ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

Converrà eseguire l'inversione (4) e il cambiamento di funzione:

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{u'(x', y')}{\rho'^{2m-2}},$$

perchè in tal caso, come è noto [1], se si ha $\Delta'^{2m} u' = 0$, sarà pure: $\Delta_1^{2m} u_1 = 0$; per conseguenza il sistema (11) si trasforma nel seguente:

$$\begin{cases} \Delta_1^{2m} u_1 = 0 \text{ in } \sigma_1 \\ \dfrac{\partial^i u_1}{\partial n_1^i} = \Phi_{1i} \text{ su } s_1, \qquad (i = 0, 1, \dots, m-1), \end{cases}$$

le Φ_{1i} indicando funzioni date nei punti di s_1.

La funzione u_1 che soddisfa a queste equazioni può ottenersi espressa per mezzo di integrali definiti [1], trasformando, mediante le (7), l'area σ_1 nel cerchio σ.

5. Consideriamo infine l'area S interna alla curva di equazione:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = (X^2 + Y^2)^2,$$

ove X, Y sono le coordinate cartesiane ortogonali di un punto, ed a, b sono costanti. Mediante una inversione, per raggi vettori reciproci, di centro l'origine delle coordinate X, Y, la curva precedente può trasformarsi in un'ellisse s' e l'area S nell'area σ' esterna a tale ellisse.

Per quanto precede si conclude che si può sempre ottenere espressa con integrali definiti, la funzione m-armonica in S e che al contorno assume, colle sue derivate normali successive dei primi $m-1$ ordini, dei valori assegnati.

Meccanica. — *Sopra un teorema di Levi-Civita riguardante la determinazione di soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano.* Nota del dott. P. Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Il prof. T. Levi-Civita, in una Nota comunicata a questa R. Accademia [2], ha enunciato e dimostrato un notevole teorema, il quale insegna a determinare delle soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano, quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante.

Siano $q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n$ le due serie di variabili che definiscono lo stato di moto di un sistema olonomo a legami indipendenti dal tempo,

(1) Volterra, *Sulle funzioni poli-armoniche* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LVII, a. 1899).

(2) *Sulla determinazione di soluzioni particolari*, ecc. Rendiconti della Classe di sc. fis., mat. e nat., vol. X, serie 5ª, 1901.

e soggetto a forze conservative; talchè le equazioni del moto sono

$$(0) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots n),$$

ove H non dipende da t. Supponendo di conoscere k integrali o relazioni invarianti di tal sistema in involuzione tra loro, non contenenti il tempo, e risolubili rispetto ad altrettante p (per es. $p_1, p_2, .. p_k$), il teorema in parola si enuncia così: *Se* H_1 *è ciò che diviene* H *quando alle* p_1, p_2, p_k *si sostituiscono le espressioni dedotte dagli integrali o relazioni invarianti conosciute, le relazioni*

$$(1) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial p_i} = 0 \qquad \frac{\partial H_1}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = k + 1, \dots n)$$

insieme a quelle supposte note costituiscono un sistema invariante rispetto all'equazioni canoniche.

Di qui risulta, che dalle (1) e dalle k relazioni note, supposte tutte indipendenti tra loro, si potranno ricavare le p e le $q_{k+1}, \dots q_n$ in funzione delle $q_1, q_2, \dots q_k$; talchè fatte le sostituzioni nel sistema canonico (0), si otterrà un sistema ridotto di k equazioni, atto a definire le $q_1, q_2, \dots q_k$ in funzione del tempo. Le soluzioni particolari dedotte in questa maniera corrispondono a *moti stazionarî* del sistema, nel senso attribuito a questa espressione dal Routh e completato dal Levi-Civita [1].

L' importanza che ha senza dubbio l'enunciato teorema, rende manifesta l' utilità di collegarne la deduzione alla teoria generale delle equazioni differenziali, e in particolare a quella dei sistemi Hamiltoniani. Questo è quanto ho voluto fare nello scrivere la Nota che ho l'onore di presentare a questa R. Accademia. Avvertirò che dai miei calcoli e ragionamenti il teorema risulta alquanto più esteso; poichè, quando non sono soddisfatte le condizioni necessarie all'esistenza delle soluzioni stazionarie del Levi-Civita, ma ne sono soddisfatte certe altre, si possono ancora determinare delle classi di soluzioni particolari, che però in generale non sono stazionarie.

1. Consideriamo il sistema d'equazioni ai differenziali totali

$$(2) \qquad \begin{aligned} dx_{m+1} &= b_{11}\, dx_1 + b_{12}\, dx_2 + \cdots + b_{1m}\, dx_m \\ dx_{m+2} &= b_{21}\, dx_1 + b_{22}\, dx_2 + \cdots + b_{2m}\, dx_m \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dx_{m+n} &= b_{n1}\, dx_1 + b_{n2}\, dx_2 + \cdots + b_{nm}\, dx_m, \end{aligned}$$

[1] *Sui moti stazionarî dei sistemi olonomi.* Rendiconti della Classe di sc. fis., mat. e nat., vol. X, serie 5ª, 1901.

ove si riguardano le $x_1, x_2, \dots x_m$ come variabili indipendenti, $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+n}$ come funzioni di quelle variabili, e i coefficienti b_{rs} funzioni di tutte le variabili $x_1, \dots x_{m+n}$. Posto

$$X_r(f) = \frac{\partial f}{\partial x_r} + b_{1r}\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \dots + b_{nr}\frac{\partial f}{\partial x_{m+n}},$$

le condizioni

$$X_r(b_{is}) = X_s(b_{ir}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots n \\ r, s = 1, 2, \dots m \end{pmatrix} \tag{3}$$

sono necessarie e sufficienti affinchè il sistema (2) sia completamente integrabile. Supponendo soddisfatte queste condizioni, vediamo se è possibile di determinare delle soluzioni particolari, tali che le x_{m+s} non dipendano da una delle variabili, per es. dalla x_1.

Dovranno pertanto essere nulle le derivate delle x_{m+s} rispetto a x_1; cioè le equazioni

$$b_{11} = 0, b_{21} = 0 \dots b_{n1} = 0 \tag{4}$$

dovranno essere identicamente soddisfatte per quelle espressioni delle x_{m+s}, che rappresentano le soluzioni particolari in discorso. Le quali dunque, se esistono, si devono dedurre dalle (4) con operazioni puramente algebriche, e quindi le b_{r1} non dovranno contenere x_1. Resta a vedere se le espressioni delle x_{m+s}, così dedotte, soddisfano il sistema ridotto

$$\begin{aligned} dx_{m+1} &= b_{12}\,dx_2 + \dots + b_{1m}\,dx_m \\ &\dots\dots\dots\dots \\ dx_{m+n} &= b_{n2}\,dx_2 + \dots + b_{nm}\,dx_m. \end{aligned} \tag{2'}$$

Basterà perciò che il differenziale totale di b_{r1} $(r = 1, 2, \dots n)$ sia identicamente nullo in virtù delle (2′) e delle (4). Ora si ha

$$d\,b_{r1} = \sum_{i=2}^{m}\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_i}\,dx_i + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_{m+s}}\,dx_{m+s}$$

$$= \sum_{i=2}^{m}\left\{\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{n} b_{si}\frac{\partial b_{r1}}{\partial x_{m+s}}\right\}dx_i,$$

ossia

$$d\,b_{r1} = \sum_{i=2}^{m} X_i(b_{r1})\,dx_i;$$

ma

$$X_i(b_{r1}) = X_1(b_{ri}),$$

quindi

$$d\, b_{r1} = \sum_{i=2}^{m} X_1 (b_{ri})\, dx_i \,.$$

Essendo

$$X_1 (b_{ri}) = \frac{\partial b_{ri}}{\partial x_1} + b_{11} \frac{\partial b_{ri}}{\partial x_{m+1}} + \cdots + b_{n1} \frac{\partial b_{ri}}{\partial x_{m+n}} \,,$$

si vede facilmente che esso sarà identicamente nullo in virtù delle (4) quando sia $\frac{\partial b_{ri}}{\partial x_1} = 0$, quando cioè le b_{ri} non contengono la x_1. Si conclude: *Se i coefficienti del sistema* (2) *completamente integrabile non contengono la variabile indipendente x_s, le equazioni*

$$b_{s1} = 0 \,,\, b_{s2} = 0 \,, \ldots\, b_{sn} = 0 \,,$$

che si ottengono uguagliando a zero i coefficienti di dx_s, somministrano una soluzione particolare del sistema proposto.

2. Di questo teorema ce ne serviremo ora per determinare delle soluzioni particolari del sistema Hamiltoniano (0), quando se ne conoscono k integrali in involuzione.

Siano

$$(5) \qquad p_1 - \varphi_1 = 0 \,,\, p_2 - \varphi_2 = 0 \,, \ldots\, p_k - \varphi_k = 0$$

gl' integrali in parola risoluti rispetto a $p_1, p_2 .. p_k$, ove le φ saranno in generale funzioni delle rimanenti p, di tutte le q e di t. Anche la funzione H potrà contenere t; giacchè noi togliamo per ora le restrizioni che abbiamo enunciate in principio sul sistema olonomo che dà luogo alle (0). Ciò posto, decomponiamo il sistema Hamiltoniano nei tre gruppi seguenti, contradistinti dalle indicazioni (a), (b), (c):

$$(a) \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \,, \ldots\ldots\ldots \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$(b) \qquad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \,, \ldots\ldots\ldots \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$(c) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \,,\, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \,(i = k+1 \,, \ldots\, n) \,.$$

Se nelle equazioni del 2° gruppo si sostituiscono alle $p_1, p_2, \ldots p_k$ le funzioni φ, e si tien conto delle (a) e (c), si trova

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_r} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_s} + [\varphi_r \,, H]_{k+1} = 0 \,, (r = 1 \,, 2 \,, \ldots\, k) \,,$$

ove l' indice $k+1$ nella parentesi di Poisson sta ad indicare che la sommatoria, rappresentata da quel simbolo, va estesa da $k+1$ fino ad n. Indicando poi con H' ciò che diventa H dopo aver sostituito le φ_r alle p_r, si deducono subito le relazioni:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_s} &= \frac{\partial H'}{\partial q_s} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_s} \qquad (s=1,2,\dots n) \\ \frac{\partial H}{\partial p_s} &= \frac{\partial H'}{\partial p_s} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_s} \qquad (s=k+1,\dots n). \end{aligned}$$

Le quali, combinate opportunamente con le precedenti, conducono, dopo calcoli facili e ben noti [1], alle relazioni seguenti:

$$(7)\qquad \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} + \frac{\partial H'}{\partial q_r} + [\varphi_r, H']_{k+1} = 0 \quad , \quad (r=1,2,\dots k)$$

che devono essere identicamente soddisfatte.

Consideriamo ora l'equazioni (c), le quali in virtù delle (6) diventano

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial p_i} - \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i} + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} \end{aligned} \qquad (i=k+1,\dots n),$$

ove bisognerà immaginare sostituite nelle sommatorie le φ_s alle p_s. Vediamo se è possibile definire le p_i e q_i $(i=k+1,\dots n)$ in funzione di $t, q_1, q_2, \dots q_k$ in guisa che queste equazioni risultino soddisfatte in virtù delle (a). Dovrà essere

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial H'}{\partial p_i} + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_r} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i}\right) &= 0 \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H'}{\partial q_i} + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_r}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_r} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i}\right) &= 0 \end{aligned} \qquad (i=k+1,\dots n).$$

A queste si soddisfa definendo le p_i e q_i mediante il sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} &= \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_r} = -\frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} \qquad (i=k+1,\dots n) \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_r} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} \qquad (r=1,2,\dots k), \end{aligned}$$

[1] Vedi in particolare la Nota citata del Levi-Civita.

il che sarà possibile, quando per le equazioni ai differenziali totali

$$
(8) \qquad \begin{aligned} dq_i &= \frac{\partial H'}{\partial p_i}\, dt - \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i}\, dq_r \\ dp_i &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i}\, dt + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i}\, dq_r\,, \end{aligned} \qquad (i = k+1, \dots n)
$$

che equivalgono a quel sistema, siano soddisfatte le condizioni d'integrabilità. È facile vedere che ciò avviene, ricorrendo alle (7) e alle condizioni d'involuzione. Questo, del resto, è ben noto; ed è anche noto che dalle (8) si deducono conseguenze importanti per la teoria generale dei sistemi Hamiltoniani.

Ma, giunti a questo punto, ci possiamo proporre di determinare delle soluzioni particolari delle (8); per esempio delle soluzioni in cui le q_i e p_i sieno funzioni di $q_1, q_2, \dots q_k$ e non di t. In virtù del teorema dimostrato nel paragrafo precedente, ciò sarà possibile quando i coefficienti delle (8) non contengono t; quando cioè H' e le φ non dipendono da t. Stando in queste ipotesi, il teorema ricordato ci dice che le soluzioni particolari sono definite dalle equazioni:

$$
\frac{\partial H'}{\partial p_i} = 0 \qquad \frac{\partial H'}{\partial q_i} = 0\,, \qquad (i = k+1, \dots n)
$$

che si ottengono uguagliando a zero i coefficienti di dt. Queste equazioni insieme alla (a) e (5) definiscono ∞^{2k} moti, che sono i moti stazionarî indicati dal Levi-Civita. Così la ricerca di questi moti è direttamente collegata alla classica teoria dei sistemi Hamiltoniani.

Più generalmente possiamo supporre che H' e le φ, pur contenendo il tempo, non dipendano da una delle variabili $q_1, q_2, \dots q_k$, per esempio dalla q_r. In tal caso il sistema (8) ammetterà la soluzione particolare definita dalle equazioni:

$$
\frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = k+1, \dots n);
$$

le quali unite alle (a) e (5) definiranno ∞^{2k} moti particolari del sistema dinamico. Questi moti però non saranno, in generale, moti stazionarî.