ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 aprile 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura.* Nota del Corrispondente G. Ricci.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Costruzione mediante integrali definiti di funzioni armoniche o poli-armoniche nell'area esterna ad un'ellisse, per date condizioni al contorno.* Nota del dott. Tommaso Boggio, presentata dal Socio V. Cerruti.

In questa Nota espongo un procedimento assai semplice che permette di ottenere espressa, mediante integrali definiti, la funzione armonica nell'area esterna ad una data ellisse e che, sul contorno di questa, assume valori assegnati [1]; e, più in generale, la funzione m-armonica in questa

[1] Nella Nota del prof. Morera: *Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti*: « *Sull'espressione della gravità, ecc.* ». (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. III, 1° semestre 1894) è esposto un procedimento che permette di costruire la funzione armonica nel campo esterno od interno ad un dato ellissoide e che sul contorno assume gli stessi valori che un polinomio dato di secondo grado; tale funzione, dedotta dall'espressione della funzione potenziale dell'ellissoide, è espressa mediante integrali

stessa area e che, sul contorno, assume colle sue derivate normali successive dei primi $m-1$ ordini, dei valori dati.

I risultati precedenti si ottengono osservando che l'area esterna ad una data ellisse può trasformarsi, mediante una inversione per raggi vettori reciproci, nell'area interna ad una *Lumaca di Pascal* non passante pel suo polo, e quest'area, a sua volta, può rappresentarsi conformemente su un cerchio mediante polinomi.

1. Sia s' un'ellisse di fuochi F, F'; diciamo σ' l'area esterna ad s', e supponiamo i suoi punti riferiti ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x', y' di cui l'origine sia il fuoco F e l'asse Fx' sia l'asse focale.

Si tratta di costruire la funzione u', regolare in σ', e che soddisfa alle equazioni:

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta'^2 u' = 0 & \text{in } \sigma' \\ u' = \Phi' & \text{su } s', \end{array}\right. \qquad \left(\Delta'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right), \tag{1}$$

ove Φ' indica una funzione continua dei punti di s', comunque assegnata.

Osserviamo perciò che se si riferiscono i punti di σ' alle coordinate polari (r', φ), assumendo come polo il fuoco F e come asse polare l'asse focale Fx', l'equazione polare di s' è:

$$r' = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \tag{2}$$

nella quale p indica il semiparametro, ed e l'eccentricità $(e < 1)$.

Supponendo, per semplicità, $p = 1$, e facendo una inversione per raggi vettori reciproci assumendo il fuoco F come centro dell'inversione, e supponendo eguale ad 1 il modulo di essa, si ha:

$$r' r_1 = 1 \tag{3}$$

$$x_1 = \frac{x'}{r'^2}, \quad y_1 = \frac{y'}{r'^2} \tag{4}$$

ove r_1, φ ed x_1, y_1 sono rispettivamente le coordinate polari e cartesiane del punto trasformato di (x', y').

L'equazione (2) diventa pertanto:

$$r_1 = 1 + e\cos\varphi, \tag{5}$$

la quale, essendo $e < 1$, rappresenta una *Lumaca di Pascal* non passante

definiti. Per quanto riguarda il campo interno ad una ellisse o ad un ellissoide cfr. anche la mia Nota: *Sopra alcune funzioni armoniche o bi-armoniche in un campo ellittico od ellissoidico* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

pel suo polo; l'ellisse s' si è dunque trasformata, mediante l'inversione, nella curva s_1 data dalla (5), e l'area σ' esterna ad s' nell'area σ_1 interna ad s_1.

Chiamando u_1, Φ_1 le funzioni u', Φ' espresse mediante le variabili x_1, y_1, il sistema (1) potrà scriversi:

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta_1^2 u_1 = 0 \text{ in } \sigma_1, \\ u_1 = \Phi_1 \text{ su } s_1, \end{array}\right. \qquad \left(\Delta_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right). \tag{6}$$

Per risolvere il sistema precedente conviene fare la rappresentazione conforme dell'area σ_1 sopra un cerchio. Se indichiamo con σ il cerchio di raggio 1, appartenente al piano xy, e col centro nell'origine delle coordinate, la rappresentazione conforme di σ_1 sul cerchio σ si eseguisce colle formole [1]

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{e}{2} + x + \frac{e}{2}(x^2 - y^2) \\ y_1 = y + exy. \end{array}\right. \tag{7}$$

Infatti riferendo i punti del cerchio σ alle coordinate polari r, θ in modo che

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r \operatorname{sen}\theta,$$

le formole precedenti possono anche scriversi:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{e}{2} + r\cos\theta + \frac{e}{2} r^2 \cos 2\theta \\ \\ y_1 = r \operatorname{sen}\theta + \frac{e}{2} r^2 \operatorname{sen} 2\theta, \end{array}\right.$$

onde, per $r = 1$, cioè alla circonferenza s di σ, corrisponde la curva:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{e}{2} + \cos\theta + \frac{e}{2}\cos 2\theta \\ \\ y_1 = \operatorname{sen}\theta + \frac{e}{2} \operatorname{sen} 2\theta, \end{array}\right.$$

ossia:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = (1 + e\cos\theta)\cos\theta \\ y_1 = (1 + e\cos\theta)\operatorname{sen}\theta, \end{array}\right.$$

cioè:

$$r_1 = 1 + e\cos\theta,$$

che è precisamente la (5).

[1] Almansi, *Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un'area piana*, ecc. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIII, a. 1899).

Se diciamo u, Φ le funzioni u_1, Φ_1 espresse mediante le variabili x, y, il sistema (6) si trasforma in quest'altro

$$(8) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = 0 \text{ in } \sigma, \\ u = \Phi \quad \text{su } s, \end{cases} \qquad \left(\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

In tal modo abbiamo dunque ricondotto la risoluzione del problema di Dirichlet nell'area σ' esterna all'ellisse s' alla risoluzione del problema di Dirichlet per l'area circolare σ (¹).

2. Si voglia ad es. costruire la funzione u', armonica nell'area σ', e che sul contorno s' assume gli stessi valori della funzione $\frac{1}{r'^2}$.

Dovremo porre $\Phi' = \frac{1}{r'^2}$, onde il sistema (1) diventa:

$$\begin{cases} \Delta'^2 u' = 0 \text{ in } \sigma' \\ u' = \frac{1}{r'^2} \quad \text{su } s'; \end{cases}$$

facendo la trasformazione (3), (4) esso si muta nel seguente, analogo al (6):

$$\begin{cases} \Delta_1^2 u_1 = 0 \text{ in } \sigma_1 \\ u_1 = r_1^2 \quad \text{su } s_1; \end{cases}$$

applicando le (7) ed osservando che sulla circonferenza s si ha:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{e^2}{2} + 1 + e\,x + \frac{e^2}{2}(x^2 - y^2) + e\,x = 1 + e\,x + e\,x_1,$$

si otterrà, dal sistema precedente, quest'altro, analogo all'(8):

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } \sigma \\ u = 1 + e\,(x + x_1) & \text{su } s; \end{cases}$$

e poichè la funzione $1 + e\,(x + x_1)$ è armonica, si può porre, in ogni punto del cerchio σ:

$$(9) \qquad u = 1 + e\,(x + x_1).$$

Cerchiamo ora la funzione u_1, cioè la funzione u espressa mediante le variabili x_1, y_1; dobbiamo perciò esprimere anzitutto x, y in funzione di x_1, y_1.

(¹) Ponendo: $z' = x' - iy'$, $z = x + iy$, la rappresentazione conforme di σ' su σ è data dalla formola:

$$z' = \frac{2}{e + 2z + e\,z^2}.$$

Dalle (7), eliminando x, si ha l'equazione:

$$e^2 y^4 + (1 - e^2 + 2 e x_1) y^2 - y_1^2 = 0 ,$$

che fornisce per y^2 due valori, uno positivo e l'altro negativo; si dovrà tener conto solo del valore positivo che è:

$$y^2 = \frac{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}}{2 e^2};$$

ne viene:

$$y = \pm \frac{1}{e\sqrt{2}} \sqrt{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}};$$

è poi chiaro che y ed y_1 devono avere lo stesso segno.

Sostituendo nella seconda delle (7), che può scriversi: $1 + e x = \frac{y_1}{y}$, si ha:

$$1 + e x = \frac{e y_1 \sqrt{2}}{\sqrt{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + 2 e x_1 + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) x_1 + 4 e^2 r_1^2}}.$$

Abbiamo così x, y in funzione di x_1, y_1; quindi la (9) porge:

$$u_1 = e x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + 2 e x_1 + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) x_1 + 4 e^2 r_1^2}}.$$

Passando infine dalle variabili x_1, y_1 alle x', y' mediante l'inversione (4) e poi introducendo le coordinate polari r', φ, si ha:

$$u' = \frac{e \cos\varphi}{r'} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + \frac{2 e \cos\varphi}{r'} + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) \frac{\cos\varphi}{r'} + \frac{4 e^2}{r'^2}}}.$$

Questa espressione di u' è quella cercata.

È infatti facile verificare che questa funzione è armonica in σ', inoltre nei punti di s' ha per valore $\frac{1}{r'^2}$, infine per $r' = \infty$ assume il valore $\sqrt{1 - e^2}$, onde, seguendo una nota denominazione ([1]), si può dire che la funzione u' è regolare all' infinito; quindi essa soddisfa a tutte le condizioni poste.

([1]) Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, chap. II.

3. Determiniamo ora la funzione u', regolare nell'area σ', e che soddisfa alle equazioni:

$$(10)\qquad \begin{cases} \Delta'^4 u' = 0 & \text{in } \sigma' \\ u' = \Phi', \dfrac{\partial u'}{\partial n'} = \Psi' & \text{su } s', \end{cases} \qquad (\Delta'^4 = \Delta'^2 \Delta'^2),$$

in cui n' indica la normale interna a σ', e Φ', Ψ' sono funzioni date dei punti di s' (¹).

Converrà fare l' inversione (4) e il cambiamento di funzione espresso dalla formola:

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{u'(x', y')}{r'^2},$$

perchè in tal caso si avrà, come è noto (²):

$$\Delta_1^4 u_1 = r'^6 \Delta'^4 u',$$

quindi il sistema (10) si muterà nel seguente:

$$\begin{cases} \Delta_1^4 u_1 = 0 & \text{in } \sigma_1 \\ u_1 = \Phi_1, \dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} = \Psi_1 & \text{su } s_1, \end{cases}$$

ove n_1 è la normale interna all'area σ_1, limitata dalla curva s_1, che, come si vide nel § 1, è una *Lumaca di Pascal* non passante pel suo polo, e Φ_1, Ψ_1 sono funzioni date dei punti di s_1.

La funzione u_1, come è noto (³), può ottenersi espressa mediante integrali definiti trasformando, per mezzo delle (7), l'area σ_1 nell'area circolare σ.

4. Più in generale, si voglia determinare la funzione u', regolare in σ' e che soddisfa alle equazioni

$$(11)\qquad \begin{cases} \Delta'^{2m} u' = 0 \text{ in } \sigma' \\ \dfrac{\partial^i u'}{\partial n'^i} = \Phi'_i \quad \text{su } s', \qquad (i = 0, 1, \dots, m-1), \end{cases}$$

le Φ'_i essendo funzioni date nei punti di s'.

(¹) Il problema analogo per l'area interna all'ellisse s' l' ho risolto nella mia Nota: *Integrazione dell'equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$ in un'area ellittica* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

(²) Levi-Civita, *Sopra una trasformazione in sè stessa dell'equazione $\Delta_2\Delta_2 = 0$* (Id., t. IX, serie VII, a. 1898).

(³) Almansi, Memoria citata. Cfr. anche Almansi, *Integrazione della doppia equazione di Laplace* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. IX, 1° semestre, 1900).

Converrà eseguire l'inversione (4) e il cambiamento di funzione:

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{u'(x', y')}{r'^{2m-2}},$$

perchè in tal caso, come è noto [1], se si ha $\Delta'^{2m} u' = 0$, sarà pure: $\Delta_1^{2m} u_1 = 0$; per conseguenza il sistema (11) si trasforma nel seguente:

$$\begin{cases} \Delta_1^{2m} u_1 = 0 \text{ in } \sigma_1 \\ \dfrac{\partial^i u_1}{\partial n_1{}^i} = \Phi_{1i} \text{ su } s_1, \qquad (i = 0, 1, \dots, m-1), \end{cases}$$

le Φ_{1i} indicando funzioni date nei punti di s_1.

La funzione u_1 che soddisfa a queste equazioni può ottenersi espressa per mezzo di integrali definiti [1], trasformando, mediante le (7), l'area σ_1 nel cerchio σ.

5. Consideriamo infine l'area S interna alla curva di equazione:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = (X^2 + Y^2)^2,$$

ove X, Y sono le coordinate cartesiane ortogonali di un punto, ed a, b sono costanti. Mediante una inversione, per raggi vettori reciproci, di centro l'origine delle coordinate X, Y, la curva precedente può trasformarsi in un'ellisse s' e l'area S nell'area σ' esterna a tale ellisse.

Per quanto precede si conclude che si può sempre ottenere espressa con integrali definiti, la funzione m-armonica in S e che al contorno assume, colle sue derivate normali successive dei primi $m-1$ ordini, dei valori assegnati.

Meccanica. — *Sopra un teorema di Levi-Civita riguardante la determinazione di soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano.* Nota del dott. P. Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Il prof. T. Levi-Civita, in una Nota comunicata a questa R Accademia [2], ha enunciato e dimostrato un notevole teorema, il quale insegna a determinare delle soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano, quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante.

Siano $q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n$ le due serie di variabili che definiscono lo stato di moto di un sistema olonomo a legami indipendenti dal tempo,

(1) Volterra, *Sulle funzioni poli-armoniche* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LVII, a. 1899).

(2) *Sulla determinazione di soluzioni particolari*, ecc. Rendiconti della Classe di sc. fis., mat. e nat., vol. X, serie 5ª, 1901.