ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

e siccome applicando la formola

$$(2m)_m(2n)_{2n}+2(2m-1)_m(2n+1)_{2n}$$
$$+2^2(2m-2)_m(2n+2)_{2n}+\cdots+2^m m_m(2n+m)_{2n}=2^{2m}(m+n)_n$$

la sommatoria dà per risultato $2^{4n-13}(2n-5)(2n-4)$, così in conclusione si ricava

$$x_{n-4}=\frac{1!\,3!\,(2n-6)!\,(2n-4)!}{(n-3)!\,(n-2)!\,(n-1!)\,n!}$$

Ed ora generalizzando il ragionamento precedente, si arriva senza difficoltà ad ottenere il valore di x_{n-2r} mediante una formola del tipo della (1), la quale però non apparisce semplificabile facilmente. Ad ogni modo le espressioni qui trovate per x_{n-2}, x_{n-4} ci permettono di intuire che sarà

$$x_{n-2r}=\frac{[1!\,3!\ldots(2r-1)!]\cdot[(2n-4r+2)!\,(2n-4r+4)!\,(2n-2r)!]}{(n-2r+1)!\,(n-2r+2)!\ldots(n-1)!\,n!}\ (^1)$$

e con tanto maggior sicurezza possiamo asserire ciò in quanto che per $n=2q+1$, $r=q$ e per $n=2q$, $r=q-1$ quest'espressione ci fornisce i valori sopra indicati e trovati per altra via, mentre per $n=2q$, $r=q$ e per $n=2q+1$, $r=q+1$ essa diventa eguale ad 1, ciò che precisamente dev'essere.

Meccanica. — *La deformazione del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti.* Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

Il prof. Somigliana in una recente Nota (Rend. Acc. Lincei, febbraio 1902), di cui certo non è sfuggita l'importanza ai cultori di Fisica matematica, ha indicato un metodo semplice e diretto per risolvere il problema della deformazione di un diedro retto isotropo o cristallino, con due piani di simmetria, allorchè sulle due superficie limiti sono note parte degli spostamenti e parte delle forze.

Il caso in cui sono dati o i soli spostamenti o le sole forze sfugge al metodo del Somigliana; nè sembra facile la sua trattazione col metodo generale Betti-Cerruti. Nel caso in cui si conoscano gli spostamenti superficiali, il problema è stato risoluto assai elegantemente dal prof. Tedone (Rend. Acc. Lincei, dicembre 1901) per via di approssimazioni successive; forse al problema stesso potrebbe applicarsi con successo il così detto metodo alternante,

(1) Quest'espressione coincide, a meno del fattore 2^{n-2r} con la prima delle (4) del citato lavoro del Segre.

partendo dalle formole della deformazione di un suolo isotropo indefinito (Problema di Boussinesq e Cerruti).

Tuttavia il metodo generale suddetto conduce con grandissima facilità alla risoluzione dei nuovi problemi del Somigliana; ed è ciò che, in breve, mi propongo di mostrare in questa Nota. Mi varrò costantemente, come in altri miei lavori, dei metodi e delle notazioni delle note *Ricerche* ecc. del Cerruti e della sua Memoria *Sulla deformazione* ecc. (Rend. Acc. Lincei, giugno 1888).

I. L'asse y sia lo spigolo del diedro isotropo i cui piani contengano le direzioni positive dei due semi-assi x e z: accenneremo con σ_1 il semipiano $x=0$ e con σ_2 il semipiano $z=0$; M è un punto qualunque di coordinate (x, y, z) variabile nello spazio S del diedro; $M_1(x_1 y_1 z_1)$ un altro punto fisso dello stesso spazio. Siano: M_1' la immagine di M_1 rispetto σ_1; M_1'' e M_1''' rispettivamente le immagini di M_1' ed M_1 rispetto σ_2 e diciamo r, r_1, r_2, r_3 le distanze del punto M da M_1, M_1', M_1'', M_1'''; sicchè abbiamo:

$$r^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2;\ r_1^2=(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$
$$r_2^2=(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1)^2;\ r_3^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1)^2$$

Consideriamo ora le seguenti funzioni di x, y, z, armoniche in tutto S,

$$G=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3};\qquad G'=-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}$$
$$G_1=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1};\qquad G_3=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_3}.$$

Osservando che si ha:

$$\begin{array}{llll} \text{per} & x=0 & r=r_1\,, & r_2=r_3 \\ \text{"} & z=0 & r=r_3\,, & r_2=r_1 \end{array}$$

si deduce che sopra σ_1 e σ_2 la funzione G è tale che

$$G=\frac{1}{r}$$

La G è quindi la funzione di Green relativa allo spazio S; e mediante questa è possibile assegnare, in un punto qualunque del campo, il valore di una funzione uniforme in S e che all'infinito soddisfa a certe note condizioni di convergenza, allorchè sono noti il valore del Δ_2 in ogni punto del campo e i valori della funzione al contorno. Applicando una formola ben nota si ha:

$$2\pi u(x_1 y_1 z_1)=-\frac{\partial}{\partial x_1}\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)u\,d\sigma_1-\frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)u\,d\sigma_2-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r}-G\right)\Delta_2 u\,dS.$$

La funzione G′ soddisfa al contorno alle condizioni seguenti:

$$x=0\,,\quad \frac{\partial G'}{\partial x}=\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\quad;\quad z=0\,,\quad \frac{\partial G'}{\partial z}=\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,;$$

quindi la G′ è una funzione analoga a quella di Green relativa allo stesso spazio e che permette risolvere il problema precedente, allorchè però in superficie sono noti i valori della derivata normale di u; infatti si trova:

$$2\pi u(x_1y_1z_1)=-\int\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_3}\right)\frac{\partial u}{\partial x}d\sigma_1-\int\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial u}{\partial z}d\sigma_2-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r}-G'\right)\Delta_2\,u\,dS\,.$$

La funzione G_1, a sua volta, soddisfa al contorno alle condizioni:

$$x=0\quad,\quad \frac{\partial G_1}{\partial x}=\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\quad;\quad z=0\quad,\quad G_1=\frac{1}{r}\,,$$

e permetterà quindi di risolvere lo stesso problema, allorchè sul piano σ_1 si conoscono i valori della derivata normale di u e sul piano σ_2 i valori della funzione stessa: e si trova:

$$2\pi u(x_1y_1z_1)=-\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)\frac{\partial u}{\partial x}d\sigma_1-\frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)u\,d\sigma_2-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r}-G_1\right)\Delta_2\,u\,dS.$$

Così finalmente mediante la funzione G_3 potremo risolvere il problema per così dire complementare, quando cioè sono noti su σ_1 i valori di u e sopra σ_2 i valori della derivata normale.

2. Vogliasi determinare, nel punto $x_1\,y_1\,z_1$, la deformazione di questo diedro isotropo soggetto a forze qualunque di massa, allorchè sui due piani limiti sono date le componenti tangenziali degli spostamenti e le componenti normali delle forze: si conoscono cioè:

$$\begin{array}{llll} \text{per} & x=0 & \text{le} & L\,,\ v\,,\ w \\ \text{e per} & z=0 & \text{le} & u\,,\ v\,,\ N\,. \end{array}$$

Come è ben noto la difficoltà maggiore del metodo consiste nel sapere assegnare la deformazione ausiliaria, in un punto generico $x\,,y\,,z$, di componenti $\xi\,,\eta\,,\zeta$ corrispondenti a forze di massa nulle e tali che in superficie sia:

$$x=0\,,\ L_0'=-2k\omega^2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}=2k\omega^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\,,\ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,,\ \zeta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,;$$

$$z=0\,,\ \xi=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,,\ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,,\ N_0''=2k\omega^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\,;$$

le quali assai agevolmente si trasformano in queste altre:

$$x=0\ ,\ \frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\ ,\ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\ ,\ \zeta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\ ;$$

$$z=0\ ,\ \xi=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\ \eta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial\zeta}{\partial z}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\ .$$

La dilatazione cubica ϑ è una funzione armonica in S e poichè su σ_1 e σ_2 si ha:

$$\vartheta=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0\ ,$$

sarà, in tutto S, $\vartheta=0$; quindi anche le componenti ξ,η,ζ di deformazione sono armoniche e la loro determinazione è un caso particolare dei problemi risoluti nel § precedente. Ma senza applicare le formule generali, basterà osservare che la funzione armonica $\frac{\partial G}{\partial x}$ è tale che:

$$\text{per } x=0,\quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\quad ;\quad \text{e per } z=0\ ,\ \frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ .$$

Sarà dunque:

$$\xi=-\frac{\partial G}{\partial x}\ .$$

Allo stesso modo si deduce:

$$\eta=-\frac{\partial G}{\partial y}\quad ;\quad \zeta=-\frac{\partial G}{\partial z}\ .$$

Determinata la deformazione ausiliaria, restano a determinare le forze da applicare in superficie perchè producano la deformazione precedentemente calcolata; e ciò si ottiene agevolmente dalle equazioni ai limiti. Infatti si ha già:

$$L'_0=2k\omega^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\ ,$$

e poi:

$$M'_0=2k\omega^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=0}\quad ;\quad N'_0=2k\omega^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial z}\right)_{x=0}\ .$$

Ma un breve calcolo mostra che:

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=0}=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{2}{r_3}-\frac{1}{r}\right)\quad ;\quad \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial z}\right)_{x=0}=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{2}{r_3}-\frac{1}{r}\right)$$

Quindi:

$$M_0' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{2}{r_3} - \frac{1}{r}\right) \quad ; \quad N_0' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\frac{2}{r_3} - \frac{1}{r}\right).$$

Un calcolo analogo dà pure:

$$L_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \; ; \; M_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \; ; \; N_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}.$$

3. Questa deformazione ausiliaria permette di assegnare la dilatazione cubica Θ, corrispondente alla effettiva deformazione, nel punto $x_1\, y_1\, z_1$.

Basta applicare infatti la formula del Betti, la quale nel caso in quistione si riduce alla:

$$\begin{aligned} 4\pi\Omega^2\Theta(x_1 y_1 z_1) = {} & \frac{1}{k}\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x}\right) L\, d\sigma_1 + \frac{1}{k}\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} + \frac{\partial G}{\partial z}\right) N\, d\sigma_2 \\ & + \int\left\{\left(\frac{1}{k} M_0' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y}\right) v + \left(\frac{1}{k} N_0' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z}\right) w\right\} d\sigma_1 \\ & + \int\left\{\left(\frac{1}{k} L_0'' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z}\right) u + \left(\frac{1}{k} M_0'' - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z}\right) v\right\} d\sigma_2 . \end{aligned}$$

Abbiamo invero supposte nulle le forze di massa; ma con ciò, come è noto, non si restringe la generalità del problema. La formola che darebbe darebbe nel caso generale la dilatazione, conterrebbe ancora tre altri termini relativi alle forze di massa.

Notando che:

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=0} = 2\frac{\partial \frac{1}{r_3}}{\partial x_1} \quad ; \quad \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} + \frac{\partial G}{\partial z}\right)_{z=0} = 2\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z_1}$$

e che:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x_1\, \partial y_1} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x\, \partial z} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x_1\, \partial z_1}; \text{ ecc.}$$

e ponendo:

$$\frac{2\pi\Omega^2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} P = \frac{1}{k}\int \frac{L\, d\sigma_1}{r_3} + 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1}\int v\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r}\right) d\sigma_1 - 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial z_1}\int w\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r}\right) d\sigma_1 ;$$

$$\frac{2\pi\Omega^2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} R = \frac{1}{k}\int \frac{N\, d\sigma_2}{r_1} - 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\int u\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r}\right) d\sigma_2 + 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1}\int v\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) d\sigma_2$$

risulta semplicemente:

$$\Theta = \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial z_1}\right).$$

Si osserverà che P e Q sono funzioni armoniche in tutto il diedro e risultano composte di funzioni potenziali di determinate distribuzioni superficiali (fatte sulle facce del diedro) e delle loro derivate.

4. Cognita la dilatazione cubica, la ricerca di u, v, w si riconduce ad uno dei problemi risoluti nel § 1. Infatti abbiamo:

$$\Delta_2 u + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial z_1}\right) = 0.$$

Sul piano $z_1 = 0$ sono noti i valori di u e sul piano $x_1 = 0$ essendo soddisfatta la:

$$\frac{1}{k} L + 2\omega_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + (\Omega^2 - 2\omega^2)\,\Theta = 0.$$

sarà noto il valore della derivata normale. Può quindi ritenersi conosciuta la u stessa nel punto $x_1\, y_1\, z_1$. La ricerca di w dipende da un problema del tutto analogo. La ricerca di v, della quale è noto il Δ_2, dipende da un problema più semplice essendo noti i suoi valori sopra σ_1 e σ_2. Gli spostamenti all'infinito si suppongono nulli.

Le formole che si ottengono sono abbastanza semplici; ma non è qui il caso di svilupparle completamente.

5. Supponiamo invece che sui due piani limiti siano conosciute la componente normale dello spostamento e le componenti tangenziali delle forze; cioè siano note:

per $x = 0$ le u, M, N;
per $z = 0$ le L, M, w.

Dovremo determinare una deformazione ausiliaria di componenti ξ, η, ζ tale che al contorno sieno soddisfatte le condizioni:

$$x = 0\ ,\ \xi = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\ M_0' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y}\ ,\ N_0' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z};$$

$$z = 0\ ,\ L_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z}\ ,\ M_0'' = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z}\ ,\ \zeta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

A queste agevolmente si sostituiscono le altre equivalenti:

$$x=0\ ,\ \xi=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\ ,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\ ;$$

$$z=0\ ,\ \frac{\partial\xi}{\partial z}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\ ,\quad \frac{\partial\eta}{\partial z}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\ ,\quad \zeta=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\ .$$

Decomponiamo la deformazione ξ, η, ζ in altre due $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ e $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ e le $\zeta_1\,\eta_1\,\zeta_1$ siano armoniche in S e al contorno soddisfino alle condizioni precedenti; mentre le $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ soddisfino alle equazioni indefinite di equilibrio e siano nulle al contorno. Nè per la ricerca della prima deformazione occorre seguire il metodo generale del § 1; perchè un facile calcolo mostra che si può prendere:

$$\xi_1=-\frac{\partial G'}{\partial x}\ ;\quad \eta_1=-\frac{\partial G'}{\partial y}\ ;\quad \zeta_1=-\frac{\partial G'}{\partial z}$$

Questa deformazione è quindi priva di dilatazione e di rotazione e allora si vede subito che alle equazioni ulteriori può soddisfarsi ponendo $\xi_2=\eta_2=\zeta_2=0$: ond' è:

$$\xi=-\frac{\partial G'}{\partial x}\ ;\quad \eta=-\frac{\partial G'}{\partial y}\ ;\quad \zeta=-\frac{\partial G'}{\partial z}\ .$$

Dopo ciò la risoluzione del problema non presenta più alcuna difficoltà.

Lo stesso può dirsi per gli altri casi considerati dal prof. Somigliana. Con pari facilità si possono trattare problemi analoghi relativi alla deformazione di un triedro retto isotropo.

Fisica. — *Sul contegno dell'idrogeno e dell'ossigeno in presenza dell'acqua.* Nota preventiva di A. Marcacci, presentata dal Socio Luciani.

Al congresso internazionale di Fisiologia di Torino (settembre 1901) feci conoscere alcuni risultati da me ottenuti studiando il modo di comportarsi di certi gas (azoto e idrogeno) quando sieno lasciati a lungo nell'acqua, sia soli e allo stato di purezza, sia mescolati a dell'ossigeno. Ecco le conclusioni alle quali giungevo dopo tale studio.

I. Se, a periodi regolari, si esamina l'idrogeno stagnante sull'acqua comune sotto una campana, vi si trova, nei primi giorni, dell'ossigeno in piccola quantità: questo gas sparisce però dopo un certo tempo, e non riappa-