a)^{p_1+q_1}} y^{(n-1)} + \ldots = 0$$

dovuta a un giro semplice, finito attorno il punto $x = a$ e a nessun altro punto singolare della (3).

La dimostrazione di questo teorema si compie nel modo più semplice per mezzo delle seguenti considerazioni:

I) La sostituzione Σ dovuta al giro C si può anche immaginare come dovuta a un giro attorno a tutti gli altri punti singolari eventuali della (2).

II) Questa sostituzione si può immaginare come prodotto delle sostituzioni dovute ai cappî attorno a ciascuno degli altri punti singolari eventuali, supposti in numero finito.

III) Basterà, per dimostrare il nostro teorema, far vedere che la sostituzione dovuta a uno di questi cappî relativa alla (2), diventa al limite una sostituzione dovuta allo stesso cappio, relativa alla (3).

Dimostriamo dunque quest'ultima asserzione. Per far questo ricorriamo al metodo del prolungamento analitico, che immagineremo proprio eseguito al modo di Weierstrass.

Cioè immagineremo lungo il cappio distribuiti dei cerchietti Γ, in numero finito, non includenti punti singolari della (3) in modo che due cerchietti consecutivi abbiano una parte comune. E di più li sceglieremo in modo che mentre b si avvicina ad a, almeno da un certo punto in poi non includano neppure punti singolari della (2).

Pensiamo gli integrali come funzioni delle variabili x, b. E sia $x = \mathrm{K}$ il centro di uno dei nostri cerchietti. Il punto $x = \mathrm{K}$, $b = a$ è un punto di regolarità per i coefficienti della nostra equazione; quindi, per noti teoremi, noi potremo segnare attorno ad a nel piano complesso di b un intorno Γ' tale che per x variabile nel cerchietto di centro K e per b variabile in Γ', gli integrali siano olomorfi in x, e b. Anzi, poichè i cerchietti Γ sono in numero finito, potremo costruire un intorno Γ' che valga per tutti questi cerchietti. E allora si deduce senz'altro che poichè i coefficienti della sostituzione si deducono dai valori dei detti integrali (a Wronskiano non nullo) e delle loro derivate, essi saranno funzioni analitiche regolari di b nell'intorno Γ'. È perciò lecito il succitato passaggio al limite.

Queste considerazioni, che per maggiore chiarezza abbiamo applicato ai varî cappî, si potevano del resto anche applicare direttamente al giro C.

Sia ora un'equazione con più punti singolari $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(n)}$ [1]. Sdoppiamo ciascuno di essi nel modo descritto in più punti singolari di Fuchs, e siano $A_0^{(k)} A_1^{(k)} \ldots A_{t_k}^{(k)}$ i punti singolari cui ha dato origine il punto $A_0^{(k)}$ (per $k = 1, 2, \ldots n$) dove t_k è un numero intero nullo o positivo. Immaginiamo i valori della variabile complessa in tutti questi nuovi punti singolari funzioni, p. es. lineari, di un parametro ε, tali che per $\varepsilon = 0$ ciascun punto $A_r^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots n$; $r = 1, 2, \ldots t_k$) venga a cadere nel punto $A_0^{(k)}$. Facciamo un giro semplice C attorno ai punti $A_0^{(i)} A_1^{(i)} \ldots A_{t_i}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots m$; $m < n$). Le stesse considerazioni precedenti applicate senza altro al cammino C, che noi naturalmente supponiamo a distanza finita da $A_0^{(i)}$, dimostrano che i coefficienti della sostituzione dovuta al giro C, sono olomorfi nella ε in un piccolo intorno di $\varepsilon = 0$ nel piano complesso di ε. È dunque lecito il passaggio al limite per $\varepsilon = 0$, cosicchè l'effetto dovuto al giro attorno ai punti singolari $A_0^{(i)}$ dell'equazione iniziale si può immaginare come caso limite di quello dovuto al giro attorno ai punti $A_0^{(i)}, A_1^{(i)} \ldots A_{t_i}^{(i)}$ dell'equazione trasformata. Dunque:

Un'equazione differenziale lineare ordinaria a punti singolari di Fuchs si può, per quanto riguarda le sostituzioni che subiscono gli integrali attorno ai punti critici, immaginare limite di un'equazione a soli punti singolari di Fuchs.

Questi teoremi, che mi sembrano notevoli dal punto di vista teorico, hanno anche il vantaggio di potere con un nuovo metodo calcolare la sostituzione dovuta ad un giro attorno a uno o più punti singolari A, nel caso che l'equazione sia a coefficienti razionali. Basta infatti a una tale equazione sostituire nel modo descritto un'equazione a soli punti Fuchsiani singolari e calcolare, per es. col metodo di Fuchs, l'effetto dovuto a un giro per gli integrali di quest'ultima attorno ai punti A e a quei nuovi punti singolari, che si devono poi far tendere ai punti A stessi. Un semplice passaggio al limite, ci darà allora la sostituzione cercata. Questo metodo, che praticameute è certo complicato, non usa però alcun algoritmo di determinanti infiniti o di rappresentazioni conformi.

Fisica terrestre. — *Sopra un sismografo per forti terremoti.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio P. Tacchini.

Dopo aver pubblicato in questi stessi Rendiconti la descrizione di svariati apparecchi sismici, quali più quali meno sensibili, sia per la semplice indicazione delle scosse di terremoto (*sismoscopi*), sia per la misura dell'effettivo movimento del suolo provocato dalle medesime (*zismometrografi*), credo di qualche interesse far conoscere un nuovo strumento, destinato allo

[1] In cui i coefficienti abbiano sole singolarità polari.