

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

sando dall'esterno all'interno; sono instabili invece quelle nelle quali la (*c*) attraversa detto profilo dall'interno all'esterno.

In generale alla prima intersezione della (*c*) col profilo meridiano, questa curva passa dall'esterno all'interno e però la corrispondente configurazione di equilibrio è, generalmente parlando, stabile; allora la seconda configurazione di equilibrio è instabile, la terza è in generale di nuovo stabile e così via.

Se però la curva (*c*) è tangente al profilo meridiano, sia che essa in prossimità del punto di contatto rimanga all'esterno, sia che rimanga all'interno del profilo stesso, la corrispondente configurazione di equilibrio non è stabile.

Le configurazioni non stabili non sono praticamente realizzabili, e però le previsioni della teoria si possono facilmente verificare coll'esperienza.

Fisica matematica. — *Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettro-magnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo.* Nota III (1) di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Socio VOLTERRA.

10. *Sviluppi asintotici.* — Riprendiamo l'espressione (15) di $U_2 - F_2$.

Il secondo membro, considerato come funzione del parametro *q*, ha, per $q = \infty$, un punto singolare essenziale. Infatti esso differisce dall'espressione rigorosa (10) di F_2 soltanto per lo scambio di *B* in *q*; ed F_2 , quale funzione di *B*, ha effettivamente una singolarità essenziale in $B = \infty$, come risulta dalla (10'') (2).

Non sarà dunque possibile sviluppare $U_2 - F_2$ in serie di potenze di $\frac{1}{q}$, convergente nell'intorno di $\frac{1}{q} = 0$.

Però, limitandosi ai valori reali e positivi di $\frac{1}{q}$, si può stabilire la validità dello sviluppo di Taylor fino a un ordine qualsiasi e fissare il limite superiore di ciascun resto.

Ecco in qual modo.

(1) V. pag. 191.

(2) In quanto, se $B = \infty$ non fosse una singolarità essenziale di F_2 , cioè accadrebbe in particolare per i valori 0, 0, 1 di *y*, *z*, *d*, ossia per la funzione

$$e^{in} Li e^{-in} = e^{in} \log B + e^{in} \left\{ C - i \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^m B^m}{m \cdot m!} \right\},$$

il che evidentemente non è, poichè tanto il coefficiente di $\log B$, quanto il secondo addendo, sviluppati per potenze di *B*, contengono un numero infinito di termini.

Cambiando λ in $\frac{\lambda}{q}$, la (15) si può scrivere:

$$q(U_2 - F_2) = -\frac{i}{2} \int_0^\infty e^{-\lambda} \left\{ \frac{1}{|z|+d+i\left(y-\frac{\lambda}{q}\right)} + \frac{1}{|z|+d-i\left(y+\frac{\lambda}{q}\right)} \right\} d\lambda.$$

Sotto questa forma apparisce chiaramente che il secondo membro rimane finito e determinato, anche quando $\frac{1}{q}$ converge a zero (si intende, per valori reali).

Infatti il modulo della funzione sotto il segno è, per qualsiasi valore di λ , $\leq 2 \frac{|z|+d}{(|z|+d)^2+y^2} e^{-\lambda}$, funzione evidentemente integrabile nell'intervallo $0, \infty$.

Si può anzi asserire che la funzione $U_2 - F_2$ ammette derivate di qualunque ordine, rispetto all'argomento $\frac{1}{q}$, anche nel punto $\frac{1}{q} = 0$.

Infatti:

$$(19) \quad \frac{d^m q(U_2 - F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m} = -\frac{i^{m+1}}{2} m! \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^m \left\{ \frac{1}{\left[|z|+d+i\left(y-\frac{\lambda}{q}\right)\right]^{m+1}} + \frac{1}{\left[|z|+d-i\left(y+\frac{\lambda}{q}\right)\right]^{m+1}} \right\} d\lambda$$

($m = 0, 1, 2, \dots$),

e il modulo della funzione sotto il segno non supera mai

$$\frac{2}{(|z|+d)^{m+1}} e^{-\lambda} \lambda^m.$$

L'integrale è dunque una funzione di $\frac{1}{q}$, finita e continua per ogni valore reale di $\frac{1}{q}$ ($\frac{1}{q} = 0$, incluso).

Per $\frac{1}{q} = 0$, risulta in particolare

$$\frac{d^m q(U_2 - F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m} = -\frac{i^{m+1}}{2} (m!)^2 \left\{ \frac{1}{(|z|+d+iy)^{m+1}} + \frac{1}{(|z|+d-iy)^{m+1}} \right\},$$

od anche, avendo riguardo alle identità

$$\frac{d \log \frac{1}{F}}{d|z|} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{|z|+d+iy} + \frac{1}{|z|+d-iy} \right\},$$

$$\frac{d^{m+1} \log \frac{1}{F}}{d|z|^{m+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{2} m! \left\{ \frac{1}{(|z|+d+iy)^{m+1}} + \frac{1}{(|z|+d-iy)^{m+1}} \right\},$$

$$\frac{d^m q(U_2 - F_2)}{d\left(\frac{1}{q}\right)^m} = -(-i)^{m+1} m! \frac{d^{m+1} \log \frac{1}{F}}{d|z|^{m+1}}.$$

In questa condizione di cose è chiaro che si può applicare alla funzione $q(U_2 - F_2)$ la formola di Taylor per l'intervallo $0, \frac{1}{q}$, fino a un ordine qualunque m , e scrivere di conformità

$$(20) \quad U_2 - F_2 = - \sum_{s=0}^m \frac{(-i)^s}{q^s} \frac{d^s \log \frac{1}{F}}{d|z|^s} + R_m,$$

dove, usando per il resto la forma di Lagrange, si può ritenere per la (19),

$$R_m = - \frac{i^{m+1}}{2q^{m+1}} \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^m \left(\frac{1}{\left[|z|+d+i\left(y-\frac{\lambda}{q_1}\right)\right]^{m+1}} + \frac{1}{\left[|z|+d-i\left(y+\frac{\lambda}{q_1}\right)\right]^{m+1}} \right) d\lambda$$

con $\frac{1}{q_1} > 0$.

La (20) e questa espressione di R_m valgono anche per $m=0$, dovendosi soltanto nella (20) porre zero al posto della sommatoria.

Per qualsiasi valore di y (reale, si intende) il modulo della quantità in parentesi nell'espressione di R_m è sempre inferiore a $\frac{2}{(|z|+d)^{m+1}}$, talchè

$$(21) \quad R_m < \frac{m!}{q^{m+1} (|z|+d)^{m+1}} \quad (1).$$

(1) Si può osservare che, ammettendo a priori la possibilità di uno sviluppo di $U_2 - F_2$ per potenze di $\frac{1}{q}$, la forma dello sviluppo risulta subito dalla prima equazione (7)

(nel secondo membro della quale si intende posto $-\frac{d \log \frac{1}{F}}{d|z|}$ in luogo di $\frac{dF_2}{d|z|}$).

Però questo modo di procedere, oltre a non essere rigoroso, non permette di apprezzare l'entità del resto.

In modo perfettamente analogo, considerando le derivate di $q(U_2 - F_2)$ rapporto a y e rapporto a $|z|$, si ha

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{d(U_2 - F_2)}{dy} = -\sum_{i=1}^m \frac{(-i)^s}{q^s} \frac{d^{s+1} \log \frac{1}{F}}{d|z|^s dy} + R'_m, \\ \frac{d(U_2 - F_2)}{d|z|} = -\sum_{i=1}^m \frac{(-i)^s}{q^s} \frac{d^{s+1} \log \frac{1}{F}}{d|z|^{s+1}} + R''_m \end{cases}$$

con

$$(23) \quad R'_m, R''_m < \frac{(m+1)!}{q^{m+1} (|z|+d)^{m+2}}.$$

L'equazione differenziale (5') :

$$\frac{dV_2}{dy} = p^i (U_2 - F_2),$$

notando che $|U_2 - F_2|$ è in ogni caso $< \frac{1}{qd}$ e ricordando dalle (8) che

$\frac{p}{q} = B$, ci dà

$$\left| \frac{dV_2}{dy} \right| < \frac{B}{d}.$$

Immaginiamo di sviluppare colla formola di Taylor, arrestata dopo il primo termine, le funzioni qV_2 e $q \frac{dV_2}{d|z|}$, definite dalla (13) e sua derivata rapporto a $|z|$.

Troveremo dopo ovvie riduzioni

$$V_2 = B \left\{ \arctg \frac{y}{|z|+d} - \frac{\pi}{2} + R''' \right\},$$

$$\frac{dV_2}{d|z|} = B \left\{ \frac{d \log \frac{1}{F}}{dy} + R^{IV} \right\}$$

con

$$R''' < \frac{1}{qd}, \quad R^{IV} < \frac{1}{qd^2}.$$

Osservando che, per nessun valore reale di y, z , $\left| \frac{d \log \frac{1}{F}}{dy} \right|$ può supe-

rare $\frac{1}{2}d$, risulta ancora

$$|V_2| < B \left(\pi + \frac{1}{qd} \right),$$

$$\left| \frac{dV_2}{d|z|} \right| < B \left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{qd^2} \right).$$

Noi dobbiamo naturalmente riguardare $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{qd}$ come quantità finite (nei casi pratici anzi molto minori dell'unità; cfr. il § seguente).

Per quanto s'è detto al principio del § 9, siamo ormai autorizzati a porre

$$(24) \quad V_2 = 0.$$

11. *Limite superiore degli errori, da cui possono essere affette le forze elettromagnetiche del campo, quando si usano gli sviluppi asintotici.* — A meno di termini contenenti B a fattore e senza riserve trascurabili, si ha, come abbiám visto,

$$(14) \quad F_2 + \log \frac{1}{r} = 0,$$

$$(24) \quad V_2 = 0.$$

Quale errore può insinuarsi nelle componenti delle forze elettromagnetiche, se, per $U_2 - F_2$ e sue derivate, si introducono gli sviluppi asintotici fino a un ordine determinato, omettendo i resti?

Per riconoscerlo, osserviamo in primo luogo che, essendo, per le (3), $U_1 - F_1$ eguale alla parte reale di

$$2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} (U_2 - F_2),$$

si ha

$$A \left| \frac{d(U_1 - F_1)}{dt} \right| \leq 2I_0 \cdot 2\pi nA \cdot |U_2 - F_2|,$$

$$\left| \frac{d(U_1 - F_1)}{dy} \right| \leq 2I_0 \left| \frac{d(U_2 - F_2)}{dy} \right|,$$

$$\left| \frac{d(U_1 - F_1)}{dz} \right| \leq 2I_0 \left| \frac{d(U_2 - F_2)}{d|z|} \right|.$$

Ora, a tenore delle (I), (II) e

$$(18') \quad F = 2I_0 \operatorname{sen} \omega \left(\log \frac{1}{r} - \log \frac{1}{r'} \right); \quad U = F + (U_1 - F_1), \quad V = 0, \quad W = 0$$

(sono le (18), in cui s'è tenuto conto che $V_1 = 0$), le componenti della

forza elettrica dipendono da $U_1 - F_1$ solo per la presenza del termine

$A \frac{d(U_1 - F_1)}{dt}$; le componenti della forza magnetica solo per termini

$$\frac{d(U_1 - F_1)}{dy}, \frac{d(U_1 - F_1)}{dz}.$$

Dopo ciò, le (21) e (23) mostrano che, quando si introducono per $U_2 - F_2$ e sue derivate, gli sviluppi (20) e (22), fino al termine m^{esimo} , il resto non può superare

$$2 I_0 \cdot 2 \pi n A \cdot \frac{m!}{q^{m+1} (|s| + d)^{m+1}}$$

nella componente X (l'unica delle componenti della forza elettrica, che dipende da $U_1 - F_1$), nè

$$2 I_0 \frac{(m+1)!}{q^{m+1} (|s| + d)^{m+2}}$$

in una componente magnetica.

Per avere un'idea dell'errore relativo, in una componente e in un punto generico, conviene considerare il rapporto fra l'errore assoluto e l'intensità (massima), che compete nello stesso punto alla corrispondente forza, quando manca lo schermo conduttore.

Le (2), in cui dobbiamo intendere, per I , $I \sin \omega$, ci dicono subito che, tanto per la forza magnetica, quanto per la elettrica, tale massima intensità vale

$$\frac{2 I_0}{A}.$$

L'errore relativo non supera dunque

$$2 \pi n A \frac{m! A}{q^{m+1} (|s| + d)^{m+1}}$$

per la forza elettrica, nè

$$\frac{(m+1)! A}{q^{m+1} (|s| + d)^{m+2}}$$

per la magnetica.

Limitandosi, come è per noi sufficiente, a considerare punti in prossimità del piano mediano (piano normale allo schermo passante per la corrente), possiamo per es. supporre

$$y^2 < 3 (|s| + d)^2.$$

Si ha allora a fortiori:

Arrestando lo sviluppo asintotico al termine m^{esimo} , la frazione trascurata di forza elettrica non può superare

$$(25) \quad 2 \pi n A \frac{2 \cdot m!}{q^{m+1} d^m};$$

e la frazione trascurata di forza magnetica

$$(26) \quad \frac{2(m+1)!}{q^{m+1} d^{m+1}}.$$

Facendo nella (25) $m=0$ e ricordando dalla (8) che $q = \frac{4\pi^2 n}{R}$, risulta come errore relativo

$$\frac{AR}{\pi},$$

frazione insignificante anche nel caso di resistenze considerevoli. (Prendendo, come a § 9, una lastra di argentana di un decimillimetro, si ha all'incirca $\frac{AR}{\pi} = 0,00002$).

Concludiamo dunque che, per quanto concerne la forza elettrica, è lecito ritenere senza errore sensibile

$$U_2 - F_2 = 0.$$

Affinchè l'uso degli sviluppi asintotici di $\frac{d(U_2 - F_2)}{dy}$, $\frac{d(U_2 - F_2)}{d|z|}$ nelle componenti della forza magnetica risponda allo scopo, è necessario che, per qualche valore di m , la (26) sia una piccola frazione dell'unità; per es. dell'ordine di $\frac{1}{10}$, se si tratta di ricerche puramente qualitative; più piccola (a norma dell'esattezza richiesta), se si tratta di ricerche quantitative.

Se esiste un valore di m che conviene, ad esso — e non oltre — vanno arrestati gli sviluppi.

Affinchè in particolare si possa prendere $m=1$ con errore non superiore all'un per cento, basterà, per la (26), che sia

$$\frac{4}{q^2 d^2} \leq \frac{1}{100},$$

cioè

$$(27) \quad \frac{2}{qd} \leq \frac{1}{10},$$

o finalmente, in via approssimativa,

$$(27') \quad \frac{R}{nd} \leq 2.$$

Questa condizione è soddisfatta da lastre di rame dello spessore di un millimetro ($R=16000$), distanti un metro dalla corrente ($d=100$), purchè la frequenza sia almeno 80.

Fissati R e d , l'errore possibile $\frac{4}{q^2 d^2}$ varia con n in ragione inversa dei

quadrati. Così ad es., per $n = 200$, esso è inferiore a $\left(\frac{80}{200}\right)^2 \frac{1}{100}$, cioè al 0,16 per cento; mentre, per $n = 60$, si può contare soltanto sopra una esattezza del $\left(\frac{80}{60}\right)^2 \frac{1}{100}$, cioè all'incirca del 2 per cento.

12. *Espressioni approssimate — Interpretazione fisica.* — Bene intesi sui limiti dell'approssimazione corrispondente ad $m = 1$, adottiamo come valore di $U_2 - F_2$, da introdursi nelle componenti della forza magnetica, il

primo termine $\frac{i}{q} \frac{d \log \frac{1}{F}}{d|z|}$ dello sviluppo asintotico (20) (1).

Per essere $U_1 - F_1$ la parte reale di

$$2 I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} (U_2 - F_2),$$

avremo

$$U_1 - F_1 = \frac{2 I_0}{q} \cos \omega \frac{d \log \frac{1}{F}}{d|z|}.$$

mentre, come s'è visto, è lecito ritenere $U_2 - F_2$, e di conseguenza, $U_1 - F_1 = 0$, nel valutare le componenti della forza elettrica.

Ciò posto, le (18'), introdotte nelle (I), (II), danno, per le componenti delle forze magnetica ed elettrica,

$$(28) \quad \begin{cases} L = 0, \\ M = -2 I_0 \frac{d}{dz} \left\{ \operatorname{sen} \omega \left(\log \frac{1}{A} - \log \frac{1}{F} \right) + \frac{\cos \omega}{q} \frac{d \log \frac{1}{F}}{d|z|} \right\}, \\ N = 2 I_0 \frac{d}{dy} \left\{ \operatorname{sen} \omega \left(\log \frac{1}{A} - \log \frac{1}{F} \right) + \frac{\cos \omega}{q} \frac{d \log \frac{1}{F}}{d|z|} \right\}; \end{cases}$$

$$(29) \quad \begin{cases} X = 0, \\ Y = -2 I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{d}{dy} \left\{ \log \frac{1}{A} - \log \frac{1}{F} \right\}, \\ Z = -2 I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{d}{dz} \left\{ \log \frac{1}{A} - \log \frac{1}{F} \right\} \end{cases}$$

$$(\omega = 2 \pi n (t - Ax) + \alpha).$$

(1) Che è derivabile termine a termine, come mostrano direttamente le (22).

Considerando in particolare i punti al di là dello schermo rispetto alla corrente ($z < 0$), si ha

$$r = A,$$

e

$$-\frac{d}{dz} = \frac{d}{d|z|}.$$

Le (28), (29), eseguendo le derivazioni, divengono

$$(28') \quad \begin{cases} L = 0, \\ M = \frac{2I_0}{q} \cos \omega \frac{(|z| + d)^2 - y^2}{A^4}, \\ N = \frac{2I_0}{q} \cos \omega \frac{2(|z| + d)y}{A^4}; \end{cases}$$

$$(29') \quad X = Y = Z = 0.$$

La forza elettrica è dunque sensibilmente intercettata dallo schermo, come (rigorosamente) ha luogo in elettrostatica.

Quanto alla forza magnetica, per acquistare un'idea adeguata della modificazione prodotta dal conduttore, giova confrontarla colla

$$(30) \quad \begin{cases} L' = 0, \\ M' = -2I_0 \sin \omega \frac{|z| + d}{A}, \\ N' = -2I_0 \sin \omega \frac{y}{A}, \end{cases}$$

che, a norma delle (2), agisce negli stessi punti ($z < 0$), quando manca lo schermo.

Sieno

$$H_0 = \frac{2I_0}{q} \frac{1}{A^2} \sqrt{(|z| + d)^2 - y^2 + 4(|z| + d)^2 y^2} = \frac{2I_0}{q} \frac{1}{A^2},$$

$$H'_0 = 2I_0 \frac{1}{A}$$

le rispettive intensità massime.

Si ha

$$(31) \quad \frac{H_0}{H'_0} = \frac{1}{qA}.$$

Lo schermo riduce dunque la intensità massima della forza magnetica (nei punti al di là) alla frazione $\frac{1}{qA}$ di quella che si avrebbe in sua assenza.

Dacchè \mathcal{A} non può discendere in questi punti al di sotto di d , siamo dalle osservazioni numeriche del precedente § autorizzati a concludere che, nel caso di correnti alternative industriali (entro i limiti di validità dell'approssimazione qui adottata), la presenza dello schermo riduce la forza magnetica a pochi centesimi del suo valore, per dir così, naturale; la intercetta sensibilmente per più alte frequenze (1).

Indichiamo con \mathcal{P} l'angolo che la linea d'azione della forza magnetica naturale fa coll'asse y . Le (30) e (28') mostrano subito che, nel campo magnetico modificato dalla presenza del conduttore, l'analogo angolo (contato, a partire dall'asse y , nello stesso senso) vale $2\mathcal{P}$.

Nei punti del piano mediano ($y = 0$, $\mathcal{P} = 0$) N , e così N' , si annullano. La forza è dunque in questi punti (esista o no lo schermo) normale al piano mediano stesso.

La forza magnetica naturale (30) ha in un generico istante t , l'intensità $|\operatorname{sen} \omega| H'_0$; quella modificata dal piano conduttore $|\cos \omega| H_0$. Ai massimi dell'una corrispondono dunque i minimi dell'altra, e reciprocamente; ossia *le due fasi sono a una distanza di un quarto di periodo*.

Si osservi da ultimo che, finchè si tratta di correnti alternative industriali, si può identificare la fase ω con $2\pi nt + \alpha$, poichè allora $2\pi n \Delta x$ non ha certo valore apprezzabile nel campo di osservazione (entro cui si suppongono naturalmente gli assi di riferimento).

Matematica. — *Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.* Nota II (2) di UGO AMALDI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

In questa Nota, facendo seguito ad altra, che, sotto analogo titolo, ha avuto di recente l'onore di essere presentata a questa illustre Accademia, completo la ricerca di cui là ho posto l'enunciato e le basi. Conservo, naturalmente, le medesime notazioni e seguito, per le formole, la numerazione.

3. Il sistema di equazioni, che caratterizza i sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici di una data superficie e del quale quindi noi dobbiamo discutere le condizioni di integrabilità, si ottiene dal sistema (3) ponendovi $\beta = 0$. Esso è dunque:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{dy}{ds_1} = 0 & , \quad \frac{dy}{ds_2} = \frac{1}{2}(\alpha + K) + \gamma^2 \\ \frac{d(\gamma)}{ds_1} = \frac{1}{2}(\alpha - K) - (\gamma)^2 & , \quad \frac{d(\gamma)}{ds_2} = 0 \end{cases}$$

(1) Carattere questo ben noto. Cfr. Poincaré, *Les oscillations électriques*, pag. 58.

(2) V. pag. 198.