ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

Fisica matematica. — *Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettro-magnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo.* Nota I di T. Levi-Civita, presentata dal Socio Volterra.

Nel discutere [1] le recenti esperienze sulla convezione elettrica, il prof. Righi lamentava la mancanza di indicazioni precise sugli effetti prodotti dalla presenza di un conduttore in un campo variabile. Egli mi ha allora cortesemente sollecitato a studiare dal punto di vista analitico un caso semplice, che corrisponde schematicamente ad alcuno dei dispositivi usati nelle ricordate esperienze, il caso cioè di una carica elettrica, che si muove di moto uniforme parallelamente a un piano conduttore indefinito.

I risultati, cui sono pervenuto [2], hanno servito al ch. autore [3] per completare quantitativamente alcune intuizioni, che egli aveva soltanto annunziato come probabili e che il calcolo ha in tutto giustificato.

La ricerca non è dunque stata inutile. Ma essa si riferisce pur sempre a fenomeni, pressochè al limite delle quantità osservabili e per cui si richiedono in ogni caso esperienze assai delicate. Mi sono quindi proposto di studiare qualche altra questione, dello stesso tipo, ma più facilmente accessibile al controllo sperimentale.

Si presta bene il caso di una corrente alternativa (di quelle ordinarie, adoperate nell' industria), supposta sinusoidale, rettilinea, indefinita e parallela a uno schermo conduttore.

La ricerca, che ho istituita a questo scopo, sarà, se l'Accademia lo consente, esposta in tre Note.

In questa prima potrò appena (dopo alcune indispensabili premesse) assegnare il campo elettromagnetico di una corrente rettilinea di intensità variabile e porre il problema analitico delle modificazioni, prodotte da una lastra conduttrice parallela alla corrente.

Nella seconda Nota risolverò il problema rigorosamente; e nella terza trasformerò e semplificherò con opportune approssimazioni la soluzione ottenuta, in modo da renderne trasparente il significato fisico.

Ecco un saggio del risultato definitivo.

(1) Nuovo Cimento, ottobre 1901; comunicazione fatta alla Società di Fisica.

(2) In una Memoria, che trovasi presentemente in corso di stampa negli: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Ser. III, T. IV.

(3) Rendiconto della Reale Accademia di Bologna, gennaio 1902.

Sia n la frequenza della corrente; R la resistenza (espressa in unità elettromagnetiche assolute) dell'unità di superficie della lastra conduttrice; d e Δ le distanze della lastra e di un punto qualunque del campo della corrente; $\frac{1}{q} = \frac{R}{4\pi^2 n}$.

Supponiamo di considerare correnti industriali abbastanza frequenti, e lastre abbastanza conduttrici e discoste dalla corrente perchè $\frac{2}{qd} < \frac{1}{10}$ (1).

Si ha allora con sufficiente approssimazione (tanto maggiore quanto più piccolo è $\frac{2}{qd}$, ossia — caeteris paribus — quanto più grande è la frequenza), per i punti che si trovano, rispetto allo schermo conduttore, da banda opposta della corrente:

1.° La fase della forza magnetica differisce di $\frac{\pi}{2}$ da quella, che agirebbe qualora fosse rimosso lo schermo conduttore.

2.° La sua intensità massima, in un punto generico, sta a quella, che competerebbe allo stesso punto, se non ci fosse il conduttore, nel rapporto $\frac{1}{q\Delta}$. Nei punti del piano perpendicolare allo schermo passante per la corrente la forza magnetica è sempre parallela allo schermo e normale alla corrente.

Al crescere della frequenza, e quindi di q, (in causa dell'accennato fattore di riduzione $\frac{1}{q\Delta} \leq \frac{1}{qd}$) lo schermo conduttore tende a intercettare la forza magnetica.

3.° La forza elettrica è trascurabile.

Una verifica sperimentale sarebbe, a mio avviso, particolarmente interessante perchè nei risultati teorici sono implicate ipotesi non ancora messe alla prova dall'esperienza.

Infatti, in questo genere di problemi, non basta la teoria hertziana pura, ma occorre aggiungervi qualche cosa.

È ciò che si fa ricorrendo per es. a una delle teorie integrali di Maxwell o di Helmholtz (completata quest'ultima dall'ipotesi che i potenziali si propaghino colla velocità della luce).

Esse bastano e conducono agli stessi risultati (2).

(1) Per una lastra di rame, dello spessore di 1 millimetro, distante un metro dallo schermo, e una frequenza eguale a 100, si ha a un dipresso:

$$R = 16000, \quad 4\pi^2 dn = 400000, \quad \frac{2}{qd} = \frac{2R}{4\pi^2 dn} = 0{,}08.$$

(2) Per vero dire, io mi son qui (e nella precedente Memoria) attenuto esclusiva-

Si tratterebbe dunque di controllare un campo, comune bensì a entrambe le teorie integrali, ma non in pari tempo contenuto nel sistema differenziale di Hertz.

1. *Preliminari.* — In un dielettrico indefinito, isotropo, impolarizzabile [1] e in quiete, la cui omogeneità sia interrotta soltanto da alcune sedi Σ (isolate, a una, o a due dimensioni) di cariche e di correnti elettriche, si ha

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \mathrm{L}=\dfrac{d\mathrm{V}}{dz}-\dfrac{d\mathrm{W}}{dy}\,, \\[2mm] \mathrm{M}=\dfrac{d\mathrm{W}}{dx}-\dfrac{d\mathrm{U}}{dz}\,, \\[2mm] \mathrm{N}=\dfrac{d\mathrm{U}}{dy}-\dfrac{d\mathrm{V}}{dx}\,; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \mathrm{X}=-\dfrac{d\mathrm{F}}{dx}-\mathrm{A}\dfrac{d\mathrm{U}}{dt}\,, \\[2mm] \mathrm{Y}=-\dfrac{d\mathrm{F}}{dy}-\mathrm{A}\dfrac{d\mathrm{V}}{dt}\,, \\[2mm] \mathrm{Z}=-\dfrac{d\mathrm{F}}{dz}-\mathrm{A}\dfrac{d\mathrm{W}}{dt}\,, \end{cases}$$

dove L , M , N ; X , Y , Z designano al solito le componenti delle forze magnetica ed elettrica (valutate in unità elettrostatiche) rispetto ad un sistema di assi fissi orientati come in figura; A l'inversa della velocità della luce; F e (U , V , W) i potenziali elettrico e vettore, *ritardati* (cioè propagantisi con velocità $\frac{1}{\mathrm{A}}$).

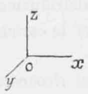

Fig. 1.

Nella loro qualità di potenziali ritardati, F , U , V , W soddisfanno alle equazioni

$$(\mathrm{III})\qquad \square\mathrm{F}=0\,,\ \square\mathrm{U}=0\,,\ \square\mathrm{V}=0,\ \square\mathrm{W}=0$$
$$\left(\square\equiv\Delta_2-\mathrm{A}^2\frac{d^2}{dt^2}\right),$$

e si comportano nei punti delle Σ come potenziali ordinarî delle distribuzioni corrispondenti. A priori queste possono essere qualunque, purchè soltanto (oltre a ovvie condizioni di continuità, di derivabilità ecc.) sia soddi-

---

mente alla teoria di Helmholtz. Ho però verificato che la teoria di Maxwell porterebbe ad espressioni identiche per le forze elettromagnetiche.

Questo risultato sta in generale per un campo e per un conduttore qualunque. Mi si passi per ora l'asserzione, che mi propongo di giustificare quanto prima.

[1] Di cui cioè si suppongono eguali all'unità le costanti di dielettricità e di magnetismo (potere induttore specifico e permeabilità magnetica).

sfatto il principio di conservazione dell'elettricità. Tra i potenziali ne consegue la relazione

$$\text{(IV)} \qquad A\frac{dF}{dt}+\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}=0,$$

che equivale d'altronde completamente all'accennato principio.

In virtù delle (III), (IV), le espressioni (I), (II) delle forze elettromagnetiche verificano identicamente le equazioni di Hertz [1].

È questa in sostanza la teoria conciliata di Helmholtz-Hertz.

2. *Campo elettromagnetico dovuto al tratto di corrente compreso fra un generatore e un collettore.* — Sia in O_1 il generatore, in O_2 il collettore. Supponiamo che la corrente si trasmetta da O_1 ad O_2 lungo un filo rettilineo (assimilabile al segmento O_1O_2). Sieno $y=o$, $z=d$ le equazioni della retta O_1O_2; $-l_1, o, d$; l_2, o, d le coordinate di O_1 e di O_2 $(d, l_1, l_2 > 0)$; x, y, z le coordinate del punto potenziato P; x', o, d quelle di un generico punto (potenziante) P' del segmento O_1O_2; $u(t)$ l'intensità della corrente in un punto determinato del filo, $x'=0$ per es., misurata in unità elettrostatiche (talchè $Au(t)$ ne è la misura in unità elettromagnetiche).

Limitandoci per semplicità al caso di una propagazione senza smorzamento con velocità eguale a quella della luce [2], l'analoga intensità in un altro punto qualunque P' sarà $u(t-Ax')$.

Designiamo ancora con $e(x', t)$ la densità (lineare) della distribuzione elettrica nei punti P' interni al segmento O_1O_2, con $E_1(t)$, $E_2(t)$ le cariche isolate degli estremi O_1, O_2.

La conservazione dell'elettricità esige che sia, come tosto si riconosce,

$$\frac{de}{dt}+\frac{du}{dx'}=0;$$

$$\frac{dE_1}{dt}=-u(t+Al_1), \quad \frac{dE_2}{dt}=u(t-Al_2).$$

(1) Per la dimostrazione veggasi la Nota: *Sulla riducibilità* ecc., Nuovo Cimento, agosto 1897, o, in forma semplificata (per mezzi impolarizzabili come quello, di cui qui si tratta), il primo capitolo della citata Memoria degli Annali di Tolosa.

In entrambi questi lavori la dimostrazione è data per distribuzioni continue (a tre dimensioni) di cariche e di correnti, ma, per le ragioni esposte al n. 9 della Memoria stessa, vi è implicita l'estensione a distribuzioni di qualsiasi natura, senza bisogno di verifiche dirette (sul tipo di quella, che — per le distribuzioni a due dimensioni — trovasi inserita nella Nota del Cimento).

(2) Questa ipotesi è molto opportuna per semplificare i calcoli, ma è chiaro che qualunque legge di propagazione, per cui l'intensità variasse pochissimo con x' condurrebbe sensibilmente agli stessi risultati, finchè si tratta di fenomeni svolgentisi in un campo ristretto (rispetto alla velocità della luce).

Da $\frac{de}{dt} + \frac{du}{dx'} = 0$ segue $e = \mathrm{A}u +$ una funzione arbitraria di x', che, senza pregiudizio della generalità, si può supporre eguale a zero. (In caso diverso non c'è che da aggiungere alla forza elettrica la componente dovuta a questa distribuzione *statica*).

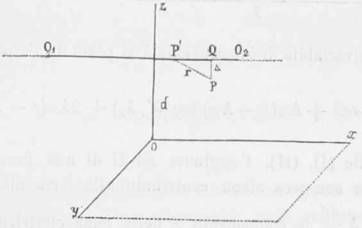

FIG. 2.

Ciò posto, i potenziali ritardati, relativi a un generico punto potenziato P, hanno le espressioni seguenti:

$$\mathrm{U} = \mathrm{A}\int_{-l_1}^{l_2} \frac{u(t - \mathrm{A}x' - \mathrm{A}r)}{r}\, dx', \quad \mathrm{V} = 0, \quad \mathrm{W} = 0;$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{U} + \frac{\overline{\mathrm{E}}_1}{r_1} + \frac{\overline{\mathrm{E}}_2}{r_2},$$

r, r_1, r_2 designando le distanze $\overline{\mathrm{PP'}}, \overline{\mathrm{PO}_1}, \overline{\mathrm{PO}_2}$; $\overline{\mathrm{E}}_1, \overline{\mathrm{E}}_2$ ciò che divengono $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ quando si cambia t in $t - \mathrm{A}r_1$, $t - \mathrm{A}r_2$ rispettivamente.

3. *Caso limite di un filo rettilineo indefinito.* — Per passare al limite, conviene aggiungere, circa la funzione u, la condizione suppletoria che abbia un senso l'integrale

$$\int \frac{u(t - \mathrm{A}x - \mathrm{A}\lambda) - u(t - \mathrm{A}x)}{\lambda}\, d\lambda$$

esteso fino all'infinito da un limite inferiore qualunque ($>$, o anche $= 0$, poichè la funzione sotto il segno resta finita anche per $\lambda = o$).

Consideriamo per un momento ancora il caso di un tratto finito.

Sia $\varDelta$ la distanza di P dal filo, talchè

$$r^2 = (x' - x)^2 + \varDelta^2, \quad r_1^2 = (l_1 + x)^2 + \varDelta^2, \quad r_2^2 = (l_2 - x)^2 + \varDelta^2.$$

Ponendo

$$\lambda = r + x' - x,$$

$$\lambda_1 = r_1 - l_1 - x = \frac{\Delta^2}{r_1 + l_1 + x}, \quad \lambda'_1 = r_1 + l_1 + x,$$

$$\lambda_2 = r_2 + l_2 - x,$$

$$\Delta = \frac{u(t - \mathrm{A}x - \mathrm{A}\lambda) - u(t - \mathrm{A}x)}{\lambda},$$

e assumendo come variabile di integrazione λ al posto di x', potremo scrivere:

$$\mathrm{U} = \mathrm{A}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Delta d\lambda + \mathrm{A}u(t - \mathrm{A}x)\log(\lambda'_1\,\lambda_2) + 2\mathrm{A}u(t - \mathrm{A}x)\log\frac{1}{\Delta}.$$

A norma delle (I), (II), l'aggiunta ad U di una funzione f del solo argomento $t - \mathrm{A}x$ non reca alcun contributo alla forza magnetica, mentre incrementa di $-\mathrm{A}\dfrac{df}{dt}$ la componente X della forza elettrica. Se si aggiunge anche ad F la stessa funzione f, il campo rimane evidentemente inalterato.

È dunque indifferente risguardare come potenziali ritardati del tratto di corrente $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$, U ed F, ovvero per es.

$$\mathrm{U}' = \mathrm{U} - \mathrm{A}\int_0^\infty \Delta d\lambda - \mathrm{A}u(t - \mathrm{A}x)\log(l_1\,l_2) =$$

$$= \mathrm{A}\left\{-\int_0^{\lambda_1} \Delta d\lambda - \int_{\lambda_2}^{\infty} \Delta d\lambda + u(t - \mathrm{A}x)\log\frac{\lambda'_1}{l_1}\frac{\lambda_2}{l_2}\right\} + 2\mathrm{A}u(t - \mathrm{A}x)\log\frac{1}{\Delta},$$

$$\mathrm{F}' = \mathrm{U}' + \frac{\overline{\mathrm{E}}_1}{r_1} + \frac{\overline{\mathrm{E}}_2}{r_2}.$$

Queste espressioni presentano sulle prime il vantaggio di ammettere limiti finiti, quando sorgente e collettore tendono all'infinito.

Infatti, per l_1, l_2 convergenti comunque all'infinito, λ_1 tende a zero, λ'_1, λ_2, r_1, r_2 all'infinito, $\dfrac{\lambda'_1}{l_1}$, $\dfrac{\lambda_2}{l_2}$ all'unità, mentre (per l'ipotesi fatta circa la funzione u) $\overline{\mathrm{E}}_1$, $\overline{\mathrm{E}}_2$ restano finiti.

È chiaro allora che la quantità in parentesi nell'espressione di U' ha per limite zero, e così $\dfrac{\overline{\mathrm{E}}_1}{r_1} + \dfrac{\overline{\mathrm{E}}_2}{r_2}$.

I potenziali del campo sono pertanto

$$(1) \quad \begin{cases} \mathrm{U}' = 2\mathrm{A}\,u\,(t - \mathrm{A}\,x)\log\dfrac{1}{\Delta}, \ \mathrm{V}' = 0, \ \mathrm{W}' = 0; \\ \mathrm{F}' = \mathrm{U}', \end{cases}$$

e le componenti delle forze magnetica ed elettrica, posto per brevità $Au(t - Ax) = I$,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{lll} 0 \;, & 2I \dfrac{z-d}{\Delta^2} \;, & -2I \dfrac{y}{\Delta^2} \;; \\ 0 \;, & 2I \dfrac{y}{\Delta^2} \;, & 2I \dfrac{z-d}{\Delta^2} \;. \end{array} \right.$$

Allo stesso risultato si arriva, con ovvie modificazioni, se si suppone che sia integrabile (da un limite inferiore > 0) fino all' ∞ la funzione

$$\Delta' = \frac{u(t - Ax - A\lambda)}{\lambda},$$

anzichè la Δ.

La condizione (integrabilità della funzione Δ, ovvero della funzione Δ', in un intervallo estendentesi fino all'infinito), sotto cui sono state dimostrate queste formule, è in particolare soddisfatta per correnti costanti $I = I_0$ (si ha allora $\Delta = 0$), e per correnti sinusoidali $I = I_0 \operatorname{sen} \{ 2\pi n (t - Ax) + \alpha \}$ (I_0, n, α costanti), essendo allora integrabile fino all' ∞ la funzione Δ'.

In generale, se si bada che I altro non è che l'intensità (in misura elettromagnetica) della corrente nel punto Q (piede della perpendicolare abbassata dal punto potenziato P sulla corrente), si può concludere:

Le forze elettromagnetiche, dovute a una corrente rettilinea indefinita, comunque variabile, sono, in un generico punto P del campo, quelle stesse, che proverrebbero da una corrente costante di intensità eguale a quella, che è relativa al punto Q e all'istante considerato [1].

4. *Generalità sul modo di valutare l'influenza di uno schermo conduttore.* — Per tener conto degli effetti, prodotti dalla presenza di un conduttore sopra un campo elettromagnetico assegnato, basta evidentemente aggiungere ai potenziali del campo i contributi provenienti dalle distribuzioni (di cariche e di correnti), che si destano per induzione sul conduttore.

Designino F', U', V', W' i potenziali del campo dato [i quali devono naturalmente soddisfare alle equazioni (III) e (IV)], F_1, U_1, V_1, W_1 quelli (a priori incogniti), che provengono dalle distribuzioni indotte.

Per determinare F_1, U_1, V_1, W_1 — oltre a ovvie condizioni, iniziali o qualitative, di continuità, di regolarità, di comportamento all'infinito, ecc., che per brevità lascio di specificare — abbiamo:

a) le equazioni (III) e (IV), relative, possiamo dire, alla quaderna F_1, U_1, V_1, W_1;

b) le equazioni, che esprimono la legge di Ohm per la superficie conduttrice.

[1] Cfr. Poincaré, *Les oscillations électriques*, pag. 144.

Supponiamo addirittura che quest'ultima sia il piano conduttore $z=o$.

Sia R la resistenza dell'unità di superficie, espressa in unità elettromagnetiche (e quindi $A^2 R$ la misura della stessa resistenza in unità elettrostatiche). Sieno u_1 e v_1 le componenti delle correnti indotte (w_1 e quindi W_1 sono evidentemente nulli).

Le equazioni in questione (relative, si intende bene, al piano $z=o$) si scriveranno:

$$X = A^2 R u_1 \,, \quad Y = A^2 R v_1 \,.$$

Le espressioni di X, Y sono a ricavarsi dalle (II), tenendo conto che

$$F = F' + F_1 \,, \; U = U' + U_1 \,, \; V = V' + V_1 \,, \; W = W' \,.$$

Dacchè U_1 e V_1 si comportano come ordinarî potenziali di densità Au_1, Av_1, si avrà dalla nota formula, che caratterizza le discontinuità delle derivate normali,

$$Au_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{dU_1}{d|z|} \,, \quad Av_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{dV_1}{d|z|} \,,$$

designando con $|z|$ il valore assoluto di z e convenendo d' ora innanzi di risguardare F_1, U_1, V_1 come funzioni di $|z|$, anzichè di z, ciò che è evidentemente giustificato dalla necessaria simmetria di queste funzioni rispetto al piano $z=o$.

Le precedenti equazioni divengono così:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} \dfrac{d(F'+F_1)}{dx} + A\,\dfrac{d(U'+U_1)}{dt} = \dfrac{AR}{2\pi}\,\dfrac{dU_1}{d|z|} \,, \\[2ex] \dfrac{d(F'+F_1)}{dy} + A\,\dfrac{d(V'+V_1)}{dt} = \dfrac{AR}{2\pi}\,\dfrac{dV_1}{d|z|} \,. \end{cases}$$

Sarebbe facile dimostrare che, tenendo conto di tutto, F_1, U_1, V_1 rimangono univocamente determinati.

Ma non è ora il momento di occuparsi di teoria generale. Per il problema, che dobbiamo risolvere, l'accennata univoca esistenza risulterà a posteriori dalla effettiva determinazione delle incognite.

Lo vedremo in una prossima Nota.