ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 aprile 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie.* Nota del Socio L. Bianchi.

1. Per enunciare sotto forma semplice il problema che tratto nella presente Nota, premetto le definizioni seguenti. Si consideri una superficie S flessibile ed inestendibile. Per ogni deformazione della S cangiano le sue linee assintotiche (reali od immaginarie); diciamo assintotiche *attuali* le effettive assintotiche della S, nella sua configurazione attuale, ed assintotiche *virtuali* ogni sistema di linee di S suscettibili di diventare assintotiche dopo una conveniente deformazione. Come è ben noto, dato un sistema di assintotiche virtuali, la deformazione corrispondente che deve subire la S, per renderle attuali, è pienamente determinata. Ciò premesso, ecco l'enunciato del problema di cui ci vogliamo occupare: *Trovare tutte le coppie di superficie* S, S_1 *corrispondenti l'una all'altra punto per punto, in guisa che si corrispondano le loro assintotiche attuali e inoltre a qualsiasi sistema di assintotiche virtuali di* S *corrisponda un sistema di assintotiche virtuali sopra* S_1.

Se una tale coppia di superficie esisterà, è chiaro che ogni deformazione della S trarrà seco una corrispondente deformazione della S_1, cosicchè i due problemi di trovare tutte le superficie applicabili sopra S o quelle applicabili sopra S_1 saranno perfettamente equivalenti. Diremo, per abbreviare, che le due superficie S, S_1 sono *coniugate in deformazione*.

Se le due superficie S, S_1 hanno curvatura positiva, le loro linee assintotiche, attuali o virtuali, sono immaginarie. Volendo anche in questo caso enunciare il problema sotto forma reale, basterà parlare invece della corrispondenza dei *sistemi coniugati* di S a quelli di S_1. Allora, per qualunque deformazione della S, vi ha uno ed un solo sistema attualmente coniugato (sempre reale) che si conserva coniugato dopo la deformazione; lo diremo perciò un sistema coniugato *permanente*. E potremo quindi enunciare il problema sotto l'altra forma: *Trovare le coppie di superficie* S, S_1 *che si corrispondono per sistemi coniugati, e tali di più che ad ogni sistema coniugato permanente di* S *corrisponda un sistema coniugato permanente sopra* S_1.

Avvi una soluzione ovvia del problema, che trascuriamo nel seguito. Essa si ottiene associando ad una superficie qualunque S una sua omotetica S_1.

2. Per trattare analiticamente il problema enunciato, riferiamo le due superficie supposte S, S_1 ad un sistema di coordinate curvilinee u, v, e siano

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$
$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1 dv^2 \tag{1*}$$

le rispettive espressioni dei quadrati dei loro elementi lineari. Ogni deformazione della S è individuata ([1]) dalla relativa seconda forma quadratica fondamentale

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 .$$

La nostra ipotesi equivale a dire che deve esistere ogni volta una seconda forma fondamentale corrispondente per S_1

$$D_1 du^2 + 2D_1'\,du\,dv + D_1''\,dv^2 ,$$

tale che sussistano le proporzioni

$$D_1 : D_1' : D_1'' = D : D' : D'' .$$

Pei calcoli seguenti conviene meglio sostituire a D, D', D'' le quantità

$$\Delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}},$$

e analogamente a D_1, D_1', D_1'':

$$\Delta_1 = \frac{D_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}, \quad \Delta_1' = \frac{D_1'}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}, \quad \Delta_1'' = \frac{D_1''}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} .$$

([1]) *Lezioni di Geometria differenziale*, cap. IV.

Si sa allora ([1]) che $\Delta, \Delta', \Delta''$ sono unicamente vincolate dalla equazione di Gauss

$$(2) \qquad \Delta\Delta'' - \Delta'^2 = \mathrm{K},$$

indicando con K la curvatura totale di S, e dalle due equazioni di Codazzi:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Delta}{\partial v} - \dfrac{\partial\Delta'}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\Delta - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\Delta' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\Delta'' = 0 \\ \dfrac{\partial\Delta''}{\partial u} - \dfrac{\partial\Delta'}{\partial v} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\Delta - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\Delta' + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\Delta'' = 0, \end{cases}$$

i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}$ ecc. essendo costruiti per la prima forma quadratica fondamentale (1) di S.

Si ha per ipotesi

$$\Delta_1 = \lambda\Delta, \quad \Delta_1' = \lambda\Delta', \quad \Delta_1'' = \lambda\Delta'',$$

dove λ indica un conveniente fattore di proporzionalità. Intanto dalla corrispondente equazione di Gauss

$$\Delta_1\Delta_1'' - \Delta_1'^2 = \mathrm{K}_1$$

si trae per λ^2 il valore

$$(4) \qquad \lambda^2 = \frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}}.$$

Questo fattore λ serba dunque invariato il suo valore per qualunqne deformazione simultanea di S, S_1.

Ora se scriviamo le equazioni (3) di Codazzi per la S e vi sottragghiamo ordinatamente le (3) stesse moltiplicate per λ, ne deduciamo le due equazioni di condizione

$$(5) \qquad \begin{cases} \Delta\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} - \Delta'\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1 - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta + 2\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1\right]\lambda\Delta' + \\ \qquad + \left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1 - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta'' = 0 \\ \Delta''\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} - \Delta'\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} + \left[\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1 - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta + 2\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1\right]\lambda\Delta' + \\ \qquad + \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1 - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta'' = 0. \end{cases}$$

Siccome λ non cangia di valore, queste sono equazioni lineari omogenee in $\Delta, \Delta', \Delta''$ che debbono aver luogo, per ipotesi, in tutte le flessioni di S, cioè per tutte le terne di valori di $\Delta, \Delta', \Delta''$ soddisfacenti alle (2), (3).

([1]) *Lezioni* ecc., pag. 90-91.

Segue di qui che le (5) debbono risolversi in identità [1], ciò che dà luogo alle 6 equazioni di condizione:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial u} = 2\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1\right], & \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial v} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1 \\ \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial u} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1 & \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial v} = 2\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1\right] \\ \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1, & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1. \end{cases}$$

Osserviamo che se si supponesse costante λ, ossia costante il rapporto delle due curvature, seguirebbe dalle (6) l'eguaglianza dei valori dei corrispondenti simboli di Christoffel per S, S_1. Ma allora dalle formole (II) a pag. 51 delle Lezioni si deduce subito che saremmo nel caso ovvio escluso di due superficie omotetiche.

3. Paragonando fra loro le (6) delle due prime righe e aggiungendo le formole della terza riga, vediamo intanto che debbono essere soddisfatte le quattro condizioni seguenti:

$$(7)\quad \begin{cases} \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1 - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1, & \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1 - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 \\ \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1, & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1. \end{cases}$$

Queste hanno un notevole significato geometrico, che si trova ricorrendo alla equazione differenziale delle geodetiche sopra S, scritta sotto la forma a pag. 150 delle Lezioni:

$$(8)\quad v'' - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} v'^3 + \left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right] v'^2 + \left[2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right] v' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0.$$

Qui è supposta, lungo la geodetica, espressa v in funzione di u, e gli accenti indicano derivazione rapporto a u. Le (7) esprimono che la (8) è la stessa costruita per S o per S_1, e per ciò alle geodetiche di S debbono corrispondere le geodetiche di S_1, o come diciamo per brevità: *la rappresentazione di* S *sopra* S_1 *deve essere una rappresentazione geodetica.*

Supponiamo ora inversamente che le superficie S, S_1 si corrispondano punto per punto in guisa che siano conservate le linee geodetiche, ed insieme le linee assintotiche attuali, e dimostriamo che a qualunque sistema d'assintotiche virtuali sopra S corrisponderà ancora sopra S_1 un sistema della stessa natura.

[1] Per la dimostrazione rigorosa v. il § 2 della mia Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (Annali di Matematica, Serie 3ª, T. III, 1899).

Indichino infatti $\Delta_0, \Delta'_0, \Delta''_0$, i valori di $\Delta, \Delta', \Delta''$ per la configurazione attuale di S. I calcoli del § 2 dimostrano che $\Delta_0, \Delta'_0, \Delta''_0$, soddisferanno alle (5), avendo λ^2 il valore (4). Ma poichè d'altra parte la rappresentazione di S sopra S_1 è geodetica, sussisteranno le (7) e si avrà quindi

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1$$
$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 = \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1.$$

Indicando con A il valore comune delle due prime quantità, con B quello delle due seconde, le equazioni (5) per $\Delta_0, \Delta'_0, \Delta''_0$ si scrivono

$$\Delta_0 \mathrm{B} - \Delta'_0 \mathrm{A} = 0, \quad -\Delta'_0 \mathrm{B} + \Delta''_0 \mathrm{A} = 0.$$

Ma siccome il determinante

$$\Delta_0 \Delta''_0 - \Delta'^2_0 = \mathrm{K}$$

non è nullo, risulta di qui $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$, cioè sono soddisfatte tutte le (6) e le superficie S, S_1 sono quindi coniugate in deformazione, c. d. d.

Possiamo compendiare i risultati ottenuti nel teorema: *Affinchè sopra due superficie* S, S_1, *che si corrispondono con conservazione delle linee assintotiche attuali, si corrispondano altresì tutte le assintotiche virtuali, è necessario e sufficiente che la rappresentazione di* S *sopra* S_1 *conservi le linee geodetiche.*

4. Colle considerazioni esposte sopra il problema enunciato viene ridotto alla questione seguente: *Trovare tutte le coppie di superficie* S, S_1 *che si corrispondono con conservazione delle linee geodetiche e dei sistemi coniugati.*

È ben noto come il problema di trovare le coppie di superficie rappresentabili geodeticamente l'una sull'altra (o meglio i loro ds^2) è stato risoluto dal Dini (¹).

L'una e l'altra superficie (escluso il caso ovvio dell'omotetia) debbono appartenere alla classe di Liouville, e più precisamente i due sistemi ortogonali che si conservano nella rappresentazione sono costituiti da due sistemi isotermi di ellissi e di iperbole geodetiche. Qui mi limiterò a trattare il caso particolare in cui la prima e quindi anche la seconda superficie di Liouville sia applicabile sopra una superficie di rotazione, ed il detto sistema isotermo si riduca ai meridiani e paralleli.

Si troverà così una classe effettiva di superficie di rotazione, dipendenti da due costanti arbitrarie, che risolve il nostro problema. Esse possono iden-

(¹) *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie sopra un'altra* (Annali di matematica, t. III, 1869). Cf. anche Darboux, *Leçons*, III^e Partie, pag. 47.

tificarsi con quadriche di rotazione (reali od immaginarie), ovvero colle evolute delle superficie applicabili sulla sfera.

Poniamo l' elemento lineare della prima superficie S sotto la forma

$$(a)\quad ds^2 = r^2 (du^2 + dv^2),$$

dove r è funzione della sola u. Risulta allora dalle citate ricerche del Dini (V. § 5 della Memoria) che l'elemento lineare della S_1, rappresentata geodeticamente sopra S, avrà la forma

$$ds_1^2 = \frac{r^2}{b(ar^2+b)^2}\,du^2 + \frac{r^2\,dv^2}{ar^2+b}.$$

Delle due costanti arbitrarie a, b la seconda, limitandoci come intendiamo di fare a superficie ed a rappresentazioni reali, deve essere positiva. Sostituendo alla S_1 una sua omotetica possiamo rendere $b=1$, senza alterare la generalità; così avremo:

$$(a^*)\qquad ds_1^2 = \frac{r^2}{(ar^2+1)^2}\,du^2 + \frac{r^2}{ar^2+1}\,dv^2 .$$

Si osservi ora in generale che per un ds^2 della forma

$$ds = \alpha^2\,du^2 + \beta^2\,dv^2$$

con α, β *funzioni della sola* u, i valori dei simboli di Christoffel sono i seguenti:

$$(9)\qquad \begin{cases} \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \dfrac{\alpha'}{\alpha}, & \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -\dfrac{\beta\beta'}{\alpha^2} \\[2ex] \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0, & \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \dfrac{\beta'}{\beta}, \quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = 0, \end{cases}$$

gli accenti indicando derivazione rapporto ad u. I valori di α, β per la S sono

$$\alpha = \beta = r$$

e per la S_1

$$\alpha_1 = \frac{r}{ar^2+1}, \quad \beta_1 = \frac{r}{\sqrt{ar^2+1}}.$$

Si verifica subito colle (9) che le condizioni (7) sono soddisfatte, ciò che doveva essere perchè la rappresentazione di S sopra S_1 è geodetica. Se calcoliamo poi le curvature K, K_1, abbiamo

$$-K = \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)' = \frac{1}{r^2}\left(\frac{r'}{r}\right)'$$

$$-K_1 = \frac{1}{\alpha_1\beta_1}\left(\frac{\beta_1'}{\alpha_1}\right)' = \frac{1}{r^2}\left\{(ar^2+1)\left(\frac{r'}{r}\right)' - ar'^2\right\},$$

e la (4) ci dà quindi per λ^2 il valore

$$\lambda^2 = ar^2 + 1 - \frac{ar'^2}{\left(\frac{r'}{r}\right)'} . \tag{10}$$

Ora basta aggiungere p. es., le due seconde (6), che danno

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} \\ &\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = 0 , \end{aligned}\right. \tag{11}$$

e soddisfatte queste, insieme alla (10), la rappresentazione di S sopra S_1, quando sieno conformate convenientemente a superficie di rotazione, conserverà altresì le linee assintotiche (o i sistemi coniugati).

Dalle (11) integrando abbiamo

$$\lambda = c\,\frac{\alpha}{\alpha_1} = c(ar^2 + 1) ,$$

indicando con c una nuova costante arbitraria. Confrontando colla (10), si ha dunque, per determinare r, l'equazione differenziale

$$\left(\frac{r'}{r}\right)' = \frac{ar'^2}{(ar^2 + 1)\left[1 - c^2(ar^2 + 1)\right]} ; \tag{12}$$

tutte le superficie di rotazione che la soddisfano danno altrettante soluzioni del problema.

Per integrare la (12) poniamo

$$T = \frac{r'}{r} ,$$

onde si può scrivere

$$\frac{dT}{dr} = \frac{aTr}{(ar^2 + 1)\left[1 - c^2(ar^2 + 1)\right]}$$

e quindi integrando

$$T^2 = \frac{ar^2 + 1}{h\left[1 - c^2(ar^2 + 1)\right]} ,$$

essendo h una nuova costante. Abbiamo dunque

$$rdu = \sqrt{\frac{h\left[1 - c^2(ar^2 + 1)\right]}{ar^2 + 1}}\, dr \tag{13}$$

e con una nuova quadratura si avrebbe r in funzione di u. Ma è inutile proseguire l'integrazione, poichè se sostituiamo nella (a) per rdu il valore precedente, otteniamo già per il ds^2 della superficie S la forma perfettamente determinata:

$$ds^2 = \frac{h[1 - c^2(ar^2 + 1)]}{ar^2 + 1} dr^2 + r^2 dv^2 . \tag{A}$$

Osserviamo che se in questa cangiamo r in kr (k costante) ciò equivale a moltiplicare simultaneamente le costanti a, h per k^2; ne segue che, senza alterare la superficie, possiamo prendere il valore assoluto di una di queste costanti $= 1$.

Le superficie di rotazione (A) che risolvono il problema dipendono dunque, come si era enunciato, da due costanti arbitrarie essenziali. Consideriamo ora la seconda superficie S_1, sulla quale la S, data dalla (A), è rappresentata geodeticamente con conservazione dei sistemi coniugati. Essa avrà per la (a^*) e per la (13) l'elemento lineare

$$ds_1^2 = \frac{h[1 - c^2(ar^2 + 1)]}{(ar^2 + 1)^3} dr^2 + \frac{r^2}{ar^2 + 1} dv^2 .$$

È chiaro *a priori* che questa forma di ds^2 deve rientrare nella (A) stessa, dove soltanto saranno cangiati i valori delle costanti a, c, h. Ed in effetto, se poniamo

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt{ar^2 + 1}} ,$$

la precedente diventa:

$$ds_1^2 = \frac{- hc^2 \left[1 - \frac{1}{c^2}(1 - ar_1^2)\right]}{1 - ar_1^2} dr_1^2 + r_1^2 dv^2 . \tag{A*}$$

Come si vede, è questa la (A) stessa, cangiate a, c, h in

$$a_1 = - a , \quad c_1 = \frac{1}{c} , \quad h_1 = - hc^2 . \tag{14}$$

5. Prendasi ora di una delle nostre superficie della classe (A) la superficie *complementare* [1] S rispetto alle geodetiche v deformate dei meridiani. Dimostreremo che questa complementare S appartiene alla sua volta alla classe (A).

Quando l'elemento lineare di una superficie S applicabile sopra una perficie di rotazione è posto sotto la forma normale

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2 \quad (r = \varphi(u)),$$

[1] *Lezioni* ecc., pag. 131.

quello della complementare S è dato da

$$\overline{ds}^2 = r^2\, d\varrho^2 + \varrho^2\, dv_1^2\,,$$

dove

$$\varrho = \frac{1}{\left(\dfrac{dr}{du}\right)}\ \text{[1]}.$$

Nel caso nostro abbiamo dalla (A)

$$\varrho = \sqrt{\frac{ar^2+1}{h[1-c^2(ar^2+1)]}}\,,$$

e quindi risulta

$$\overline{ds}^2 = \frac{\dfrac{1}{ac^2}\left[1-c^2\left(1+\dfrac{\varrho^2}{hc^2}\right)\right]}{1+\dfrac{\varrho^2}{hc^2}}\, d\varrho^2 + \varrho^2\, dv_1^2\,.$$

Questa è la forma stessa (A), cangiate a, c, h in

$$\overline{a} = \frac{1}{hc^2}\,,\quad \overline{c} = c\,,\quad \overline{h} = \frac{1}{ac^2}\,,$$

ovvero moltiplicando $\overline{a}$, $\overline{h}$ per c^2 (col cangiare ϱ in $c\varrho$):

$$(5)\qquad \overline{a} = \frac{1}{h}\,,\quad \overline{c} = c\,,\quad \overline{h} = \frac{1}{a}\,.$$

Se si confrontano le (14), (15) si vede subito che le operazioni rappretate da queste formole sono fra loro permutabili. Ed il significato geometrico di questo fatto sta in ciò che prendendo delle due superficie S, S_1 della classe (A), coniugate in deformazione, le rispettive complementari $\overline{S}$, $\overline{S}_1$, queste sono nuovamente coniugate fra loro in deformazione. Per convincersene basta ricordare che sopra S, $\overline{S}$, come sopra S_1, $\overline{S}_1$, si corrispondono le assintotiche e per ciò intanto quelle di $\overline{S}$, $\overline{S}_1$. In secondo luogo si corrispondono sopra $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ le deformate dei paralleli ed egualmente le deformate dei meridiani, poichè queste corrispondono a quelle linee di S, S_1 che sono a tangenti coniugate colle rispettive deformate dei meridiani. Abbiamo dunque il teorema: *Se due superficie applicabili sopra superficie di rotazione si corrispondono geodeticamente e per sistemi coniugati, lo stesso accade delle loro due complementari.*

6. Un caso particolare notevole di coppie di superficie S, S_1 della classe (A) coniugate in deformazione si ottiene supponendo la costante $c = 1$;

[1] Veggasi la seconda edizione delle mie *Lezioni*, vol. I, pag. 296.

allora la (A) diventa

$$ds^2 = \frac{-ahr^2}{ar^2+1} dr^2 + r^2 dv^2 .$$

Le due costanti a, h debbono qui avere segno contrario e senza alterare la generalità potremo fare

$$\alpha) \quad a = -1, \quad h = \mathrm{R}^2$$

ovvero

$$\beta) \quad a = +1, \quad h = -\mathrm{R}^2.$$

Così ponendo

$$u = \sqrt{1 \pm r^2},$$

avremo nel primo caso

$$\alpha^*) \quad ds^2 = \mathrm{R}^2 \{du^2 + (u^2-1)\, dv^2\}$$

e nel secondo

$$\beta^*) \quad ds^2 = \mathrm{R}^2 \{du^2 + (1-u^2)\, dv^2\}.$$

L' uno e l'altro elemento lineare appartengono ad una falda dell' evoluta di una superficie a curvatura costante positiva $= \frac{1}{\mathrm{R}^2}$, o, ciò che è lo stesso pel teorema di Bonnet, di una superficie a curvatura media costante $= \frac{1}{\mathrm{R}}$.

Applicando i risultati sopra ottenuti, avremo due coppie $(\mathrm{S}, \overline{\mathrm{S}})$, $(\mathrm{S}_1, \overline{\mathrm{S}}_1)$ di tali superficie, ciascuna coppia formando l' evoluta completa di una superficie a curvatura media costante. In quale relazione fra loro stanno le due evolventi Σ, Σ_1 a curvatura media costante? Senza entrare qui nei calcoli relativi, diciamo che la Σ, Σ_1 son legate dalla trasformazione involutoria di Hazzidakis [1], cioè Σ, Σ_1 sono applicabili l' una sull' altra con conservazione delle linee di curvatura ed inversione dei raggi principali di curvatura. Inversamente siano Σ, Σ_1 due superficie a curvatura media costante, trasformate l' una dell' altra per trasformazione di Hazzidakis, e siano $(\mathrm{S}, \overline{\mathrm{S}})$ le due falde della evoluta di Σ e $(\mathrm{S}_1, \overline{\mathrm{S}}_1)$ quelle di Σ_1. *Sopra due falde omologhe* S, S_1, *ovvero* $\overline{\mathrm{S}}$, $\overline{\mathrm{S}}_1$, *si corrisponderanno non solo i sistemi coniugati, ma anche le linee geodetiche.* Questa proprietà della trasformazione di Hazzidakis non sembra sia stata fin qui osservata.

7. Lasciando ora da parte il caso $c = 1$, già sopra considerato, proponiamoci di trovare la forma della curva meridiana per la superficie di rotazione (A). Sia

$$z = \Psi(\varrho)$$

l' equazione del meridiano, l' asse di rotazione essendo l' asse delle z ed indicando ϱ il raggio del parallelo. Per determinare $\Psi(\varrho)$ dobbiamo identificare la (A) con

$$ds^2 = \left(1 + \Psi'^2(\varrho)\right) d\varrho^2 + \lambda^2 \varrho^2 dv^2 ,$$

(1) *Lezioni,* pag. 447.

ponendo $r = \lambda\varrho$ (λ costante). Ne deduciamo

$$\psi'^2(\varrho) = \frac{[\lambda^2 h - (1 + \lambda^2 c^2 h)] - a\lambda^2 \varrho^2 (1 + \lambda^2 c^2 h)}{a\lambda^2\varrho^2 + 1},$$

e se disponiamo di λ in guisa da annullare nel numeratore del secondo membro il termine indipendente da ϱ, avremo per λ^2 il valore

$$\lambda^2 = \frac{1}{h(1 - c^2)},$$

che è finito essendo qui $c^2 \neq 1$.

Integrando abbiamo allora

$$z = \psi(\varrho) = \sqrt{-\frac{h}{a}}\sqrt{a\lambda^2\varrho^2 + 1},$$

onde per la superficie di rotazione (A), quando $c^2 \neq 1$, si può prendere una quadrica, che sarà del resto reale od immaginaria a seconda dei valori delle costanti.

Arrestandoci al caso reale, dovrà essere

$$h(1 - c^2) > 0$$

e le costanti a, h dovranno avere segno contrario. Se supponiamo dapprima a negativa, h positiva, potremo fare senza nuocere alla generalità

$$a = -1\,, \quad h = k^2\,, \quad \lambda^2 = \frac{1}{k^2(1 - c^2)}$$

e la costante c^2 dovrà essere naturalmente < 1. La curva meridiana è quindi l' ellisse

$$\frac{z^2}{k^2} + \frac{\varrho^2}{k^2(1 - c^2)} = 1$$

e la quadrica è un ellissoide di rotazione allungato, i cui semi-assi principale e secondario hanno le lunghezze

$$\mathrm{A} = k\,, \quad \mathrm{B} = k\sqrt{1 - c^2}.$$

Per ottenere l' altra quadrica di rotazione reale basta passare dall' attuale superficie S alla coniugata S_1 in deformazione, ciò che dà per le (14)

$$a_1 = 1\,, \quad c_1 = \frac{1}{c}\,, \quad h_1 = k^2 c^2.$$

La curva meridiana ha per equazione

$$\frac{z^2}{k^2} - \frac{\varrho^2}{k^2\left(\frac{1}{c^2} - 1\right)} = 1\,;$$

la quadrica è adunque un iperboloide di rotazione a due falde che ha per lunghezza A, C dei semi-assi principale e secondario

$$A = k\,,\quad C = k\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}$$

Effettivamente è facile accertarsi che fra i punti dell' ellissoide e dell' iperboloide col medesimo semi-asse principale $= A$ e coi semi-assi secondarî B, C legati dalla relazione

$$\frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} = \frac{1}{A^2}$$

si può stabilire una corrispondenza geodetica che conservi i sistemi coniugati.

Queste due quadriche sono dunque coniugate in deformazione.

Siano ora S, S_1 due loro rispettive deformate simultanee. I teoremi di Guichard ci insegnano che se si fa rotolare l' ellissoide sulla superficie applicabile S o l' iperboloide sulla superficie applicabile S_1, ogni volta ciascun fuoco descriverà una superficie di curvatura media costante $= \frac{1}{A}$. Due tali superficie Σ, Σ_1 a curvatura media costante sono nuovamente trasformate l' una dell' altra per trasformazione di Hazzidakis.

A queste proprietà dell' ellissoide ed iperboloide di Guichard coniugati in deformazione ero già in parte pervenuto nella Memoria citata sopra (§ 22), ed è appunto lo studio di queste proprietà che mi ha indotto a trattare il problema generale che forma l' oggetto di questa Nota.

Astronomia. — *Osservazioni del nuovo pianetino HU 1902 fatte coll' equatoriale di 38 cm.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

Le osservazioni furono fatte per mezzo del nuovo oggettivo di 38 cm. di apertura libera, donato all' osservatorio dal comm. Enrico Santoro, della cui munificenza è ben memore anche la nostra Accademia. Il dono derivò dai buoni uffici del prof. Tacchini.

L' oggettivo fu costruito dalla celebre casa Steinheil di Monaco ed è riuscito eccellente; esso potrà in avvenire rendere servigi alla scienza. Anche gli oculari vennero commessi alla medesima casa con piena mia soddisfazione. La rigorosa distanza focale è m. 5,248, e però un giro della vite del micrometro filare di Merz, che apparteneva all' antico oggettivo, mi risultò, da numerose osservazioni colla Polare e colle Plejadi (Cat. fot. Jacoby), di

12″ 748