ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 febbraio 1902.

Presidenza del Socio anziano L. Luzzatti.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle serie di fattoriali.* Nota del Socio S. Pincherle.

In due recenti comunicazioni all'Accademia delle Scienze di Parigi (¹), il sig. Niels Nielsen richiama l'attenzione sulle serie di fattoriali, dando notevoli condizioni relative alla sviluppabilità delle funzioni in serie della forma

$$(1) \qquad \Sigma\, c_n \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Simili serie, insieme con le analoghe

$$(2) \qquad \Sigma\, c_n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$$

mi sono sempre sembrate meritevoli di un particolare interesse (²), specialmente per una questione che risale al Laplace, ma che è stata ridestata di recente e tiene occupati con successo i moderni analisti, particolarmente i francesi; intendo la questione della relazione fra una serie di potenze ed il coefficiente del suo termine generale considerato come funzione dell'indice:

(¹) Comptes Rendus, T. CXXXIII e CXXXIV, 30 décembre 1901 et 20 janvier 1902.

(²) V. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, T. II, dicembre 1888 e T. XIV, dicembre 1899, e Annali di Matematica, S. III, T. IV, pag. 245.

infatti, per molteplici classi di serie di potenze di z, il coefficiente, considerato come funzione del suo indice x, ammette sviluppi in serie della forma (1) o (2).

A questo proposito mi sia concesso di rilevare una notevole affermazione fatta dal sig. E. Lindelöf in una recente occasione (¹): ed è che bene spesso, più dell' ordine di grandezza dei coefficienti di una serie di potenze, ha importanza, nello studio di tale serie, la forma sotto cui si presenta questo coefficiente come funzione dell' indice. Il sig. Lindelöf limita questa osservazione alle serie rappresentanti funzioni intere, ma la portata di essa mi sembra generale.

In questa prima Nota mi fermerò sulla questione della convergenza delle serie della forma (1) e (2), dandone la condizione con qualche maggiore precisione di quanto si faccia per solito e rilevando, da questa condizione, un fatto che mi sembra non sia stato per anco avvertito nella sua generalità, sebbene assai degno di considerazione.

1. Si consideri una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)}$$

dove $c_0, c_1, \dots c_n, \dots$ è una successione qualsivoglia di numeri reali o complessi, ed x, y sono due variabili complesse. Si formi la successione

$$\frac{\log |c_n|}{\log n} \tag{4}$$

e sia k il suo massimo limite (²); k è un numero reale finito od infinito. Indicando con $\mathrm{R}(a)$ la parte reale di a, escludendo per x ed y valori interi negativi, e prendendo

$$\mathrm{R}(x) < \mathrm{R}(y) - k - 1, \tag{5}$$

la serie (3) è assolutamente convergente.

(¹) Comptes Rendus, T. CXXXIII, 30 décembre 1901.

(²) Intendo con ciò quel numero che il Cauchy chiamava *la plus grande des limites*. Esso coincide col massimo dell' insieme derivato di (4), tranne il caso in cui i numeri di (4) hanno un massimo m non appartenente all' insieme derivato il quale si presenti infinite volte nella successione stessa: in tale caso è questo numero m che va preso come massimo limite. (V. Hadamard, *la Série de Taylor*, Paris, C. Naud, 1901, pag. 15). È da notare come la successione (4) si presenti (id., ibid., pag. 45) nello studio di una serie di Taylor sulla sua circonferenza di convergenza.

Infatti, verificata la (5), si potrà determinare un numero ε positivo abbastanza piccolo perchè sia anche

$$(5') \qquad R(x) < R(y) - k - 1 - \varepsilon .$$

Ora, da un valore dell'indice n in poi, segue, dall'essere k il massimo limite di (4), che è

$$|c_n| < n^{k+\varepsilon}.$$

Inoltre, dalla teoria della funzione Γ segue che

$$\lim_{n=\infty} \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!\, n^{x-1}} = \frac{1}{\Gamma(x)},$$

onde risulta che, essendo m un numero positivo finito, si ha

$$\left| \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)} \right| < m n^{R(x-y)}.$$

Ne viene

$$\left| c_n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)} \right| < m n^{R(x-y)+k+\varepsilon},$$

e poichè, per la (5'), l'esponente di n è minore di -1, la serie (3) è assolutamente convergente.

Prendendo invece

$$(6) \qquad R(x) > R(y) - k ,$$

la serie (3) è divergente. Infatti, per essere k il massimo limite di (4), per infiniti valori di n si ha

$$|c_n| > n^{k-\varepsilon'},$$

dove ε' si è preso abbastanza piccolo perchè sia anche

$$R(x) > R(y) - k + \varepsilon' ,$$

E poichè, essendo m' un numero positivo finito e non nullo, si ha, per la formula citata della teoria della funzione Γ, che è per i detti valori di n:

$$\left| c_n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)} \right| > m' n^{R(x-y)+k-\varepsilon'}$$

dove l'esponente di n è positivo, ne viene che infiniti termini della (3) hanno il modulo superiore ai numeri di un sistema crescente indefinitamente, e quindi la serie stessa è divergente.

2. Supposto fissato y, risulta dal teorema precedente che la serie (3) è convergente assolutamente ed uniformemente rispetto ad x, a sinistra della parallela all'asse immaginario condotta per il punto $x = y - k - 1$, ed è divergente a destra della parallela condotta per il punto $x = y - k$. Fra queste due parallele è compresa una striscia, che si può chiamare **striscia neutra**; il teorema del numero precedente non c'insegna quale sia il comportamento della (3) per i valori della x compresi entro quella striscia. Ma assoggettando i coefficienti c_n a qualche altra condizione, anche se assai poco restrittiva; p. es., supponendo che sia

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + \frac{k + ih}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}, \tag{7}$$

dove ε_n va a zero con $n = \infty$ e k, h sono numeri reali, il primo dei quali, come è facile vedere, non differisce dal massimo limite di $\frac{\log|c_n|}{\log n}$, si può dire qualche cosa di più circa al comportamento delle (3) quando x è preso entro alla striscia neutra. Infatti, posto

$$u_n = c_n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)},$$

viene

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{k + ih + x - y}{n} + \frac{\varepsilon'_n}{n},$$

e quindi, prendendo i moduli:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 + \frac{k + \mathrm{R}(x-y)}{n} + \frac{\varepsilon''_n}{n},$$

dove ε'_n, ε''_n vanno a zero per $n = \infty$. Ne viene che se è

$$\mathrm{R}(x-y) + k < 0,$$

cioè se si prende x a sinistra della parallela all'asse immaginario condotta per $y - k$, i termini della serie (3) vanno decrescendo in valore assoluto e tendendo a zero. Ciò accade quindi anche nella striscia neutra, oltrecchè nel campo di convergenza, permettendoci in conseguenza di dare facilmente condizioni di convergenza valide in codesta striscia; soltanto, mentre nel campo di convergenza definito da

$$\mathrm{R}(x) - \mathrm{R}(y) < -k - 1$$

la convergenza è assoluta, nella striscia neutra la serie, se convergente, lo è solo semplicemente, come mostra l'applicazione del noto criterio di Raabe.

Ad esempio, ogni serie trigonometrica della forma

$$\Sigma c_n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)} \cos n\theta ,$$

in cui le c_n soddisfano alla condizione (7), è convergente semplicemente (1) per ogni valore di x preso nella striscia neutra e per θ diverso da un multiplo di 2π.

La nota proposizione sulla serie binomiale

$$\Sigma \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!} z^n$$

per $|z|=1$ si deduce facilmente da quanto precede.

3. Le considerazioni precedenti conducono a dividere le serie della forma (3) in tre classi.

Una prima classe è costituita da quelle serie per cui è

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |c_n|}{\log n} = -\infty .$$

Esse sono assolutamente convergenti per tutte le coppie di valori di x e di y. In particolare, appartengono alla detta classe tutte le serie (3) per le quali la successione delle c_n è tale che $\Sigma c_n z^n$ converga in un cerchio di raggio maggiore dell'unità.

Alla seconda classe apparterranno quelle serie per le quali k ha un valore finito. Per ogni valore $\overline{y}$ assegnato ad y, esiste per queste serie, nel piano della variabile x, un campo di convergenza (assoluta), un campo di divergenza, ed una striscia neutra in cui può accadere, in casi estesi, che la serie converga semplicemente. Queste tre regioni sono rispettivamente caratterizzate da

$$\begin{gathered} R(x) < R(\overline{y}) - k - 1 , \\ R(x) > R(\overline{y}) - k , \\ R(\overline{y}) - k - 1 < R(x) < R(\overline{y}) - k . \end{gathered}$$

Infine, formano la terza classe quelle serie per cui si ha $k = +\infty$. Esse sono divergenti per tutti i valori di x e di y. Questo caso si presenta, in

(1) Per un noto teorema; v. p. es. Picard, *Traité d'Analyse*, 2me édition, T. I, pag. 251.

particolare, quando la successione c_n è tale che la serie $\Sigma c_n z^n$ abbia un raggio di convergenza inferiore ad uno.

4. Ad ogni successione data

$$c_0, c_1, c_2, \dots c_n, \dots$$

si può fare corrispondere una serie di potenze $\Sigma c_n x^n$, e ad ogni proprietà della successione corrisponde una proprietà per la funzione analitica definita dalla serie ([1]). Fra queste proprietà, la prima e la più elementare riguarda il cerchio in cui converge la serie di potenze; la sua determinazione è fondata sul più elementare dei criterî di convergenza, quello che considera il massimo limite di $\sqrt[n]{|c_n|}$. A tutte le successioni per le quali questo massimo limite è il medesimo, corrispondono serie di potenze aventi il medesimo raggio di convergenza. Se ora alle potenze si sostituiscono fattoriali; se, per es., nelle serie di potenze aventi l'unità come raggio di convergenza, si sostituisce ad x^n il fattoriale

$$\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!},$$

i campi di convergenza vengono a distinguersi; le serie di fattoriali convergono in aree diverse, le quali vengono a dipendere da un criterio di convergenza più discriminativo del precedente, cioè da quello fondato sulla considerazione del massimo limite di $\dfrac{\log|c_n|}{\log n}$.

La sostituzione dei fattoriali alle potenze nelle serie $\Sigma c_n z^n$ produce dunque, per così dire, una dilatazione nell'insieme di quelle che hanno uno stesso cerchio di convergenza. Un'altra dilatazione si produce, per fatto di quella sostituzione, nel limite fra la regione di convergenza e quella di divergenza; mentre infatti questo limite, nelle serie di potenze, è costituito semplicemente dalla circonferenza di convergenza, esso si dilata, nelle serie di fattoriali, in una striscia compresa fra due parallele all'asse immaginario, quella che abbiamo chiamata striscia neutra.

([1]) È noto dai lavori di Borel, Le Roy ed altri, come anche alle serie di potenze costantemente divergenti si possa fare corrispondere una funzione analitica determinata.