ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

Meccanica. — *Sul principio delle immagini di lord Kelvin e le equazioni dell' elasticità.* Nota del Corrisp. C. SOMIGLIANA.

Non credo sia stato finora osservato che il principio delle immagini di lord Kelvin può essere esteso alle equazioni della elasticità, e conduce, sotto certe condizioni, e in certi casi, alla loro integrazione in campi limitati da piani, analoghi a quelli nei quali esso porta alla soluzione del problema di Dirichlet. Però le condizioni al contorno, che conviene supporre conosciute, non sono quelle che più ordinariamente si considerano, cioè le componenti degli spostamenti o quelle delle forze superficiali esterne, ma parte delle une e parte delle altre, cioè due delle componenti di spostamento ed una di pressione o viceversa. Questi problemi, del resto, vengono di solito considerati come di natura più complessa dei precedenti.

1. Supponiamo che il mezzo elastico, che si considera, sia cristallino ed ammetta il piano $z = 0$ come piano di simmetria. Le considerazioni che seguono sono valide per tutti i mezzi cristallini che godono di questa proprietà, in particolare quindi anche pei mezzi isotropi, e per quelli incompletamente isotropi, che hanno un asse d' isotropia parallelo all' asse delle z.

Il potenziale elastico, quando il piano $z = 0$ è di simmetria, ha la forma

$$\begin{aligned} 2\Pi = {} & c_{11}\, x^2{}_x + c_{22}\, y^2{}_y + c_{33}\, z^2{}_z + 2c_{23}\, y_y\, z_z + 2c_{31}\, z_z\, x_x + 2c_{12}\, x_x\, y_y \\ & + c_{44}\, y^2{}_z + c_{55}\, z^2{}_x + 2c_{54}\, y_z\, z_x \\ & + 2x_y(c_{16}\, x_x + c_{26}\, y_y + c_{36}\, z_z) + c_{66}\, x^2{}_y \end{aligned}$$

e quindi per le componenti di pressione si ha

$$(1) \qquad \begin{cases} -\mathrm{X}_x = c_{11}\, x_x + c_{12}\, y_y + c_{13}\, z_z + c_{16}\, x_y \\ -\mathrm{Y}_y = c_{21}\, x_x + c_{22}\, y_y + c_{23}\, z_z + c_{26}\, x_y \\ -\mathrm{Z}_z = c_{31}\, x_x + c_{32}\, y_y + c_{33}\, z_z + c_{36}\, x_y \\ -\mathrm{Y}_z = c_{44}\, y_z + c_{45}\, z_x \\ -\mathrm{Z}_x = c_{54}\, y_z + c_{55}\, z_x \\ -\mathrm{X}_y = c_{16}\, x_z + c_{26}\, y_y + c_{36}\, z_z + c_{66}\, x_y \end{cases}$$

e le equazioni dell' equilibrio, supposte nulle le forze di massa, sono, come è notissimo,

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{X}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{X}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{X}_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{Y}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{Y}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{Y}_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{Z}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{Z}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{Z}_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Se ora noi facciamo la seguente trasformazione

$$u' = u \qquad x' = x$$
$$v' = v \qquad y' = y$$
$$w' = -w \qquad z' = -z$$

le equazioni (2), a cagione della proprietà di simmetria ammessa, si mutano nelle equazioni formate colle u', v', w', x', y', z' in modo identico a quello con cui le (2) sono formate colle u, v, w, x, y, z. Noi possiamo interpretare questa proprietà anche dicendo: *Se tre funzioni*

$$u = u(x, y, z) \quad v = v(x, y, z) \quad w = w(x, y, z)$$

sono integrali delle equazioni (2), *anche le funzioni*

$$\overline{u} = u(x, y, -z) \quad \overline{v} = v(x, y, -z) \quad \overline{w} = -w(x, y, -z)$$

godono della stessa proprietà.

Cerchiamo ora quali relazioni passano fra le componenti L, M, N delle forze superficiali che mantengono in equilibrio il corpo quando in esso avviene la deformazione u, v, w, e le analoghe $\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$ che adempiono lo stesso ufficio quando nel corpo si ha la deformazione $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$. Per le L, M, N si ha

$$2') \qquad \begin{aligned} L &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \\ M &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) \\ N &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz) \end{aligned}$$

ove n indica la normale diretta verso l'interno del corpo, e per avere le $\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$ dovremo costruire le espressioni analoghe a quelle dei secondi membri formate colle

$$1) \qquad -\overline{X}_x = c_{11}\,\overline{x}_x + c_{12}\,\overline{x}_y + c_{13}\,\overline{z}_z + c_{16}\,\overline{x}_y$$

. . . . . .

In generale quindi non è possibile avere relazioni semplici fra i due sistemi di forze superficiali, se il corpo che si considera ha una forma qualsiasi. Però se esso è limitato dal piano $z = 0$, e formato ad es. dello spazio indefinito che si trova dalla banda positiva di questo piano, tali relazioni si riducono semplicissime.

Infatti se data una funzione $f = f(x, y, z)$, noi formiamo la funzione

$$F = f(x, y, -z)$$

è facile vedere che, per $z = 0$, sono soddisfatte le seguenti relazioni

$$f = F$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e quindi, ricordando le espressioni delle componenti di deformazione, si trova subito che, per $z=0$, sono soddisfatte le relazioni:

$$\overline{x}_x = x_x \qquad \overline{y}_y = y_y \qquad \overline{z}_z = z_z$$
$$\overline{y}_z = -y_z \quad \overline{z}_x = -z_x \quad \overline{x}_y = x_y$$

e quindi a cagione delle (1) anche le seguenti:

$$\overline{X}_x = X_x \qquad \overline{Y}_y = Y_y \qquad \overline{Z}_z = Z_z$$
$$\overline{Y}_z = -Y_z \quad \overline{Z}_x = -Z_x \quad \overline{X}_y = X_y$$

Ora nel caso in cui la superficie che limita il corpo è il piano $z=0$, si ha

$$\cos(nx) = 0 \quad \cos(ny) = 0 \quad \cos(nz) = 1$$

quindi, osservando le (2') ($\overline{1}$), concludiamo subito che si hanno le relazioni

$$\overline{L} = -L \quad \overline{M} = -M \quad \overline{N} = N$$

Riassumendo possiamo dire:

Si abbia un corpo limitato dal piano $z=0$, e la cui struttura cristallina ammetta come piani di simmetria i piani a questo paralleli, e siano

$$\begin{matrix} u(x,y,z) & , & v(x,y,z) & , & w(x,y,z) \\ L & , & M & , & N \end{matrix}$$

gli spostamenti e le corrispondenti forze superficiali che determinano una speciale deformazione elastica del corpo. Il corpo stesso rimarrà ancora in equilibrio, quando in esso avvengono gli spostamenti

$$u(x,y,-z) \ , \ v(x,y,-z) \ , \ -w(x,y,-z)$$

mentre alla superficie sono applicate forze le cui componenti sono

$$-L \ , \ -M \ , \ N.$$

Noi diremo che le due terne integrali u, v, w e $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ si ottengono l'una dall'altra *per riflessione* sul piano $z=0$.

Questo teorema ha, rispetto alle equazioni dell'elasticità considerate, lo stesso valore che il principio delle immagini rispetto all'equazione di Laplace. Vediamo come.

2. Dato un sistema qualsiasi di integrali u, v, w delle equazioni dell'equilibrio considerate, corrispondenti alle forze superficiali L, M, N, poniamo

(3) $$u_1 = u - \overline{u} \quad v_1 = v - \overline{v} \quad w_1 = w - \overline{w}$$

Le u_1, v_1, w_1 costituiranno una nuova terna integrale delle equazioni d'equilibrio, la quale sul piano $z=0$ soddisferà alle condizioni

$$(4) \qquad u_1 = 0 \quad v_1 = 0 \quad N_1 = 0,$$

se chiamiamo L_1, M_1, N_1 le componenti delle forze che applicate sul piano $z=0$ producono gli spostamenti u_1, v_1, w_1.

Analogamente otterremo una nuova terna integrale ponendo

$$(3') \qquad u_2 = u + \bar{u} \quad v_2 = v + \bar{v} \quad w_2 = w + \bar{w}$$

per la quale invece avremo sul piano $z=0$

$$(4') \qquad w_2 = 0 \quad L_2 = 0 \quad M_2 = 0$$

Data dunque una terna integrale qualsiasi, possiamo subito dedurne due altre le quali soddisfano alle condizioni che, sul piano $z=0$, sono nulle le due componenti tangenziali dello spostamento e la componente normale della pressione superficiale, o viceversa sono nulle le due componenti tangenziali della pressione e la componente normale dello spostamento.

Supponiamo che le u, v, w siano regolari in tutto lo spazio $z \geq 0$, all'infuori che in un punto (a, b, c), e siano omogenee di grado -1 nelle variabili $x-a$, $y-b$, $z-c$. La esistenza di tali integrali in generale per le equazioni della elasticità è stata dimostrata in un lavoro recente (*Acta mathematica*, 23, 1900) quantunque si presentino delle difficoltà ad ottenerne espressioni semplici mediante i coefficienti delle equazioni d'equilibrio. Nel caso della isotropia soddisfanno alle condizioni suddette gli spostamenti che si ottengono prendendo per terna di funzioni generatrici due costanti e la funzione

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Sono gli integrali che hanno per le equazioni dell'isotropia lo stesso ufficio che il potenziale newtoniano elementare $\frac{1}{r}$ ha per l'equazione di Laplace, e mi hanno servito altre volte per trovare le formole che, per le equazioni della elasticità, sono equivalenti a quella di Green.

Per spostamenti di tal fatta le componenti delle pressioni interne risulteranno regolari in tutto lo spazio $z \geq 0$, eccetto che nel punto (a, b, c) e saranno funzioni omogenee di grado -2. Inoltre le funzioni $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ corrispondenti avranno al pari delle u, v, w un solo punto di singolarità, ma questo sarà nel punto $x=a$, $y=b$, $z=-c$, e quindi esterno dal campo $z \geq 0$. Perciò anche gli spostamenti u_1, v_1, w_1 e u_2, v_2, w_2 definiti dalle (3) (3') saranno omogenei di grado -1, con un solo punto isolato di singolarità in (a, b, c), e le pressioni ad essi corrispondenti saranno funzioni omogenee di grado -2.

Ciò posto, supponiamo che sulla superficie $z = 0$ del corpo dato siano applicate delle forze L, M, N, e indichiamo con u, v, w le componenti degli spostamenti prodotti. Noi potremo applicare il teorema di Betti alle due terne di integrali

$$\begin{matrix} u & v & w \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ \mathrm{L}_1 & \mathrm{M}_1 & \mathrm{N}_1 \end{matrix}$$

purchè dal campo $z \geq 0$ venga escluso il punto (a, b, c) mediante una piccola sfera σ avente il centro in esso. Avremo, ricordando le (4), e indicando con s la superficie limite del corpo,

$$\int_s (u\mathrm{L}_1 + v\mathrm{M}_1)\, s - \int_s w_1 \mathrm{N} ds = \int_\sigma (u\mathrm{L}_1^{(\sigma)} + v\mathrm{M}_1^{(\sigma)} + w\mathrm{N}_1^{(\sigma)})\, d\sigma$$
$$- \int_\sigma (u_1\mathrm{L}^{(\sigma)} + v_1\mathrm{M}^{(\sigma)} + w_1\mathrm{N}^{(\sigma)})\, d\sigma$$

dove con $\mathrm{L}_1^{(\sigma)}$ $\mathrm{M}_1^{(\sigma)}$ $\mathrm{N}_1^{(\sigma)}$ indichiamo le componenti delle forze che conviene applicare sulla superficie σ, onde mantenere l'equilibrio, quando è soppressa questa parte del corpo, mentre si ha la deformazione u_1, v_1, w_1; ed $\mathrm{L}^{(\sigma)}$, $\mathrm{M}^{(\sigma)}$, $\mathrm{N}^{(\sigma)}$ hanno un significato analogo riguardo alla deformazione u, v, w.

Ora se noi supponiamo che il raggio ϱ della sfera σ divenga piccolissimo, a cagione del modo di comportarsi delle u_1 v_1 w_1 in (a, b, c) si ha

$$\lim_{\varrho=0} \int_\sigma (u_1\mathrm{L}^{(\sigma)} + v_1\mathrm{M}^{(\sigma)} + w_1\mathrm{N}^{(\sigma)})\, d\sigma = 0$$

mentre l'altro integrale del secondo membro tende ad una funzione lineare a coefficienti costanti dei valori U, V, W delle funzioni u, v, w nel punto a, b, c. Indicando k_1, k_2, k_3 i coefficienti di questa funzione lineare, troviamo

$$(5) \qquad k_1\mathrm{U} + k_2\mathrm{V} + k_3\mathrm{W} = \int_s (u\mathrm{L}_1 + v\mathrm{M}_1)\, ds - \int_s w_1 \mathrm{N} ds.$$

Noi non vogliamo entrare qui nei particolari del calcolo, per il caso delle equazioni generali che abbiamo considerato. Osserveremo solo che stabilite tre formole analoghe alla precedente, in cui le funzioni lineari dei primi membri siano indipendenti fra loro, risulta risoluto il seguente problema:

Determinare la deformazione prodotta in un corpo indefinito, limitato da un piano, e cristallizzato in modo che siano piani di simmetria i piani paralleli alla superficie limite, quando su questa superficie sono date le componenti tangenziali degli spostamenti e la componente normale delle pressioni esterne.

Una formola analoga alla (5) si può trovare considerando invece degli spostamenti u_1, v_1, w_1 gli altri già considerati u_2, v_2, w_2. Tenendo conto delle (4') si troverebbe

$$(5') \qquad k_1\mathrm{U} + k_2\mathrm{V} + k_3\mathrm{W} = \int_s \mathrm{N}_2 w ds - \int_s (\mathrm{L}u_2 + \mathrm{M}v_2)\, ds$$

e si arriverebbe alla soluzione del problema precedente, quando alla superficie si conoscono *le componenti normali degli spostamenti e le componenti tangenziali delle pressioni.*

Nel caso della isotropia il calcolo ora indicato è semplicissimo. Possiamo prendere, per quanto si è già detto,

$$u' = (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{2\alpha^2}{r}$$

$$v' = (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}$$

$$w' = (\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}$$

(ove α, β indicano le due velocità di propagazione delle onde piane); e, coi calcoli stessi che servono alla determinazione delle formole analoghe a quella di Green, si trova al posto delle (5) (5')

$$8\pi\alpha^2\beta^2\,\mathrm{U} = \int_s (u\mathrm{L}_1 + v\mathrm{M}_1)\,ds - \int_s w_1\mathrm{N}\,ds$$

$$8\pi\alpha^2\beta^2\,\mathrm{U} = \int_s \mathrm{N}_2\,w\,ds - \int_s (\mathrm{L}u_2 + \mathrm{M}\mathrm{N}_2)\,ds$$

Le altre formole per la determinazione di V, W nei due casi si possono dedurre facilmente da queste con sostituzioni circolari. Le espressioni effettive delle L_1, M_1, N_2, ... si possono costruire in forma esplicita mediante le formole date in due miei lavori: *Sulle equazioni della elasticità* (Annali di Matematica, 1889) e *Sopra gli integrali delle equazioni della isotropia elastica* (Nuovo Cimento, 1894).

Il problema ora considerato, nel caso della isotropia, fu risoluto la prima volta da Boussinesq (Comptes Rendus, T. CVI, 1888) e ristudiato poi da Cerruti e Marcolongo. I loro metodi di integrazione sono però assai meno semplici di quello ora esposto.

3. Supponiamo ora che il corpo che si deforma, ammetta due piani ortogonali di simmetria elastica, che supporremo siano i piani $x = 0$, $y = 0$. Se allora $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ rappresentano una terna di componenti di spostamento soddisfacenti alle equazioni di equilibrio, noi, applicando successivamente il teorema dimostrato nel § 1, potremo dedurne altre tre terne, che godono della stessa proprietà. Difatti le equazioni d'equilibrio in questo caso rientrano in se stesse tanto per una riflessione sul piano $x = 0$ che sul piano $y = 0$. Per semplicità di scrittura introdurremo la notazione $\bar{\alpha} = -\alpha$; e allora i quattro sistemi d'integrali si potranno scrivere nel modo seguente:

$$
(6)\quad \begin{cases}
u_1 = u(x, y, z) & u_2 = \overline{u}(\overline{x}, y, z) \\
v_1 = v(x, y, z) & v_2 = v(\overline{x}, y, z) \\
w_1 = w(x, y, z) & w_2 = w(\overline{x}, y, z) \\
 & \\
u_3 = \overline{u}(\overline{x}, \overline{y}, z) & u_4 = u(x, \overline{y}, z) \\
v_3 = \overline{v}(\overline{x}, \overline{y}, z) & v_4 = \overline{v}(x, \overline{y}, z) \\
w_3 = w(\overline{x}, \overline{y}, z) & w_4 = w(x, \overline{y}, z)
\end{cases}
$$

Questi quattro sistemi di integrali *costituiscono un gruppo*, in quanto sono tutti e soli quelli che si possono ottenere da uno qualunque di essi per riflessione sui due piani $x = 0$, $y = 0$. Se poi supponiamo che il primitivo sistema abbia un punto d'infinito isolato d'ordine -1, gli altri tre ammetteranno una singolarità analoga rispettivamente nei punti immagini di questo punto rispetto ai piani $x = 0$, $y = 0$, e quindi una combinazione lineare qualsiasi di quei quattro sistemi, darà un nuovo sistema integrale, avente una singolarità di tal fatta in ciascuno dei quattro angoli determinati dai piani $x = 0$, $y = 0$. Perciò, mediante questo gruppo d'integrali è possibile risolvere, rispetto al diedro solido rettangolo limitato dai mezzi piani positivi $x = 0$, $y = 0$, problemi di equilibrio elastico analoghi a quelli considerati nel paragrafo precedente per un solido limitato da un piano. Ma per vedere quali siano le condizioni alla superficie che debbono essere conosciute in questo caso, è necessario prima stabilire le relazioni che si verificano fra gli spostamenti e fra le pressioni dei sistemi (6), sui piani $x = 0$, $y = 0$.

Queste relazioni si trovano assai facilmente applicando il teorema fondamentale del § 1. Noi le scriveremo senz'altro, indicando in generale con L_i, M_i, N_i le componenti secondo gli assi delle x, y, z delle pressioni che conviene supporre applicate in superficie per mantenere l'equilibrio, quando avviene la deformazione u_i, v_i, w_i. Si trova così:

per $x = 0$:

$$
(7)\quad \begin{cases}
u_1 = \overline{u}_2 & u_3 = \overline{u}_4 & L_1 = L_2 & L_3 = L_4 \\
v_1 = v_2 & v_3 = v_4 & M_1 = \overline{M}_2 & M_3 = \overline{M}_4 \\
w_1 = w_2 & w_3 = w_4 & N_1 = \overline{N}_2 & N_8 = \overline{N}_4
\end{cases}
$$

per $y = 0$:

$$
(7')\quad \begin{cases}
u_2 = u_3 & u_1 = u_4 & L_2 = \overline{L}_3 & L_1 = \overline{L}_4 \\
v_2 = \overline{v}_3 & v_1 = \overline{v}_4 & M_2 = M_3 & M_1 = M_4 \\
w_2 = w_3 & w_1 = w_4 & N_2 = \overline{N}_3 & N_1 = \overline{N}_4
\end{cases}
$$

Consideriamo ora gli spostamenti

$$
(8)\quad \begin{cases}
u' = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \\
v' = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 \\
w' = w_1 - w_2 + w_3 - w_4
\end{cases}
$$

Dalle relazioni precedenti (7) (7') risulta subito che noi avremo

$$\text{per } x=0: \qquad L'=0\ ,\ v'=0\ ,\ w'=0$$
$$\text{per } y=0: \qquad u'=0\ ,\ M'=0\ ,\ w'=0$$

Siano ora

$$\begin{matrix} u & v & w \\ L & M & N \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u' & v' & w' \\ L' & M' & N' \end{matrix}$$

due terne di spostamenti e le relative forze superficiali per cui si ha equilibrio elastico nel diedro solido cristallino considerato. Applicando il teorema di Betti e indicando con s_1 il mezzo piano positivo $x=0$, con s_2 il mezzo piano positivo $y=0$, avremo in generale:

$$\int_{s_1}(uL'+vM'+wN')\,ds_1+\int_{s_2}(uL'+vM'+wN')\,ds_2$$
$$-\int_{s_1}(u'L+v'M+w'N)\,ds_1-\int_{s_2}(u'L+v'M+w'N)\,ds_2=0.$$

Ma se gli spostamenti u', v', w' coincidono con quelli indicati con queste notazioni nelle (8), nel secondo membro, invece dello zero, avremo una funzione lineare dei valori delle u, v, w nel punto di singolarità per u', v', w' compreso nel diedro positivo e la somma di integrali del primo membro si ridurrà a contenere sei soli termini; avremo cioè

$$\int_{s_1}(vM'+wN'-u'L)\,ds_1+\int_{s_2}(uL'-v'M+wN')\,ds_2$$
$$=k_1U+k_2V+k_3W.$$

Nel caso della isotropia nel secondo membro si avrebbe

$$8\pi\alpha^2\beta^2 U\,.$$

Mediante questa formola e le altre due analoghe che in generale si possono stabilire, si può ritenere risoluto *il problema della deformazione del diedro retto, solido, isotropo, oppure cristallizzato in modo che i piani paralleli alle faccie siano piani di simmetria, quando sopra una delle faccie*, $x=0$, *sono date le componenti*

$$L\ ,\ v\ ,\ w$$

e sopra l'altra, $y=0$, *le componenti*

$$u\ ,\ M\ ,\ w$$

cioè su entrambe le faccie del diedro la componente normale delle forze esterne e le componenti tangenziali degli spostamenti.

Poniamo ora

$$u'' = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$
$$v'' = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$
$$w'' = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 .$$

Dalle (7) (7′) risulta immediatamente che sulle faccie del diedro già considerato si hanno le seguenti relazioni:

$$\text{per } x = 0 : u'' = 0 , \ M'' = 0 , \ N'' = 0$$
$$\text{per } y = 0 : L'' = 0 , \ v'' = 0 , \ N'' = 0 .$$

Di qui, ripetendo le considerazioni del caso precedente, e coll'applicazione del teorema del Betti, risulta che mediante questi integrali u'', v'', w'' si può risolvere il problema dell'equilibrio del diedro solido già considerato quando sulla faccia $x = 0$ sono date le componenti

$$u , M , N$$

e sulla faccia $y = 0$ le componenti

$$L , v , N$$

cioè *su tutta la superficie del diedro la componente normale degli spostamenti, e le componenti tangenziali delle forze.*

Questi due problemi, che possiamo dire correlativi, corrispondono perfettamente ai due problemi risoluti dal Boussinesq nel caso del solido limitato da un piano, e dei quali già abbiamo fatto cenno. Ma nel caso del diedro esistono altri due problemi analoghi, che non hanno i loro corrispondenti nel caso del piano; quando cioè sopra una faccia è data la componente normale delle forze e le tangenziali degli spostamenti, e sull'altra invece la componente normale degli spostamenti e le tangenziali delle forze. Anche questi due problemi possono essere risoluti col nostro metodo. Basta porre

$$u''' = u_1 - u_2 - u_3 + u_4$$
$$v''' = v_1 - v_2 - v_3 + v_4$$
$$w''' = w_1 - w_2 - w_3 + w_4$$

Dalle (7) (7′) risulta subito che si ha:

$$\text{per } x = 0 : L''' = 0 , \ v''' = 0 , \ w''' = 0$$
$$\text{per } y = 0 : L''' = 0 , \ v''' = 0 , \ N''' = 0 .$$

Quindi mediante gli integrali u''', v''', w''' possiamo risolvere il problema dell'equilibrio *quando sulla faccia $x = 0$ sono date le componenti v, w dello spostamento tangenziale e la componente normale* L *delle forze, mentre*

sulla faccia $y = 0$ *le componenti* L, N *della forza tangenziale e la componente normale* v *degli spostamenti.*

Il problema correlativo si risolve ponendo

$$u^{IV} = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$$
$$v^{IV} = v_1 + v_2 - v_3 - v_4$$
$$w^{IV} = w_1 + w_2 - w_3 - w_4 .$$

Si ha infatti dalle (7) (7'):

$$\text{per } x = 0 : u^{IV} = 0 \ , \ M^{IV} = 0 \ , \ N^{IV} = 0$$
$$\text{per } y = 0 : u^{IV} = 0 \ , \ M^{IV} = 0 \ , \ w^{IV} = 0 .$$

Quindi si risolverà il problema dell'equilibrio *quando sulla faccia* $x = 0$ *si conosce la componente normale* u *degli spostamenti, e le componenti* M, N *della forza tangenziale; e sulla faccia* $y = 0$ *la componente normale* M *delle forze e le componenti* u, w *degli spostamenti tangenziali.*

È facile vedere che le considerazioni precedenti sono estendibili al caso di un triedro trirettangolo solido, quando i piani paralleli alle sue faccie sono piani di simmetria elastica, il caso cioè dei cristalli del sistema rombico. A tale scopo basterebbe costruire il gruppo di otto terne di integrali che si ottiene dal gruppo (6) con una riflessione sul piano $z = 0$.

Noi non svilupperemo, per ora, i risultati, a cui così si può arrivare; i quali sono facilmente prevedibili e nulla ci apprenderebbero di nuovo circa il metodo di integrazione studiato. Ci basta aver mostrato con alcuni esempî come mediante il principio delle immagini ed il concetto di *gruppo di integrali* delle equazioni d'equilibrio, possa essere di molto aumentata la serie, finora assai limitata, dei problemi di statica elastica, di cui può assegnarsi la soluzione generale in termini finiti.

Mi è grato ricordare che fui condotto ad occuparmi dei problemi precedenti dalla lettura delle due Note del prof. Tedone, pubblicate nei Rendiconti del passato dicembre, riguardanti la deformazione del diedro e del trietro solido isotropo per dati spostamenti alla superficie.

Geologia. — *I terreni eocenici presso Bribir in Croazia* (1). Nota del Socio C. De Stefani e del dott. G. Dainelli.

Nel 1884 il Frauscher (2) determinò una piuttosto numerosa collezione di fossili di Kosavin, presso Bribir, in Croazia, raccolti dal signor Hire, e li riconobbe molto giustamente equivalenti al piano di Roncà, cioè all' Eocene

(1) La parte stratigrafica di questa Nota è del prof. C. De Stefani, la parte paleontologica del dottor G. Dainelli.

(2) C. F. Frauscher. *Die Eocän-Fauna von Kosavin nächst Bribir im kroatischen Küstenlande.* Verhandl. d. k. k. geol. Reichsanstalt. Wien, 1884, pag. 58.