ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 marzo 1902.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettro-magnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo.* Nota II [1] di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Socio VOLTERRA.

5. *Caso del campo dovuto ad una corrente sinusoidale parallela allo schermo.* — Prendiamo nelle (1) della Nota precedente

$$u(t - Ax) = I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})},$$

dove

$$i = \sqrt{-1}\ , \quad \omega = 2\pi n(t - Ax) + \alpha,$$

I_0, n ed α designano costanti reali. Con questa espressione di u le parti reali dei secondi membri delle (1) forniscono i potenziali dovuti a un'ordinaria corrente sinusoidale di intensità massima I_0 e di frequenza n.

Proponiamoci di determinare (i potenziali indotti sul piano $z = 0$) F_1, U_1, V_1 nel caso che i potenziali inducenti corrispondano al valore complesso $I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})}$, sieno cioè

$$(1') \qquad \begin{cases} U' = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} \log \frac{1}{A}, \quad V' = 0, \quad W' = 0; \\ F' = U' \end{cases}$$

(1) Vedi pag. 163.

Trovati F_1, U_1, V_1, basterà prenderne la parte reale per avere i potenziali indotti sul piano $z = 0$ dalla suddetta corrente sinusoidale, parallela al piano e distante d da esso.

È chiaro anzi tutto che, stabilito una volta il regime, le espressioni di F_1, U_1, V_1 dovranno essere della forma

$$(3) \qquad F_1 = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} F_2, \quad U_1 = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} U_2, \quad V_1 = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} V_2,$$

con F_2, U_2, V_2 funzioni soltanto di $y, |z|$.

Ciò posto, le (III) e (IV) danno

$$(4) \qquad \frac{d^2F_2}{dy^2} + \frac{d^2F_2}{d|z|^2} = 0, \quad \frac{d^2U_2}{dy^2} + \frac{d^2U_2}{d|z|^2} = 0, \quad \frac{d^2V_2}{dy^2} + \frac{d^2V_2}{d|z|^2} = 0,$$

$$(5) \qquad 2\pi n A i (F_2 - U_2) + \frac{dV_2}{dy} = 0,$$

mentre le equazioni ai limiti (V) divengono

$$2\pi n A i (F_2 - U_2) + \frac{AR}{2\pi} \frac{dU_2}{d|z|} = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dy} + 2\pi n A i V_2 - \frac{AR}{2\pi} \frac{dV_2}{d|z|} = -\frac{d \log \frac{1}{\Delta}}{dy}.$$

Le tre funzioni [armoniche, in causa delle (4)] F_2, U_2, V_2 dovranno inoltre comportarsi regolarmente per tutti i valori reali di y e positivi di $|z|$, e annullarsi (assieme alle loro derivate) al crescere indefinito di $|z|$. Queste stesse proprietà competono di conseguenza alle due combinazioni

$$2\pi n A i (F_2 - U_2) + \frac{AR}{2\pi} \frac{dU_2}{d|z|},$$

$$\frac{dF_2}{dy} + 2\pi n A i V_2 - \frac{AR}{2\pi} \frac{dV_2}{d|z|},$$

di cui le equazioni ai limiti, scritte or ora, forniscono inoltre i valori per $z = 0$:

$$0 \quad \text{e} \quad -\frac{d \log \frac{1}{\Delta}}{dy}.$$

Poniamo

$$(6) \qquad P^2 = y^2 + (|z| + d)^2 \quad (P = \Delta \text{ per } z \leq 0),$$

e osserviamo che le due funzioni 0 e $-\dfrac{d \log \frac{1}{P}}{dy}$, sono manifestamente ar-

moniche, regolari per tutti i valori reali di y e positivi di $|z|$, e nulle per $|z| = \infty$. Siccome non vi possono essere due fuzioni armoniche, che prendono gli stessi valori per $z = 0$, si mantengono regolari in ogni altro punto, e si annullano per $|z| = \infty$, così dobbiamo concludere che si ha identicamente (e non soltanto per $z = 0$)

$$(7)\quad \begin{cases} 2\pi n\,\mathrm{A}i\,(\mathrm{F}_2 - \mathrm{U}_2) + \dfrac{\mathrm{AR}}{2\pi}\,\dfrac{d\mathrm{U}_2}{d|z|} = 0\,, \\ \dfrac{d}{dy}\left(\mathrm{F}_2 + \log\dfrac{1}{r}\right) + 2\pi n\,\mathrm{A}i\,\mathrm{V}_2 - \dfrac{\mathrm{AR}}{2\pi}\,\dfrac{d\mathrm{V}_2}{d|z|} = 0\,. \end{cases}$$

Il nostro còmpito consiste dunque nell'integrare il sistema (completo, come tosto si riconosce) (4), (5), (7) *mediante funzioni* $\mathrm{F}_2, \mathrm{U}_2, \mathrm{V}_2$ *di* $y, |z|$, *regolari per tutti i valori reali di* y, *positivi di* $|z|$, *e nulle per* $|z| = \infty$.

6. *Calcolo di* F_2. — Moltiplichiamo la prima delle (7) per $2\pi n\,\mathrm{A}i$, deriviamo la seconda rispetto ad y e sommiamo. Verrà, tenendo conto della (5),

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(\mathrm{F}_2 + \log\frac{1}{r}\right) + \mathrm{A}^2 n\,\mathrm{R}i\,\frac{d\mathrm{F}_2}{d|z|} = 0\,,$$

od anche, siccome $\mathrm{F}_2 + \log\dfrac{1}{r}$ è funzione armonica,

$$\frac{d^2}{d|z|^2}\left(\mathrm{F}_2 + \log\frac{1}{r}\right) - \mathrm{A}^2 n\,\mathrm{R}i\,\frac{d\mathrm{F}_2}{d|z|} = 0\,.$$

Integrando rispetto a $|z|$ fra un valore generico e ∞, risulta

$$\frac{d}{d|z|}\left(\mathrm{F}_2 + \log\frac{1}{r}\right) - \mathrm{A}^2 n\,\mathrm{R}i\,\mathrm{F}_2 = 0\,.$$

Facciamo, per brevità di scrittura, le posizioni

$$(8)\quad p = 2\pi n\mathrm{A}\ ,\ q = \frac{4\pi^2 n}{\mathrm{R}}\ ,\ \mathrm{B} = \mathrm{A}^2 n\mathrm{R} = \frac{p^2}{q}\,.$$

Le equazioni (5), (7) e quelle, cui siamo testè pervenuti, potranno essere scritte:

$$(5')\quad \frac{d\mathrm{V}_2}{dy} = pi\,(\mathrm{U}_2 - \mathrm{F}_2),$$

$$(7')\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d|z|}\,(\mathrm{U}_2 - \mathrm{F}_2) - q\,i\,(\mathrm{U}_2 - \mathrm{F}_2) = -\dfrac{d\mathrm{F}_2}{d|z|}\,, \\ \dfrac{d}{dy}\left(\mathrm{F}_2 + \log\dfrac{1}{r}\right) - \dfrac{p}{q}\left(\dfrac{d\mathrm{V}_2}{d|z|} - q\,i\,\mathrm{V}_2\right) = 0\,, \end{cases}$$

$$(9)\quad \frac{d\mathrm{F}_2}{d|z|} - \mathrm{B}i\,\mathrm{F}_2 = -\frac{d\log\dfrac{1}{r}}{d|z|}\,.$$

Un integrale particolare della (9) è, come si verifica subito,

$$F_2 = -i\int_0^\infty e^{-B\lambda}\frac{d\log\frac{1}{\tau}}{d|z|}\,d\lambda\,, \tag{10}$$

in cui

$$\tau^2 = y^2 + (|z| + d - i\lambda)^2 \tag{11}$$

e si suppone $B > 0$.

La funzione sotto il segno nel secondo membro della (10) è allora effettivamente integrabile fra 0 e ∞ (qualunque sieno i valori reali di y e di z).

L'integrale F_2 risulta poi funzione armonica di y, $|z|$, nulla per $|z| = \infty$, regolare per tutti i valori reali di y e positivi di $|z|$, poichè

$$\frac{d\log\frac{1}{\tau}}{d|z|} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{|z| + d + i(y-\lambda)} + \frac{1}{|z| + d - i(y+\lambda)}\right\}$$

gode di tali proprietà in tutto l'intervallo di integrazione.

La funzione cercata F_2 *rimane definita dalla* (10).

Infatti, in causa della (9), essa potrebbe differirne soltanto per un integrale armonico della equazione

$$\frac{dF_2}{d|z|} - BiF_2 = 0\,,$$

nullo per $|z| = \infty$. Ma un tale integrale è identicamente nullo.

Giova ancora osservare che, mediante una integrazione per parti, si può attribuire all'espressione di F_2 la forma

$$F_2 + \log\frac{1}{\rho} = B\int_0^\infty e^{-B\lambda}\log\frac{1}{\tau}\,d\lambda. \tag{10'}$$

7. *Caratteri analitici della funzione* F_2. — Per riconoscere la natura della funzione definita dall'integrale (10), prendiamo le mosse dalla formula

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi}\,d\lambda = e^{\xi}\int_\xi^\infty e^{-\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda} = -e^{\xi}\,\mathrm{L}i e^{-\xi}\,,$$

che è, si può dire, la definizione della funzione Li (logaritmo integrale) per valori reali e positivi dell'argomento ξ.

Dalla formula di Eulero [1]

$$\mathrm{L}i\,e^{-\xi} = C + \log\xi + \sum_1^\infty{}_m (-1)^m\frac{\xi^m}{m\,.\,m!} \tag{11}$$

(dove C è la nota costante 0,577... e pel logaritmo si intende fissata la

[1] Cfr. per es. Kronecker, *Vorlesungen über Mathematik*, B. I, pag. 213.

determinazione reale) la funzione $\mathrm{L}i\, e^{-\xi}$ rimane definita in tutto il piano complesso. Supponendolo tagliato lungo il semiasse reale negativo, la $\mathrm{L}i\, e^{-\xi}$ risulta funzione uniforme colla sola singolarità logaritmica $\xi = 0$.

Nello stesso campo (cioè in tutto il piano ad esclusione del semiasse reale negativo) è pure

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi}\, d\lambda$$

funzione analitica regolare di ξ.

Le due funzioni $\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda+\xi}\, d\lambda$, $-e^{\xi}\,\mathrm{L}i\, e^{-\xi}$ coincidono per ξ reale e positivo. Si ha dunque, per qualsiasi valore di ξ,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda + \xi} = -e^{\xi}\,\mathrm{L}i\, e^{-\xi},$$

dovendosi nel secondo membro intendere, come s'è detto, quella particolare determinazione della funzione multiforme $\mathrm{L}i$, che, senza attraversare il taglio, risulta reale, per ξ reale e positivo.

Ciò posto, la espressione (10) di F_2, scambiando λ in $\frac{\lambda}{\mathrm{B}}$ e moltiplicando sopra e sotto per i, può essere scritta

$$\mathrm{F}_2 = -\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda - \mathrm{B}\{y - i(|z| + d)} + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda + \mathrm{B}\{y + i(|z| + d)\}}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{-\mathrm{B}\{y - i(|z|+d)\}}\,\mathrm{L}i\, e^{\mathrm{B}\{y - i(|z|+d)\}} + e^{\mathrm{B}\{y+i(|z|+d)\}}\,\mathrm{L}i\, e^{-\mathrm{B}\{y+i(|z|+d)\}}\right].$$

Valendosi dello sviluppo (11), si caratterizza immediatamente il comportamento della funzione F_2 nell'intorno del valore 0 del parametro B. Si ha infatti

$$(10'') \qquad \mathrm{F}_2 = \mathrm{C} + \log \mathrm{B} - i\frac{\pi}{2} + \log \mathcal{V} + \mathrm{B}\{\mathrm{Y}_1 \log \mathrm{B} + \mathrm{Y}_2\},$$

Y_1 e Y_2 designando funzioni regolari nell'intorno di $\mathrm{B} = 0$.

Ne viene che, per $\mathrm{B} = 0$, le derivate, rapporto a $y, |z|$, di F_2 coincidono colle derivate di $\log \mathcal{V}$.

8. *Calcolo di* U_2 *e di* V_2. — Ritenuto $q > 0$, si verifica, come sopra, che

$$(12) \qquad \mathrm{U}_2 - \mathrm{F}_2 = -i\int_0^\infty e^{-q\mu}\, \frac{d\mathrm{F}_2(y, |z| - i\mu)}{d|z|}\, d\mu$$

soddisfa alla prima delle (7′) e a tutte le altre condizioni richieste, ed è l'unica funzione, che si trova in questo caso.

Collo stesso criterio si costruisce l'integrale particolare

$$(13)\quad V_2 = -pi\int_0^\infty \{U_2(y+\nu,|z|) - F_2(y+\nu,|z|)\}\,d\nu = -pi\int_y^\infty (U_2 - F_2)\,dy$$

della (5′), che è funzione armonica ecc., e fornisce in somma il cercato valore di V_2.

Di tutte le condizioni, imposte alle nostre incognite, rimane soltanto da controllare la seconda delle (7′). Si riconosce senza difficoltà che coi valori (10′), (12) e (13) essa rimane identicamente soddisfatta.

9. *Semplificazione delle espressioni trovate.* La frequenza n, finchè si tratta di correnti alternate industriali, è compresa fra 20 e 200; per scariche oscillanti, correnti di Tesla, ecc., può giungere sino a valori dell'ordine di 10^6, ma in ogni caso $B = A^2 n R$ è una quantità molto piccola (1).

Si possono quindi trascurare senza scrupolo i termini dell'ordine di B, ed anche di $B \log B$. La (10″) dà allora (prescindendo, come è lecito, dalla costante $C + \log B - i\frac{\pi}{2}$)

$$(14)\quad F_2 + \log\frac{1}{r} = 0\,.$$

Ciò si sarebbe potuto ricavare dalla (9) facendovi $B = 0$, ma non si avrebbe avuto in tal modo esatta nozione dell'approssimazione risultante.

La formula (10″) mostra che l'errore, da cui possono essere affette F_2 e le sue derivate rispetto ad y, $|z|$, è dell'ordine di $B \log B$.

Nemmeno questo sarebbe sufficiente, volendo procedere con assoluto rigore. Bisognerebbe ancora assegnare un limite superiore dell'errore possibile nelle componenti delle forze elettromagnetiche.

Non è del resto difficile il farlo, partendo dalla considerazione delle derivate della (10′).

Si arriva alla conclusione prevista che gli errori sono effettivamente trascurabili.

Ritenuto ormai $F_2 = -\log\frac{1}{r}$, la (12), ricordando la espressione (11)

(1) Prendiamo pure $n = 10^7$ e per R il valore, che corrisponde a una lastra di argentana dello spessore di un decimillimetro, cioè a un dipresso

$$R = 20000 \times 100 = 2 \cdot 10^6.$$

Sarà pur sempre

$$B = \frac{2 \cdot 10^{13}}{9 \cdot 10^{20}} = \frac{2}{9}\,10^{-7}.$$

di τ, si riduce a

$$U_2 - F_2 = i \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log \frac{1}{\tau}}{d|z|} d\lambda . \tag{15}$$

Scindiamo il reale dall'immaginario. Si ha

$$U_2 - F_2 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{d|z|} d\lambda - i \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} d\lambda ,$$

dove

$$\tau_1^2 = (y-\lambda)^2 + (|z|+d)^2 , \quad \tau_2^2 = (y+\lambda)^2 + (|z|+d)^2 .$$

Si osservi che

$$-\int_y^\infty \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} dy = \log \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad -\int_y^\infty \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} dy = \operatorname{arctg} \frac{y-\lambda}{|z|+d} + \operatorname{arctg} \frac{y+\lambda}{|z|+d} - \pi .$$

La (13) porge quindi

$$V_2 = \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y-\lambda}{|z|+d} + \operatorname{arctg} \frac{y+\lambda}{|z|+d} - \pi \right\} d\lambda - i \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \log \frac{\tau_1}{\tau_2} d\lambda .$$

Le espressioni definitive dei potenziali indotti, con approssimazione valida in ogni caso, sono dunque, a tenore delle (3) (avvertendo che dobbiamo conservare nei secondi membri soltanto la parte reale):

$$\left\{ \begin{aligned} F_1 &= -2 I_0 \operatorname{sen} \omega \log \frac{1}{\mathcal{F}} , \\ U_1 - F_1 &= -2 I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} d\lambda \\ &\qquad - 2 I_0 \cos \omega \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} d\lambda , \\ V_1 &= 2 I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y-\lambda}{|z|+d} + \operatorname{arctg} \frac{y+\lambda}{|z|+d} - \pi \right\} d\lambda \\ &\qquad - 2 I_0 \cos \omega \frac{1}{2} p \int_0^\infty e^{-q\lambda} \log \frac{\tau_1}{\tau_2} d\lambda , \end{aligned} \right. \tag{16}$$

dove, ricordiamolo,

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi n (t - \Delta x) + \alpha , \\ \mathcal{F}^2 &= y^2 + (|z|+d)^2 , \\ \tau_1^2 &= (y-\lambda)^2 + (|z|+d)^2 , \\ \tau_2^2 &= (y+\lambda)^2 + (|z|+d)^2 , \end{aligned}$$

mentre le costanti p e q sono definite dalla (8).

Il campo elettromagnetico, che, in assenza di schermo conduttore, è caratterizzato dai potenziali — parte reale delle (1′) —

$$(17)\quad F' = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \log\frac{1}{\Delta}\,;\ U' = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \log\frac{1}{\Delta}\,,\ V' = 0\,,\ W' = 0\,,$$

lo è invece, tenendo conto dello schermo, da

$$(18)\quad F = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \left(\log\frac{1}{\Delta} - \log\frac{1}{r}\right);\ U = F + (U_1 - F_1)\,,\ V = V_1\,,\ W = 0\,,$$

dove bisogna sostituire per $U_1 - F_1$ e V_1 i loro valori (16).

Le componenti delle forze elettromagnetiche si hanno introducendo nelle (I) , (II) i potenziali (18). Ma le espressioni, che ne risultano, non sono ancora abbastanza comode per il calcolo numerico, nè sopratutto per acquistare un idea dell'andamento del fenomeno e fornire indicazioni ad eventuali sperimentatori.

Mostrerò in una terza Nota come a ciò si pervenga mediante uno sviluppo asintotico degli integrali, che compariscono nelle espressioni trovate.

Matematica. — *Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.* Nota di Ugo Amaldi, presentata dal Socio S. Pincherle.

Seguendo il Darboux e il Lie, chiamo *cerchi geodetici* di una superficie le curve di essa, che hanno curvatura geodetica costante. È noto che se una congruenza isoterma di curve su di una superficie è composta di cerchi geodetici, lo stesso accade per la congruenza ortogonale, e che due congruenze ortogonali di cerchi geodetici sono sempre isoterme (1). Non ogni superficie contiene sistemi doppi diffatti, e si riconosce immediatamente che, se una superficie ne contiene uno, il suo elemento lineare, riferito a codesto sistema doppio come a sistema coordinato, assume la forma

$$[A]\qquad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{[U + V]^2}\,,$$

dove U e V sono funzioni rispettivamente della sola u e della sola v. Ora il Darboux nella III Parte delle sue « *Leçons sur la théorie générale des*

(1) Darboux, l. c. III Partie, n. 654; Bianchi, *Geometria Differenziale*, pag. 170.