ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

Matematica. — *L'ordine della varietà che annulla i subdeterminanti di un dato grado di un determinante emisimmetrico.* Nota del prof. FRANCESCO PALATINI, presentata dal Socio SEGRE.

In una interessante Nota [1] il prof. Segre, partendo da due importanti formole date dal sig. H. Schubert, risolve i due seguenti problemi « Determinare gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti: 1° da una matrice qualsiasi con elementi affatto generici; 2° da una matrice quadrata simmetrica ». Un altro caso notevole da esaminare è quello della varietà che annulla i subdeterminanti del grado $2r+2$ (e quindi anche quelli del grado $2r+1$) di un dato determinante emisimmetrico del grado $n+1$. La dimensione di questa varietà è $r(2n-2r+1)-1$, il che può vedersi p. e. applicando il teor. II del § V della Memoria, *Ueber dass Pfaffsche Problem*, del Frobenius [2].

La questione di cui ci occupiamo equivale a quest'altra. Si considerino in uno spazio $[n]$ tutti gli ∞^m $\left(\text{porremo } m=\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}\right)$ complessi lineari di rette [3], e per semplicità di linguaggio si rappresentino linearmente coi punti di un $[m]$. Ciascun complesso dà luogo ad un sistema nullo, cioè ad una reciprocità tale che ogni punto sta nell'iperpiano che gli corrisponde, e il determinante di questa reciprocità è un emisimmetrico del grado $n+1$. Se tutti i minori di grado $2r+2$ si annullano, allora il complesso è degenere, e precisamente possiede uno spazio-centro di dimensione $n-2r$, uno spazio tale cioè che ogni retta ad esso incidente appartiene al complesso. Si tratta dunque di trovare l'ordine, che indicheremo con x_{n-2r}, della varietà, che rappresenteremo con $V^{(n-2r)}_{r(2n-2r+1)-1}$, di $[m]$ la quale corrisponde all'insieme di quei complessi di $[n]$ che sono dotati di $[n-2r]$-centro (almeno). Per $n=2q+1$, $r=q$ si vede immediatamente che la nostra varietà è di ordine $q+1$, cioè che sono $q+1$ i complessi di un fascio generico di complessi di $[n]$ (corrispondente ad una retta generica di $[m]$) dotati di retta-centro [4]. Per $n=2q$, $r=q-1$

[1] *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rend. Acc. Lincei, 1900, serie 5ª, vol. IX.

[2] Crelle, vol. 82, 1876.

[3] In seguito si dirà *complesso* semplicemente in luogo di *complesso lineare di rette*.

[4] Cfr. Castelnuovo, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni*, Atti Ist. Ven., 1891, serie VII, vol. 2°.

si ha che l'ordine cercato è $\frac{q(q+1)(2q+1)}{6}$ perchè generalizzando il procedimento seguito dal prof. Castelnuovo nel n. 10 del citato lavoro, si trova che appunto questo è il numero dei complessi di $[2q]$ dotati di pianocentro contenuti in un sistema triplo generico di complessi di $[n]$ (corrispondente ad un $[3]$ generico di $[m]$).

Nello studio dei sistemi lineari di complessi di $[n]$ ha una speciale importanza la varietà M^r_{m-1} (di dimensione $m-1$ e ordine r) che in $[m]$ corrisponde all'insieme dei complessi di $[n]$ passanti per i complessi degeneri di un dato $[2r-1]$ (¹). Con M^1_{m-1} sarà da intendersi l'iperpiano che corrisponde all'insieme dei complessi passanti per una data retta. Ora mediante ovvia generalizzazione del ragionamento contenuto nel n. 3 di una mia Nota (²) si trova subito $x_{n-2} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$.

Venendo ora alla $V^{(n-2)}_{4n-7}$ $(r=2)$, seghiamola con $2n-6$ varietà M^2_{m-1} relative ad altrettanti spazi $[3]$ di $[n]$, e otterremo una varietà di dimensione $2n-1$ e ordine $2^{2n-6}\, x_{n-4}$ che corrisponde all'insieme dei complessi dotati di $[n-4]$-centro incidente a quei $2n-6$ spazi $[3]$ e che indicheremo con W_{2n-1}. Generalizzando, ciò che è ben facile, il ragionamento del n. 4, V, α della mia Nota citata vedesi che per questa varietà la $V^{(n-2)}_{2n-2}$ è multipla secondo il numero $\frac{(2n-6)!}{(n-3)!(n-2)!}$, per cui segandola con un'altra M^2_{m-1} si otterrà, oltre alla $V^{(n-2)}_{2n-2}$ contata un tal numero di volte, una varietà, che indicheremo con W_{2n-2}, la quale corrisponde all'insieme dei complessi dotati di $[n-4]$-centro incidente a $2n-5$ spazi $[3]$ ed ha per ordine $2^{2n-5}\, x^2_{n-4} - \frac{(2n-6)!}{(n-3)!(n-2)!}\, x_{n-2}$. Ed ora continuando a generalizzare il ragionamento del n. 4, V, β, γ, δ della stessa Nota si giunge ad una varietà, che indicheremo con W_5 di dimensione 5, che corrisponde all'insieme dei complessi dotati di $[n-4]$-centro incidente a $4(n-3)$ spazi $[3]$ ed il cui ordine è dato da

$$2^{4(n-3)}\, x_{n-4} - 2^{2n-7} \frac{(2n-6)!}{(n-3)!(n-2)!}\, x_{n-2} - \sum_{h=1}^{h=2n-7} \left(2^{2n-7-h}\, x_{n-4,\, n-2,\, h}\right)$$

(¹) Analoga importanza ha per lo studio dei sistemi lineari di quadriche di dimensione $n-1$ di $[n]$ la varietà di dimensione $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ e ordine $r+1$ formata da quelle di queste quadriche che passano per le quadriche degeneri di dimensione $r-1$ di un dato $[r]$.

(²) *Sui sistemi lineari di complessi lineari di rette nello spazio a cinque dimensioni*, Atti Ist. Ven., 1900, t. 60.

dove $x_{n-4,\,n-2,\,h}$ rappresenta l'ordine della varietà $U^{(n-4),\,(n-2),\,h}$ che corrisponde all' insieme dei complessi dotati di $[n-2]$-centro contenente un $[n-4]$ appoggiato a $2n-6+h$ spazi $[3]$. L'ordine di quest' ultima varietà, sempre tenendo presente il luogo citato della detta Nota, trovasi esser rappresentabile col simbolo

$$(2\,,3\,,\cdots,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^2\cdots\mu_{n-4}^{n-4}\,\mu_{n-3}^{2n-6+h}\,\mu_{n-2}^1\,\mu_{n-1}^{2n-2-h}\ \text{(1)}$$

il quale, in virtù del principio di dualità, equivale a

$$(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2-h}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6+h}$$

Se ora osserviamo che a $4(n-3)$ spazi $[3]$ è incidente un numero finito di spazi $[n-4]$, numero che è ben noto e che noi per ottenere maggior omogeneità nelle formole rappresenteremo (il che, com'è facile a vedersi, è lecito) con $(4,5,\cdots,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^2\cdots\mu_{n-4}^{n-4}\,\mu_{n-3}^{4(n-3)}$ al qual simbolo per la legge di dualità possiamo sostituire quest'altro $(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^2\,\mu_3^3\,\mu_4^{4(n-3)}$ che equivale a $\frac{4}{2}(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^4\,\mu_3^1\,\mu_4^{4(n-3)}$; e se notiamo inoltre che ciascuno di questi $[n-4]$ è centro per ∞^5 complessi formanti un sistema lineare al quale in $[m]$ corrisponde un $[5]$, per cui la W_5 si compone di tanti spazi $[5]$ quanti sono indicati dal numero ultimamente scritto, il quale esprime perciò esso pure l'ordine di questa varietà; e se infine consideriamo che è

$$\frac{(2n-6)\,!}{(n-3)\,!\,(n-2)\,!}\cdot\frac{(2n-2)\,!}{n\,!\,(n-1)\,!}=(2\,,3\cdots,n)\,\mu_1^1\cdots\mu_{n-4}^{n-4}\,\mu_{n-3}^{2n-6}\,\mu_{n-2}^1\,\mu_{n-1}^{2n-2}=$$

$$=(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6}$$

possiamo scrivere

$$(1)\quad 2^{4(n-3)+1}\,x_{n-4}=\sum_{h=0}^{h=2n-6}\left[2^{2n-6-h}(n-3,n-2,n-1,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2-h}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6+h}\right]$$

Ora sviluppando $(n-3\,,n-2\,,n-1\,,n)\,\mu_1^1\,\mu_2^{2n-2-h}\,\mu_3^1\,\mu_4^{2n-6+h}$ mediante la formola (16) del citato lavoro dello Schubert, ed applicando alcune convenienti riduzioni, risulta

$$2^{4n-11}\,x_{n-4}=$$

$$=\frac{2^2.\,1\,!\,3\,!\,(2n-6)\,!\,(2n-6)\,!}{(n-3)\,!\,(n-2)\,!\,(n-1)\,!\,n\,!}\cdot\sum_{h=0}^{h=2n-6}\left[2^{2n-6-h}(2n-6+h)_{2n-6}\,(2n-2-h)_4\right]$$

(1) Per quanto riguarda il significato di questo simbolo vedasi H. Schubert, *Allgemeine Anzahlfunctionen* ecc., § 4, Math. Ann., t. 45, 1894.

e siccome applicando la formola

$$(2m)_m (2n)_{2n} + 2(2m-1)_m (2n+1)_{2n} + 2^2 (2m-2)_m (2n+2)_{2n} + \cdots + 2^m m_m (2n+m)_{2n} = 2^{2m} (m+n)_n$$

la sommatoria dà per risultato $2^{4n-13}(2n-5)(2n-4)$, così in conclusione si ricava

$$x_{n-4} = \frac{1!\,3!\,(2n-6)!\,(2n-4)!}{(n-3)!\,(n-2)!\,(n-1!)\,n!}$$

Ed ora generalizzando il ragionamento precedente, si arriva senza difficoltà ad ottenere il valore di x_{n-2r} mediante una formola del tipo della (1), la quale però non apparisce semplificabile facilmente. Ad ogni modo le espressioni qui trovate per x_{n-2}, x_{n-4} ci permettono di intuire che sarà

$$x_{n-2r} = \frac{[1!\,3!\ldots(2r-1)!]\cdot[(2n-4r+2)!\,(2n-4r+4)!\,(2n-2r)!]}{(n-2r+1)!\,(n-2r+2)!\ldots(n-1)!\,n!} \quad (^1)$$

e con tanto maggior sicurezza possiamo asserire ciò in quanto che per $n = 2q+1$, $r = q$ e per $n = 2q$, $r = q-1$ quest'espressione ci fornisce i valori sopra indicati e trovati per altra via, mentre per $n = 2q$, $r = q$ e per $n = 2q+1$, $r = q+1$ essa diventa eguale ad 1, ciò che precisamente dev'essere.

Meccanica. — *La deformazione del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti.* Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

Il prof. Somigliana in una recente Nota (Rend. Acc. Lincei, febbraio 1902), di cui certo non è sfuggita l'importanza ai cultori di Fisica matematica, ha indicato un metodo semplice e diretto per risolvere il problema della deformazione di un diedro retto isotropo o cristallino, con due piani di simmetria, allorchè sulle due superficie limiti sono note parte degli spostamenti e parte delle forze.

Il caso in cui sono dati o i soli spostamenti o le sole forze sfugge al metodo del Somigliana; nè sembra facile la sua trattazione col metodo generale Betti-Cerruti. Nel caso in cui si conoscano gli spostamenti superficiali, il problema è stato risoluto assai elegantemente dal prof. Tedone (Rend. Acc. Lincei, dicembre 1901) per via di approssimazioni successive; forse al problema stesso potrebbe applicarsi con successo il così detto metodo alternante,

(1) Quest'espressione coincide, a meno del fattore 2^{n-2r} con la prima delle (4) del citato lavoro del Segre.