ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

Dacchè Δ non può discendere in questi punti al di sotto di d, siamo dalle osservazioni numeriche del precedente § autorizzati a concludere che, nel caso di correnti alternative industriali (entro i limiti di validità dell'approssimazione qui adottata), la presenza dello schermo riduce la forza magnetica a pochi centesimi del suo valore, per dir così, naturale; la intercetta sensibilmente per più alte frequenze [1].

Indichiamo con ϑ l'angolo che la linea d'azione della forza magnetica naturale fa coll'asse y. Le (30) e (28') mostrano subito che, nel campo magnetico modificato dalla presenza del conduttore, l'analogo angolo (contato, a partire dall'asse y, nello stesso senso) vale 2ϑ.

Nei punti del piano mediano ($y=0$, $\vartheta=0$) N, e così N', si annullano. La forza è dunque in questi punti (esista o no lo schermo) normale al piano mediano stesso.

La forza magnetica naturale (30) ha in un generico istante t, l'intensità $|\text{sen}\,\omega|\,H'_0$; quella modificata dal piano conduttore $|\cos\omega|\,H_0$. Ai massimi dell'una corrispondono dunque i minimi dell'altra, e reciprocamente; ossia *le due fasi sono a una distanza di un quarto di periodo.*

Si osservi da ultimo che, finchè si tratta di correnti alternative industriali, si può identificare la fase ω con $2\pi nt+\alpha$, poichè allora $2\pi nAx$ non ha certo valore apprezzabile nel campo di osservazione (entro cui si suppongono naturalmente gli assi di riferimento).

Matematica. — *Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici.* Nota II [2] di Ugo Amaldi, presentata dal Socio S. Pincherle.

In questa Nota, facendo seguito ad altra, che, sotto analogo titolo, ha avuto di recente l'onore di essere presentata a questa illustre Accademia, completo la ricerca di cui là ho posto l'enunciato e le basi. Conservo, naturalmente, le medesime notazioni e seguito, per le formole, la numerazione.

3. Il sistema di equazioni, che caratterizza i sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici di una data superficie e del quale quindi noi dobbiamo discutere le condizioni di integrabilità, si ottiene dal sistema (3) ponendovi $\beta=0$. Esso è dunque:

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d\gamma}{ds_1}=0 & ,\quad \dfrac{d\gamma}{ds_2}=\tfrac12(\alpha+K)+\gamma^2 \\[2ex] \dfrac{d(\gamma)}{ds_1}=\tfrac12(\alpha-K)-(\gamma)^2, & \dfrac{d(\gamma)}{ds_2}=0 \end{array}\right.$$

(1) Carattere questo ben noto. Cfr. Poincaré, *Les oscillations électriques*, pag. 58.
(2) V. pag. 198.

e ad esso vanno aggiunte le equazioni (5) (8) che in questo caso diventano:

$$(11) \quad \frac{d\alpha}{ds_1} = -\frac{dK}{ds_1} - 2(\gamma)\left[\tfrac{1}{2}(\alpha + K) + \gamma^2\right], \quad \frac{d\alpha}{ds_2} = \frac{dK}{ds_2} + 2\gamma\left[\tfrac{1}{2}(\alpha - K) - (\gamma)^2\right]$$

$$(12) \qquad \frac{d^2K}{ds_2\, ds_1} + \frac{d^2K}{ds_1\, ds_2} + 3\left[(\gamma)\frac{dK}{ds_2} - \gamma\frac{dK}{ds_1}\right] = 0.$$

Poichè quest'ultima per $K = \text{cost.}$ è identicamente soddisfatta, il sistema (10) (11) è in tal caso completo: poichè tale sistema appartiene manifestamente alla nota classe di sistemi differenziali studiati dal Lie [1] ritroviamo il risultato già ben conosciuto [2], che sulle superficie a curvatura totale costante esistono ∞^4 sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici; essi si determinano integrando il sistema completo (10) (11) [per $K = \text{cost.}$].

Escluso il caso della superficie a curvatura totale costante, indichiamo con (g) e g rispettivamente le curvature geodetiche delle linee $K = \text{cost.}$ e delle loro traiettorie ortogonali, e con ψ l'angolo delle linee di curvatura geodetica γ con quelle di curvatura geodetica g. Se allora poniamo:

$$h = \frac{\Delta_1 K}{\Delta_2 K} - (g),$$

dove Δ_1 e Δ_2 rappresentano i ben noti parametri differenziali del primo e del secondo ordine rispettivamente, la (12) si può ridurre alla forma:

$$2\gamma\cos\psi - 2(\gamma)\,\text{sen}\,\psi = \frac{h - (g)}{2}\,\text{sen}\,2\psi + 2g\cos 2\psi;$$

se poniamo $h - (g) = 2\nu$ e introduciamo una nuova indeterminata μ, quest'ultima equazione è equivalente al sistema:

$$(13) \quad 2\gamma = (\mu + \nu)\,\text{sen}\,\psi + g\cos\psi, \quad 2(\gamma) = (\mu - \nu)\cos\psi + g\,\text{sen}\,\psi.$$

Ora ci rimane da stabilire sotto quali condizioni per la μ e la ψ le espressioni precedenti di γ e (γ) rendano soddisfatte le (10), fra cui sia eliminata la α, che nelle (13) non compare più, vale a dire le (1), (2) e la (4). Ma, se introduciamo il sistema coordinato covariante φ_r $(r = 1, 2)$ del fascio cui appartengono le congruenze γ e (γ) e il rispettivo sistema ortogonale canonico $\bar{\varphi}_r$, le (1), (2) sono rispettivamente equivalenti alle [3]:

$$\sum_{r,s} a^{(rs)}\,\bar{\varphi}_{rs} = K, \quad \sum_{r,s} a^{(rs)}\,\varphi_{rs} = 0.$$

(1) Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen.* Erster Abschnitt. Kap. 10.

(2) Darboux, l. c. III Partie, n. 655.

(3) Ricci et Levi-Civita, l. c., chap. VI, § 1.

Se indichiamo con $\frac{d}{d\sigma_2}, \frac{d}{d\sigma_1}$ le derivate intrinseche secondo le curve $K = \text{cost.}$ e le loro traiettorie ortogonali, e designiamo con q l'anisotermia del fascio definito dalle $K = \text{cost.}$, le due ultime equazioni, ove tengasi conto delle (12), dànno luogo a due equazioni indipendenti, lineari, rispetto a $\frac{d\mu}{d\sigma_1}$ e $\frac{d\mu}{d\sigma_2}$, che, risolute rispetto a codeste due derivate, dànno:

$$
[\mathrm{I}] \quad \begin{cases} \dfrac{d\mu}{d\sigma_1} = \left(\dfrac{p}{2} - \mu^2\right) \cos 2\psi - \frac{1}{2} q \operatorname{sen} 2\psi + \frac{1}{2} \mu (h + (g)) \\[2ex] \dfrac{d\mu}{d\sigma^2} = -\left(\dfrac{p}{2} - \mu_2\right) \operatorname{sen} 2\psi - \frac{1}{2} q \cos 2\psi \\[2ex] p = \dfrac{dh}{d\sigma_1} + \dfrac{d(g)}{d\sigma_1} + (h + (g))(g) - 2\mathrm{K} \end{cases}
$$

A queste equazioni aggiungiamo la rispettiva condizione di integrabilità:

$$
[\mathrm{II}] \quad \begin{cases} 2\mu q = \mathrm{A} \operatorname{sen} 2\psi + \mathrm{B} \cos 2\psi \\[1ex] \mathrm{A} = \frac{1}{2} \dfrac{dq}{d\sigma_2} + \frac{1}{2}(h + (g))p - \frac{1}{2} \dfrac{dp}{d\sigma_2}, \; \mathrm{B} = -\frac{1}{2} \dfrac{dq}{d\sigma_1} + \frac{1}{2}(h + (g))q - \frac{1}{2} \dfrac{dp}{d\sigma_2}. \end{cases}
$$

L'equazione (4), ove si tenga conto della prima delle (13), diventa:

$$
[\mathrm{III}] \quad \begin{cases} -3\mu^2 \operatorname{sen} 2\psi + 2\mu g = \mathrm{A}' \operatorname{sen} 2\psi + \mathrm{B}' \cos 2\psi \\[1ex] \mathrm{A}' = 2\dfrac{dg}{d\sigma_2} - 2\dfrac{d\nu}{d\sigma_1} + \frac{1}{4}[h + 3(g)][h - (g)] + g^2 - p, \; \mathrm{B}' = -4\dfrac{dg}{d\sigma_1} - 2g\nu. \end{cases}
$$

Infine dobbiamo tener conto del fatto che ψ è l'angolo di due congruenze, l'una del fascio φ_r, l'altra del fascio della conguenza $K = \text{cost.}$; applicando una relazione nota fra ψ e i sistemi coordinati covarianti dei due fasci ([2]) e tenendo conto delle [I] troviamo il sistema:

$$
[\mathrm{IV}] \quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{d\sigma_1} = -\frac{1}{2} \mu \operatorname{sen} 2\psi + \frac{1}{2} g \\[2ex] \dfrac{d\psi}{d\sigma_2} = -\frac{1}{2} \mu \cos 2\psi + \frac{1}{2}(g) + \frac{1}{4}(h + (g)), \end{cases}
$$

la cui condizione di integrabilità è, come è ben naturale, conseguenza delle [I].

4. Da quanto precede risulta che affinchè la varietà data contenga sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici, è necessario e sufficiente

([1]) Ricci, *Lezioni* ecc., pag. 163, form. (5).

che esistano due funzioni μ e ψ, le quali soddisfacciano al sistema [I, II, III, IV]. Se questo sistema ammette soluzioni, a ciascuna di esse corrisponde sulla varietà data un sistema doppio ortogonale isotermo di cerchi geodetici, i cui sistemi coordinati covarianti si esprimono immediatamente per mezzo dell'angolo ψ e degli analoghi sistemi covarianti della congruenza $K = \text{cost.}$ e della congruenza ortogonale.

Ci resta adunque soltanto da discutere quando l'indicato sistema ammetta soluzioni.

È manifesto che le equazioni II e III non possono essere soddisfatte identicamente, vale a dire senza portare alcun legame fra μ e ψ. Esse quindi o sono distinte, o si riducono ad una sola. Nel primo caso esse definiscono μ e ψ, assegnando per codesta coppia di funzioni un numero finito di determinazioni. Se qualcuna fra queste rende soddisfatte anche le equazioni differenziali I e IV, esiste corrispondentemente a ciascuna di esse, sulla varietà data, una coppia di congruenze ortogonali isoterme di cerchi geodetici. Tralasciando di sviluppare i complicatissimi calcoli che si richiederebbero a formare esplicitamente le condizioni, sotto cui le funzioni μ e ψ definite dalle II e III rendono soddisfatte le I e IV, ci limiteremo ad osservare che il caso è teoricamente caratterizzato, in quanto, riconosciuta l'indipendenza delle II e III, si constata, mediante operazioni in numero ed in termini finiti, se sulla data varietà esistano o no sistemi doppî di cerchi geodetici (in numero finito), e in caso affermativo si determinano completamente.

Se le II e III si riducono ad una sola equazione, si riconosce subito, ponendo uguale a zero il determinante funzionale dei loro primi membri rispetto a μ e ψ, od anche mediante una semplice discussione diretta, che deve verificarsi l'uno o l'altro dei seguenti sistemi di condizioni:

a) $$A = B = q = 0$$
oppure:
b) $$A = B = A' = B' = 0.$$

Nel caso a) la $q = 0$ ci dice che sulla data varietà la congruenza di curve $K = \text{cost.}$ deve essere isoterma: le altre due equazioni dànno, come risulta dalle espressioni di A e B,

$$\frac{dp}{d\sigma_2} = 0 \quad , \quad \frac{dp}{d\sigma_1} = (h + (g))\, p\,.$$

Ma sopratutto ci importa di notare che in tal caso, la II essendo una identità, rimane a considerare la sola III.

Derivando questa secondo σ_1 e σ_2 e tenendo conto delle I e IV otteniamo le due equazioni:

$$
[\mathrm{III}'] \left\{ \begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\mu(9\mu^2-3p+\mathrm{A}')\,\mathrm{sen}\,4\psi+(\mathrm{C}-3\mu^2(h+(g)))\,\mathrm{sen}\,2\psi+\\
&\quad+(\mathrm{D}-5\mu^2 g)\cos 2\psi-\mathrm{B}'\mu\,\mathrm{sen}^2\,2\psi+g(h+(g))\mu+2\mu\frac{dg}{d\sigma_1}=0\\
&3\mu^3(1-3\,\mathrm{sen}^2\,2\psi)-\frac{\mu}{2}\mathrm{B}'\,\mathrm{sen}\,4\psi+(\mathrm{C}'+2\mu^2 g)\,\mathrm{sen}\,2\psi+\\
&\quad+(\mathrm{D}'-\tfrac{3}{2}\mu^2 h-\tfrac{9}{2}\mu^2(g))\cos 2\psi+\mathrm{A}'\mu\cos^2 2\psi=0\\
&\mathrm{C}=g\,\mathrm{B}'-\frac{d\mathrm{A}'}{d\sigma_1}\,,\ \mathrm{D}=g(p-\mathrm{A}')-\frac{d\mathrm{B}'}{d\sigma_1}\,,\\
&\mathrm{C}'=-gp+\tfrac{1}{2}(h+3(g))\mathrm{B}'-\frac{d\mathrm{A}'}{d\sigma_2}\,,\ \mathrm{D}'=-\tfrac{1}{2}(h+3(g))\mathrm{A}'-\frac{d\mathrm{B}'}{d\sigma_2}
\end{aligned} \right.
$$

Ora se le tre equazioni III, III′ sono incompatibili, sulla data varietà non vi sono sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici. Se sono compatibili e si riducono a due soltanto, esse definiscono un numero finito di determinazioni per la coppia di funzioni μ e ψ e possiamo constatare mediante un numero finito di operazioni in termini finiti se ad esse corrispondano effettivamente sulla varietà data sistemi doppî della specie cercata e in caso affermativo li possiamo effettivamente determinare. Se, infine, le III, III′ si riducono ad una sola equazione (la III), si riconosce, mediante una discussione che richiede calcoli alquanto laboriosi ma di nessuna intrinseca difficoltà, che si ricade nel caso *b*).

In questo caso le II, III si riducono alla $\mu=0$ e perciò il sistema I diventa:

$$p\cos 2\psi-q\,\mathrm{sen}\,2\psi=0\ ,\ p\,\mathrm{sen}\,2\psi+q\cos 2\psi=0\,,$$

onde risulta, insieme con le *b*), $p=q=0$. Anche in questo caso, dunque, si tratta di superficie, su cui le curve $\mathrm{K}=\mathrm{cost.}$ formano una congruenza isoterma. L'angolo ψ è in tal caso definito dal sistema, necessariamente completo:

$$\frac{d\psi}{d\sigma_1}=\tfrac{1}{2}g\ ,\quad \frac{d\psi}{d\sigma_2}=\tfrac{3}{4}(g)+\tfrac{1}{4}h\,, \tag{14}$$

la cui soluzione generale dipende da una costante arbitraria. Si hanno dunque sulla varietà data ∞^1 sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici.

5. Concludendo la nostra ricerca, abbiamo che, *se si prescinde dalle superficie a curvatura totale costante, sulle quali esistono ∞^4 sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici, su di una superficie non possono esistere più di ∞^1 sistemi doppi siffatti. Le superficie che contengono effettivamente una semplice infinità di codesti sistemi sono caratterizzate dal sistema di equazioni intrinseche*:

$$
(15)\quad \begin{cases} \dfrac{dg}{d\sigma_1}+\dfrac{d(g)}{d\sigma_2}=0 \;, & \dfrac{d(g)}{d\sigma_1}+\dfrac{dh}{d\sigma_1}+(h+(g))\,(g)-2\,\mathrm{K}=0 \\[2ex] 4\dfrac{dg}{d\sigma_1}+(h-(g))g=0\,, & \dfrac{d(g)}{d\sigma_1}+\dfrac{dg}{d\sigma_2}=\mathrm{K}-\dfrac{h}{8}[h+6(g)]-\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{8}(g)^2 \end{cases}
$$

Verificate queste condizioni, gli ∞^1 *sistemi doppi in parola si determinano integrando il sistema completo* (14).

Finiremo osservando che se, anzichè supporre dato l'elemento lineare, si volessero determinare tutti i ds^2 a curvatura totale non costante, su cui esistono ∞^1 sistemi doppî ortogonali isotermi di cerchi geodetici (problema del Darboux) bisognerebbe integrare il sistema differenziale, che si ottiene aggiungendo alle (15) la formola del Liouville relativa al fascio cui appartengono le curve $\mathrm{K} = \text{cost.}$, e la nota relazione che lega l'invariante h alle curvature geodetiche g e (g) (¹), cioè le due equazioni:

$$
\frac{d(g)}{d\sigma_1}-\frac{dg}{d\sigma_2}+g^2+(g)^2+\mathrm{K}=0\,,\quad \frac{dh}{d\sigma_2}=\frac{dg}{d\sigma_1}+g\,(h+(g))\,.
$$

Fisica. — *Ricerche di radioattività indotta.* Nota IIª di A. Sella, presentata dal Socio Blaserna.

1. In una Nota preliminare presentata a codesta Accademia nella seduta del 19 gennaio 1902, annunziavo che si può rendere radioattivo un corpo metallico, quando si affacciano ad essa delle punte e si pongono punte e corpo in comunicazione coi poli di una macchina elettrostatica. La mia prima disposizione consisteva nell'attivare una spirale di filo metallico, coassialmente alla quale era posto un cilindro fornito di aghi radiali. Le ricerche ulteriori furono condotte nel seguente modo.

Si prende una lastra metallica (cm. 10×14) e normalmente ad essa si pongono 3 aghi colle punte verso la lastra (ai vertici di un triangolo di 2 cm. di lato). Aghi e lastra sono posti in comunicazione coi poli di una macchina elettrostatica con un condensatore in derivazione, e si lascia funzionare questa per un certo tempo (di solito mezz'ora); la distanza fra le punte e la lastra varia a seconda della potenza della macchina; essa veniva in fatti regolata in modo da avere effluvio, senza che scoccassero scintille, e riesce quindi molta diversa a seconda del segno elettrico delle punte.

Per misurare l'attività acquistata dalla lastra, la si poneva poi in comunicazione con il polo di una batteria di elementi (il cui altro polo era a terra), mentre affacciata alla lastra era una rete metallica parallela, in comunicazione

(¹) Ricci, *Lezioni* ecc., n. 43, form. (15_1).