ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

Il campo elettromagnetico, che, in assenza di schermo conduttore, è caratterizzato dai potenziali — parte reale delle (1') —

$$(17)\quad F' = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \log\frac{1}{\varDelta}\;;\; U' = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \log\frac{1}{\varDelta}\,,\; V' = 0\,,\; W' = 0\,,$$

lo è invece, tenendo conto dello schermo, da

$$(18)\quad F = 2\,I_0 \operatorname{sen}\omega \left\{\log\frac{1}{\varDelta} - \log\frac{1}{\varDelta'}\right\};\; U = F + (U_1 - F_1)\,,\; V = V_1\,,\; W = 0\,,$$

dove bisogna sostituire per $U_1 - F_1$ e V_1 i loro valori (16).

Le componenti delle forze elettromagnetiche si hanno introducendo nelle (I), (II) i potenziali (18). Ma le espressioni, che ne risultano, non sono ancora abbastanza comode per il calcolo numerico, nè sopratutto per acquistare un idea dell'andamento del fenomeno e fornire indicazioni ad eventuali sperimentatori.

Mostrerò in una terza Nota come a ciò si pervenga mediante uno sviluppo asintotico degli integrali, che compariscono nelle espressioni trovate.

Matematica. — *Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.* Nota di UGO AMALDI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Seguendo il Darboux e il Lie, chiamo *cerchi geodetici* di una superficie le curve di essa, che hanno curvatura geodetica costante. È noto che se una congruenza isoterma di curve su di una superficie è composta di cerchi geodetici, lo stesso accade per la congruenza ortogonale, e che due congruenze ortogonali di cerchi geodetici sono sempre isoterme [1]. Non ogni superficie contiene sistemi doppi diffatti, e si riconosce immediatamente che, se una superficie ne contiene uno, il suo elemento lineare, riferito a codesto sistema doppio come a sistema coordinato, assume la forma

$$[A]\qquad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{[U + V]^2}\,,$$

dove U e V sono funzioni rispettivamente della sola u e della sola v. Ora il Darboux nella III Parte delle sue « *Leçons sur la théorie générale des*

[1] Darboux, l. c. III Partie, n. 654; Bianchi, *Geometria Differenziale*, pag. 170.

surfaces » (pag. 155) propone il problema di *cercare tutte le superficie il cui elemento lineare è riducibile in diversi modi alla forma* [A], *vale a dire le superficie che ammettono più coppie di congruenze ortogonali isoterme di cerchi geodetici.* Questa questione è analoga all'altra, proposta pur essa dal Darboux e risoluta completamente dal Koenigs ([1]), relativa alle superficie contenenti sistemi doppi ortogonali isotermi di ellissi ed iperbole geodetiche, cioè alle superficie, il cui elemento lineare è riducibile alla forma del Liouville

$$[B] \qquad ds^2 = [U + V]\,[du^2 + dv^2]\,.$$

Il Ricci ha risoluto un problema intimamente legato a questo ([2]), il problema della esistenza e della determinazione dei sistemi doppi isotermi del Liouville su di una superficie di *dato* elemento lineare. Io, in questa e in altra Nota che spero mi sarà concesso l'onore di presentare a questa illustre Accademia, mi propongo di risolvere l'analogo problema pel caso dei cerchi geodetici; mi propongo cioè il problema seguente: *Data una forma differenziale quadratica positiva in due variabili*

$$\varphi = \sum_{r,s}^{1,2} a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

riconoscere se sulle superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ *esistano congruenze isoterme di cerchi geodetici; e nel caso affermativo assegnare il sistema di equazioni, da cui dipende la determinazione di tutte codeste congruenze.*

Io ritrovo il risultato già noto ([3]) che sulle superficie a curvatura totale costante esistono ∞^4 sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici e assegno il sistema completo, dalla cui integrazione dipende la determinazione di tutti codesti sistemi doppi di curve. Escluso codesto caso, dimostro che una superficie non può ammettere più di ∞^1 sistemi doppi della specie considerata, e caratterizzo le superficie, che ne contengono un numero finito, in quanto assegno il modo per riconoscere con un numero finito d'operazioni in termini finiti se una superficie *data* goda di codesta proprietà, e per determinare, in caso affermativo, i sistemi in parola. Formo poi esplicitamente le condizioni sotto cui una data superficie contiene una semplice infinità di quei sistemi e assegno il sistema completo, la cui integrazione, quando siano soddisfatte siffatte condizioni, conduce alla determinazione di codesti sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.

([1]) *Mémoire sur les lignes géodésiques*, Mém. des Savants Étrangers, t. XXXI, 1894.
([2]) *Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville,* Atti dell'Ist. Veneto, t. LII, 1894. « *Lezioni sulla teoria della superficie* », Cap. VI, VII.
([3]) Darboux, l. c. ibidem.

I metodi che io applico sono quelli del Calcolo differenziale assoluto del Ricci [1], e anzi debbo notare esplicitamente che nei calcoli richiesti dal presente problema io non ho avuto che da ripetere, leggermente modificati, i procedimenti e gli artifici escogitati ed applicati dal Ricci pel suo caso. L'identità di notazioni che, fino che mi è stato possibile, ho cercato di osservare, renderà facile il riscontro.

Noto, infine, che se immaginiamo riferito il dato elemento lineare alle sue coordinate simmetriche

$$ds^2 = \lambda\, dx\, dy\,,$$

il problema, che io qui risolvo, equivale al seguente: *Data un' equazione lineare alle derivate parziali del second' ordine e ad invarianti uguali*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \lambda\, z\,,$$

riconoscere se sia riducibile mediante una trasformazione $x' = \mathrm{X}(x)$, $y' = \mathrm{Y}(y)$ *alla forma*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'\, \partial y'} = \frac{z}{[\varphi(x'+y') + \psi(x'-y')]^2}$$

e nel caso affermativo assegnare il sistema di equazioni, che definisce le funzioni X *e* Y, *a ciò necessarie.*

1. Si consideri su di una superficie di elemento lineare dato $ds = \sqrt{\varphi}$ una qualsiasi coppia di congruenze ortogonali di curve. Se K è la curvatura totale della superficie (cioè della forma quadratica φ) e se indichiamo con ds_1, ds_2 gli elementi d'arco delle curve generiche delle due congruenze e con γ, (γ) le corrispondenti curvature geodetiche, abbiamo per una notissima formola del Liouville [2],

$$\text{(1)} \qquad \frac{d(\gamma)}{ds_1} - \frac{d\gamma}{ds_2} + \gamma^2 + (\gamma)^2 + \mathrm{K} = 0,$$

dove $\dfrac{d}{ds_1}$, $\dfrac{d}{ds_2}$ indicano le derivate (di direzione sulla varietà) secondo gli archi s_1 ed s_2 delle curve delle due congruenze.

Se poi le due congruenze considerate appartengono ad un fascio isotermo, è nullo quell' invariante del fascio, che il Ricci chiama *anisotermia* di esso, abbiamo cioè

$$\text{(2)} \qquad \frac{d\gamma}{ds_1} + \frac{d(\gamma)}{ds_2} = 0\,.$$

(1) Per una esposizione riassuntiva completa di codesti metodi, cfr. Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann. Bd. LIV.

(2) Darboux, l. c., III Partie, n. 643; Bianchi, l. c. pag. 148, form. (6*).

Risulta di qui che le coppie ortogonali di congruenze isoterme sulla data varietà sono caratterizzate dal sistema (1) (2), al quale, ove ricorrendo allo spediente ingegnoso del Ricci, si introducano due indeterminate α e β, si può sostituire il sistema equivalente

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\gamma}{ds_1} = -\beta & \dfrac{d\gamma}{ds_2} = \frac{1}{2}(\alpha + \mathrm{K}) + \gamma^2 \\[2ex] \dfrac{d(\gamma)}{ds_1} = \frac{1}{2}(\alpha - \mathrm{K}) - (\gamma)^2 & \dfrac{d(\gamma)}{ds_2} = \beta . \end{cases}$$

Se con λ_r $(r = 1, 2)$ indichiamo il sistema coordinato covariante a invariante algebrico uguale ad 1 delle curve di elemento lineare ds_1, il problema di determinare i sistemi doppi ortogonali isotermi della data varietà, coincide analiticamente con quello di ricercare le condizioni di integrabilità del sistema (3), ove si considerino come incognite le λ_r, γ, (γ), α e β [1], e poi, verificate siffatte condizioni, di eseguirne effettivamente l'integrazione. A raccogliere qualche contributo indiretto e modesto alla risoluzione di codesto problema veramente arduo, si può prefissare *a priori* una determinazione particolare per una delle indeterminate β o α, e poi studiare l'esistenza ed, eventualmente, la determinazione effettiva dei sistemi doppi ortogonali isotermi corrispondenti; cercare, cioè, le condizioni di integrabilità e la integrazione del sistema (3), in cui si considerino incognite le λ_r, γ, (γ) e, rispettivamente, α o β.

Sotto questa unica categoria di problemi si possono raccogliere tanto quello risoluto dal Ricci corrispondente a $\beta = 3\,\gamma\,(\gamma)$, quanto quello, di cui io qui mi occupo, il quale corrisponde a $\beta = 0$, in quanto la condizione

$$(4)\qquad \frac{d\gamma}{ds_1} = 0$$

esprime che le linee di elemento lineare ds_1 (e quindi anche le traiettorie ortogonali) sono a curvatura geodetica costante.

A risolvere uno qualsiasi di codesti problemi bisognerà cominciare col rendere *completo* il sistema (3), aggiungendovi le equazioni che si ottengono successivamente come condizioni di integrabilità di esso. Ora le due deriva-

[1] Naturalmente si devono considerare in sistema colle (3) le due equazioni che definiscono le curvature geodetiche γ e (γ) per mezzo delle λ_r

$$\gamma = \sum_{r,s}^{1,2} \lambda_2^{(r)} \lambda_1^{(s)} \lambda_{1/rs}, \quad (\gamma) = -\sum_{r,s}^{1,2} \lambda_1^{(r)} \lambda_2^{(s)} \lambda_{2/rs}:$$

cfr. Ricci et Levi-Civita, l. c. Chap. II, § 1, form. (7).

zioni intrinseche $\frac{d}{ds_1}$, $\frac{d}{ds_2}$ non sono commutabili fra loro, ma sono tali che è identicamente [1]

$$\frac{d}{ds_2}\frac{d}{ds_1} - \frac{d}{ds_1}\frac{d}{ds_2} = \gamma\frac{d}{ds_1} + (\gamma)\frac{d}{ds_2},$$

onde risultano pel sistema (3) le due condizioni di integrabilità

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{ds_1} + 2\frac{d\beta}{ds_2} = -\frac{dK}{ds_1} + 6\beta\gamma - 2(\gamma)\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+K) + \gamma^2\right] \\ &\frac{d\alpha}{ds_2} - 2\frac{d\beta}{ds_2} = \frac{dK}{ds_2} + 6\beta(\gamma) + 2\gamma\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-K) - (\gamma)^2\right]. \end{aligned}\right.$$

Se ora si supponesse prefissata una determinazione particolare per α, si dedurrebbe di qui, come condizione di integrabilità rispetto a β, la

$$(6)\quad \frac{d^2\alpha}{ds_1^2} + \frac{d^2\alpha}{ds_2^2} + \frac{d^2K}{ds_1^2} - \frac{d^2K}{ds_2^2} + 5\left[(\gamma)\frac{d\alpha}{ds_1} - \gamma\frac{d\alpha}{ds_2}\right] + 5\left[(\gamma)\frac{dK}{ds_1} + \gamma\frac{dK}{ds_2}\right] +$$
$$+ 4\alpha\left[\gamma^2 + (\gamma)^2\right] + 4K\left[(\gamma)^2 - \gamma^2\right] = 0,$$

la quale, noteremo incidentalmente, assume una forma particolarmente semplice per la determinazione $\alpha = K$ (o $\alpha = -K$). Si verifica dalla (6), che di sistemi doppi ortogonali isotermi soddisfacenti al sistema (3) in cui sia $\alpha = K$, esiste sulle superficie sviluppabili una quadrupla infinità; come pure si trova che, se su di una varietà esiste un tale sistema doppio, il suo elemento lineare, riferito ad esso, assume la forma

$$ds^2 = e^{v\varphi+\psi}\left[du^2 + dv^2\right],$$

dove φ e ψ sono funzioni arbitrarie della sola u; codesta forma di elemento lineare comprende quello delle superficie spirali di Lie e Lévy [2].

Ma lasciando da parte codesto caso, che qui non ci interessa, supponiamo invece che sia prefissato β: allora la condizione di integrabilità delle (5) rispetto ad α è data dalla

$$(7)\quad 2\left[\frac{d^2\beta}{ds_1^2} + \frac{d^2\beta}{ds_2^2}\right] + \frac{d^2K}{ds_2\,ds_1} + \frac{d^2K}{ds_1\,ds_2} + 10\left[(\gamma)\frac{d\beta}{ds_1} - \gamma\frac{d\beta}{ds_2}\right] +$$
$$+ 3\left[(\gamma)\frac{dK}{ds_2} - \gamma\frac{dK}{ds_1}\right] - 4\beta K + 8\beta\left[\gamma^2 + (\gamma)^2\right] = 0,$$

la quale andrà aggiunta al sistema (3) (5).

(1) Ricci et Levi-Civita, l. c. Chap. II, § 2.

(2) Darboux, l. c. IV Partie, Note VI, pag. 442.

2. Prima di procedere alla ricerca particolare che io mi sono proposto, mi sia permesso di osservare che le due determinazioni $\beta = 3\gamma(\gamma)$ e $\beta = 0$, corrispondenti rispettivamente al caso dei sistemi isotermi del Liouville e dei cerchi geodetici, sono casi particolari della determinazione $\beta = c\gamma(\gamma)$, dove c indica una costante arbitraria.

Supponendo che su di una superficie esista un sistema doppio ortogonale isotermo soddisfacente al sistema (3), sia

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2)$$

l'elemento lineare di essa, riferita a codesto sistema doppio come a sistema coordinato. Si ha allora notoriamente

$$\gamma = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}, \quad (\gamma) = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}$$

$$\frac{d}{ds_1} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{d}{ds_2} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{dv};$$

onde risulta dalla

$$\frac{d\gamma}{ds_1} = -c\gamma(\gamma) \tag{8}$$

che λ deve soddisfare all'equazione

$$\lambda\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} + (c-2)\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0.$$

Ma l'integrale generale di questa è, ove pongasi $c = 1 + \frac{1}{a}$,

$$\lambda = [\mathrm{U} + \mathrm{V}]^a$$

dove U e V sono funzioni arbitrarie rispettivamente della sola u e della sola v. Concludiamo che l'elemento lineare di una superficie su cui esista una congruenza isoterma di curve, la cui curvatura geodetica rende soddisfatta la (8), è caratterizzato dalla riducibilità alla forma

$$ds^2 = [\mathrm{U} + \mathrm{V}]^{2a}[du^2 + dv^2], \quad c = 1 + \frac{1}{a} \tag{C}$$

che dà, naturalmente, per $c = 3$ l'elemento lineare del Liouville e per $c = 0$ quello delle superficie con un sistema doppio ortogonale isotermo di cerchi geodetici.

Per $\beta = c\gamma(\gamma)$ la condizione di integrabilità (7) diventa

$$\frac{d^2\mathrm{K}}{ds_2\,ds_1} + \frac{d^2\mathrm{K}}{ds_1\,ds_2} + (3+2c)\left[(\gamma)\frac{d\mathrm{K}}{ds_2} - \gamma\frac{d\mathrm{K}}{ds_1}\right] + 4c(c-3)\gamma(\gamma)\,\mathrm{K} = 0. \tag{9}$$

Poichè essa è identicamente soddisfatta per $\mathrm{K} = 0$, si ha che l'elemento lineare di una superficie sviluppabile è riducibile in ∞^4 modi alla forma [C]; e si può anche notare che per $K = \text{cost}$ la (8) è identicamente soddisfatta solo nel caso dei sistemi isotermi di ellissi ed iperbole geodetiche o di cerchi geodetici.

Porremo qui termine a queste digressioni, per procedere oramai speditamente ai calcoli richiesti dalla risoluzione del problema proposto. Saranno essi l'oggetto di una Nota successiva.

Mineralogia. — *Sul glaucofane di Chateyroux (valle di Gressoney)*. Nota di Ferruccio Zambonini, presentata dal Socio Strüver.

Sono molto rari, a tutt'oggi, i giacimenti di glaucofane che hanno fornito cristalli terminati alle estremità dell'asse verticale. Bodewig [1] per il primo, nei cristalli di Zermatt, ha riconosciuto le forme terminali $c = \{001\}$ OP e $r = \{\bar{1}11\}$ P. Le stesse forme furono determinate dal v. Lasaulx [2] nei cristalli dell'isola Groix.

Più recentemente Colomba [3] ha descritto il glaucofane della Beaume, nell'alta valle della Dora Riparia. Ma a giudicare da quanto dice, egli non ha avuto a sua disposizione dei bei cristallli, tanto che non ha potuto misurare esattamente nemmeno l'angolo del prisma. In alcuni cristalli egli ha notato delle faccette curve, ad un'estremità di z, che potrebbero essere quelle di $\{\bar{1}11\}$ e $\{001\}$, ma egli stesso non si pronuncia sulla attendibilità di queste facce, che non hanno permesso nemmeno misure approssimative [4].

L'ing. S. Franchi, al quale sono lieto di esprimere anche qui la mia viva riconoscenza e gratitudine per la benevolenza, con la quale mi concede di studiare i minerali che egli possiede, ha scoperto, la scorsa estate, nei dintorni di Chateyroux dei bei cristalli di glaucofane, che egli cortesemente mi ha affidato per lo studio.

I cristalli di glaucofane tappezzano una piccola cavità in un masso di eclogite che fu trovato, come gentilmente mi ha comunicato l'ing. Franchi, presso la mulattiera che dai casali di Chateyroux, ad occidente di Fontainemore, scende al valloncello di Theilly, piccolo affluente di destra del Lys.

(1) *Ueber den Glaukophan von Zermatt.* Pogg. Ann. 1876, CLVIII, 224.

(2) *Ueber das Vorkommen und die mineralogische Zusammensetzung eines neuen glaukophangesteins von der Insel Groix.* Sitzber. niederrhein. Gesellsch. in Bonn. 1883, XII, 3.

(3) *Sulla glaucofane della Beaume.* Atti Acc. Scienze di Torino 1894, XXIX.

(4) L'ing. E. Mattirolo, del R. Ufficio Geologico, ha avuto la cortesia di mettere a mia disposizione un' abbondante raccolta di cristalli isolati dal calcare della Beaume. Essi sono bellissimi: misurano fino 8 mm. secondo l'asse z, ma non ne ho trovato nemmeno uno con faccette terminali.