ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

frequenza delle scariche dipende dalla resistenza, capacità ecc. È poi verosimile che con graduali modificazioni delle varie parti dei circuiti si possa passare, dai suoni in tal modo generati, a quelli ottenuti dal Duddell, la cui altezza dipende dalla frequenza delle oscillazioni elettriche permanenti nel circuito derivato.

Poichè il circuito derivato è percorso da una corrente intermittente, esso potrà dare fenomeni d'induzione, analoghi a quelli osservati da Peuchert (¹) con disposizione simile a quella di Duddell. Basta infatti inserire nel circuito del condensatore il filo grosso di un grande rocchetto di Ruhmkorff, perchè si formino scintille fra i capi del filo indotto. Tali scintille possono essere lunghe oltre un centimetro, quando la corrente principale data dagli accumulatori è di pochi milliampère. Esse decrescono naturalmente in lunghezza, quando si aumenta la frequenza delle scariche nel tubo.

Fenomeni affatto simili a quelli descritti si ottengono sostituendo al tubo G la fiamma di un becco Bunsen. Una tale fiamma fu pure adoperata dal Ruhmer (²) in sostituzione dell'arco voltaico, nell'esperienza dell'arco parlante del Simon (³). Occorre però rendere abbastanza conduttrice la fiamma, deponendo su una delle lastrine di platino in essa immerse e funzionanti da elettrodi, un poco di cloruro di sodio. La fiamma emette da sola il suono, però con intensità minore, di quella del suono prodotto dal telefono T.

Le esperienze qui descritte sono state preparate ed eseguite in poco tempo; per così dire, improvvisate; se, quando potrò intraprenderne uno studio dettagliato, esse mi daranno, come è da prevedere, qualche risultato degno di menzione, ne farò oggetto di altra pubblicazione.

Matematica. — *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura.* Nota del Corrispondente G. Ricci.

In questa Nota mi propongo di stabilire coi metodi del Calcolo differenziale assoluto le formole fondamentali della teoria delle varietà di natura qualunque ad n dimensioni considerate come immerse in varietà ad $n+m$ dimensioni pure qualunque.

Queste formole pel caso di $m=1$ sono state date dal prof. Bianchi nella traduzione tedesca della sua *Geometria Differenziale*; con metodo semplice ed elegante, ma che forse male si estenderebbe al caso generale. — Per questo esse nella loro sostanza si trovano invece esposte in una Memoria

(¹) Elektr. Zeitschr. pag. 467, 1901.
(²) Physik. Zeitschr., februar 23, pag. 325, 1901.
(³) Wied. Ann., t. 64, pag. 233, 1898.

pubblicata dal sig. Voss nel volume XVI dei *Mathematische Annalen*; in modo tuttavia, che poco si presta alle applicazioni ed alle interpretazioni geometriche. — Perciò non mi sembra inopportuno il ritornare sull'argomento per presentare quelle formole sotto la forma più semplice consentita dalle notazioni proprie dei metodi, dei quali faccio uso, e per trarne alcune conseguenze relative alla curvatura di una varietà qualunque.

Per ciò, che riguarda, le notazioni ed i metodi del Calcolo differenziale Assoluto mi riferirò alla esposizione fattane dal prof. Levi-Civita e da me in una Memoria inserita nel volume LIV dei *Mathematische Annalen*, la quale, occorrendo, sarà qui citata colla lettera M seguita dai numeri corrispondenti al capitolo, al paragrafo e, eventualmente, alla formola da consultare.

1. Siano

$$\varphi = \sum_1^n a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

$$\psi = \sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, dy_u\, dy_v$$

due forme differenziali quadratiche positive. Perchè la varietà V_n definita dalla prima sia contenuta nella V_{n+m} definita dalla seconda è necessario e basta che si possano determinare $y_1, y_2, \ldots, y_{n+m}$ in funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in modo da soddisfare alle equazioni

$$\text{(I)} \qquad \sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, y_{u/r}\, y_{v/s} = a_{rs} \; \text{(}^1\text{)}$$

Derivando queste covariantemente secondo φ si ottengono delle equazioni, a cui equivalgono le

$$\text{(1)} \qquad \sum_1^{n+m}{}_u\, c_{u/r} \sum_1^{n+m}{}_v \Big(c_{uv}\, y_{v/st} + \sum_1^{n+m}{}_w\, c_{vw,u}\, y_{v/s}\, y_{w/t} \Big) = 0\,,$$

nelle quali i simboli $c_{vw,u}$ rappresentano i coefficienti di Christoffel di prima specie relativi alla forma ψ.

Si rappresenti con $\varepsilon_{\alpha\beta}$ lo zero o l'unità, secondo che gli indici α e β sono distinti o coincidono, e si determinino le espressioni $z_{\alpha/u}$ in modo da soddisfare alle equazioni

$$\text{(2)} \qquad \sum_1^{n+m}{}_u\, y_{u/r}\, z_{\alpha,u} = 0$$

$$\text{(3)} \qquad \sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c^{(uv)}\, z_{\alpha/u}\, z_{\beta/v} = \varepsilon_{\alpha\beta}\,,$$

designandosi con $c^{(uv)}$ i coefficienti della forma reciproca a ψ.

(1) Gli indici r, s, t, a cui non siano attribuiti particolari valori, si intenderanno sempre suscettibili di tutti i valori $1, 2, .., n$; quelli u, v, w dei valori $1, 2, .., n+m$ e quelli $\alpha, \beta, \gamma ..$ dei valori $1, 2, .., m$.

Le $z_{1/u}, z_{2/u}, \ldots, z_{m/u}$ potranno riguardarsi (M, II, 1) come sistemi coordinati covarianti di m congruenze ortogonali di linee tracciate in V_{n+m} e normali a V_n. I sistemi coordinati controvarianti delle congruenze stesse avranno invece gli elementi

$$z_\alpha^{(u)} = \sum_1^{n+m}{}_v\, c^{(uv)}\, z_{\alpha/v}.$$

Introducendo delle indeterminate

$$b_{\alpha/rs} = b_{\alpha/sr}$$

potremo alle equazioni (1) sostituire le

$$\text{(II)} \qquad y_{u'/rs} = \sum_1^m{}_\alpha\, z_\alpha^{(u')}\, b_{\alpha/rs} - \sum_1^{n+m}{}_{uvw}\, c^{(uu')}\, c_{vw,u}\, y_{v/r}\, y_{w/s}.$$

2. Dalle (2) derivate covariantemente secondo φ, tenendo conto delle (II), seguono le

$$\sum_1^{n+m}{}_u\, y_{u/r}\left(z_{\alpha/u/s} - \sum_1^{n+m}{}_{vw}\, z_\alpha^{(v)}\, c_{uw,v}\, y_{w/s}\right) = -b_{\alpha/rs},$$

che equivalgono alle

$$\text{(4)} \qquad z_{\alpha/u/s} = \sum_1^{n+m}{}_{vw}\, z_\alpha^{(v)}\, c_{uw,v}\, y_{w/s} - \sum_1^{n+m}{}_v\, c_{uv} \sum_1^n{}_p\, b_{\alpha/ps}\, y_v^{(p)} + \sum_1^m{}_\beta\, \mu_{\alpha\beta/s}\, z_{\beta/u},$$

rappresentandosi con $\mu_{\alpha\beta/s}$ delle nuove indeterminate; le quali, come risulta derivando le (3), debbono essere legate dalle relazioni

$$\text{(5)} \qquad \mu_{\alpha\beta/s} + \mu_{\beta\alpha/s} = 0.$$

Alle (4) equivalgono poi le

$$\text{(4')} \qquad z_{\alpha/s}^{(u')} = -\sum_1^{n+m}{}_{uvw}\, c^{(u'u)}\, z_\alpha^{(v)}\, c_{vw,u}\, y_{w/s} - \sum_1^n{}_p\, b_{\alpha/ps}\, y_{u'}^{(p)} + \sum_1^m{}_\beta\, \mu_{\alpha\beta/s}\, z_\beta^{(u')}.$$

Si derivino le (II) tenendo conto delle (4′) e si eliminino le derivate terze delle y, applicando note formole (M, I, 6, (23)). Si perverrà ad un sistema di formole, che si può scindere nei due gruppi seguenti:

$$\text{(III)} \qquad \sum_1^m{}_\alpha\left(b_{\alpha/rt}\, b_{\alpha/ps} - b_{\alpha/rs}\, b_{\alpha/pt}\right) + \sum_1^{n+m}{}_{uu'vv'}\, c_{uu',vv'}\, y_{u/p}\, y_{u'/r}\, y_{v/s}\, y_{v'/t} = a_{pr,st};$$

$$\text{(IV)} \qquad b_{\alpha/rst} - b_{\alpha/rts} + \sum_1^m{}_\beta\left(\mu_{\alpha\beta/s}\, b_{\beta/rt} - \mu_{\alpha\beta/t}\, b_{\beta/rs}\right) +$$

$$+ \sum_1^{n+m}{}_{uu'vv'}\, c_{uu',vv'}\, z_\alpha^{(u)}\, y_{u'/r}\, y_{v/s}\, y_{v'/t} = 0,$$

nelle quali $a_{pr,st}$; $c_{uu',vv'}$ rappresentano i simboli di Riemann relativi alle forme φ e ψ.

Le formole (III) e (IV) costituiscono la generalizzazione, rispettivamente, della formola di Gauss e di quelle di Codazzi nella ordinaria teoria della superficie.

Se la varietà V_{n+m} è a curvatura costante K, le (III) e (IV) assumono rispettivamente la forma

$$\sum_1^m {}_\alpha (b_{\alpha/rt}\, b_{\alpha/ps} - b_{\alpha/rs}\, b_{\alpha/pt}) + \mathrm{K}\,(a_{ps}\, a_{rt} - a_{pt}\, a_{rs}) = a_{pr,st}$$

$$b_{\alpha/rst} - b_{\alpha/rts} + \sum_1^m {}_\beta (\mu_{\alpha\beta/s}\, b_{\beta/rt} - \mu_{\alpha\beta,t}\, b_{\beta/rs}) = 0\,.$$

E perchè V_n possa considerarsi contenuta in V_{n+m} sarà in questo caso necessario e sufficiente che si possano determinare le $b_{\alpha/rs}$ e le $\mu_{\alpha\beta/r}$ in modo da soddisfare a queste equazioni.

3. Alle formole (I), (II), (III) e (IV) si può estendere, qualunque sia m, la trasformazione già da me esposta pel caso $m = 1$ (M, IV, 4).

Si assuma in V_n una ennupla ortogonale di riferimento [1], [2], .., [n] e siano $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots, \lambda_{n/r}$ i sistemi coordinati covarianti delle congruenze, che la costituiscono. Si facciano poi le posizioni

$$y_{u/r} = \sum_1^n {}_i\, \xi_i^{(u)}\, \lambda_{i/r} \tag{A}$$

$$b_{\alpha/rs} = \sum_1^n {}_{hk}\, \omega_{\alpha hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s} \tag{6}$$

$$\lambda_{i/rs} = \sum_1^n {}_{hk}\, \gamma_{ihk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s}\,. \tag{7}$$

Per le (A) le (I) assumeranno la forma

$$\sum_1^n {}_{hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s} \sum_1^{n+m} {}_{uv}\, c_{uv}\, \xi_h^{(u)}\, \xi_k^{(v)} = a_{rs}\,,$$

ovvero (M, II, 1, (4'))

$$\sum_1^{n+m} {}_{uv}\, c_{uv}\, \xi_h^{(u)}\, \xi_k^{(v)} = \varepsilon_{hk} \ \text{(1)}$$

E poichè queste ci dicono semplicemente che $\xi_1^{(u)}, \xi_2^{(u)}, \ldots, \xi_n^{(u)}$ sono i sistemi coordinati covarianti di n congruenze di linee contenute in V_{n+m} (le quali, come risulta dalle (A), pei punti di V_n coincidono rispettivamente colle

(1) Gli indici, i, h, k si intenderanno qui e in seguito suscettibili dei valori $1, 2, .., n$.

([1], [2], ..., [n]) potremo ad esse sostituire le (A), purchè in queste alle $\xi_i^{(u)}$ attribuiamo i significati ora stabiliti.

Le (II), tenuto conto delle (A) e delle (6) assumono la forma

$$\sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} y_{u'/rs} = \sum_1^m {}_\alpha\, z_\alpha^{(u')} \omega_{\alpha hk} - \sum_1^{n+m} {}_{uvw}\, c^{(uu')} \xi_h^{(v)} \xi_k^{(w)} c_{vw,u}\,;$$

mentre le (A) stesse derivate covariantemente secondo φ, tenendo conto delle (7), dànno

$$\sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} y_{u'/rs} = \sum_1^n {}_i\, \xi_i^{(u')} \gamma_{ihk} + \frac{d\xi_h^{(u')}}{ds_k}\,.$$

Le (II) si trasformano dunque nelle

$$\text{(B)} \qquad \frac{d\xi_h^{(u')}}{ds_k} = \sum_1^m {}_\alpha\, z_\alpha^{(u')} \omega_{\alpha hk} - \sum_1^n {}_i\, \xi_i^{(u')} \gamma_{ihk} - \sum_1^{n+m} {}_{uvw}\, c^{(uu')} \xi_h^{(v)} \xi_k^{(w)} c_{vw,u}\,.$$

o nelle equivalenti

$$\text{(B}'\text{)} \qquad \frac{d\xi_{h/u}}{ds_k} = \sum_1^m {}_\alpha\, \omega_{\alpha hk} z_{\alpha/u} - \sum_1^n {}_i\, \gamma_{ihk} \xi_{i/u} + \sum_1^{n+m} {}_{vw}\, c_{uv,w} \xi_h^{(w)} \xi_k^{(v)}\,.$$

In fine le (III) e (IV) assumono rispettivamente la forma

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \sum_1^m {}_\alpha\, (\omega_{\alpha ik}\, \omega_{\alpha jh} - \omega_{\alpha ij}\, \omega_{\alpha hk}) + \sum_1^{n+m} {}_{uu'vv'}\, c_{uu',vv'}\, \xi_h^{(u)} \xi_i^{(u')} \xi_j^{(v)} \xi_k^{(v')} = \\ = \sum_1^n {}_{prst}\, a_{pr,st}\, \lambda_h^{(p)} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \lambda_k^{(t)}\,. \end{cases}$$

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \frac{d\omega_{\alpha ij}}{ds_l} - \frac{d\omega_{\alpha il}}{ds_j} + \sum_1^n {}_k\, \{\omega_{\alpha ik}(\gamma_{kjl} - \gamma_{klj}) + \omega_{\alpha jk}\gamma_{kil} - \omega_{\alpha lk}\gamma_{kij}\} + \\ + \sum_1^m {}_\beta \left(\omega_{\beta il} \frac{d\mu_{\alpha\beta}}{ds_j} - \omega_{\beta ij} \frac{d\mu_{\alpha\beta}}{ds_l}\right) + \sum_1^{n+m} {}_{uu'vv'}\, c_{uu',vv'}\, z_\alpha^{(u)} \xi_i^{(u')} \xi_j^{(v)} \xi_l^{(v')} = 0\,. \end{cases}$$

4. Essendo

$$\xi_{h/u} = \sum_1^{n+m} {}_v\, c_{uv}\, \xi_h^{(v)}\,,$$

se si indica con $\vartheta_{h/u}$ l'angolo, che la linea della congruenza [h] fa colla linea coordinata y_u tracciata in V_{n+m}, si hanno le

$$\text{(8)} \qquad \sqrt{c_{uu}} \cos \vartheta_{h/u} = \xi_{h/u}\,,$$

per le quali le (B′) si trasformano nelle

$$-\sqrt{c_{uu}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta_{h/u}\frac{d\vartheta_{h/u}}{ds_k}=-\cos\vartheta_{h/u}\frac{d\sqrt{c_{uu}}}{ds_k}+\sum_1^m{}_\alpha\,\omega_{hk}\,z_{\alpha/u}$$

$$-\sum_1^n{}_i\,\gamma_{ihk}\,\xi_{iu}+\sum_1^{n+m}{}_{vw}\,c_{uv,w}\,\xi_k^{(v)}\,\xi_h^{(w)}\,.$$

Si supponga la varietà V_{n+m} euclidea e che $y_1, y_2, \dots, y_{n+m}$ siano coordinate cartesiane ortogonali. — Le precedenti assumeranno la forma

$$(9)\qquad -\,\mathrm{sen}\,\vartheta_{h/u}\frac{d\vartheta_{h/u}}{ds_k}=\sum_1^m{}_\alpha\,\omega_{\alpha hk}\,z_{\alpha/u}-\sum_1^n{}_i\,\gamma_{ihk}\,\xi_{i/u}\,.$$

Considerando poi un punto qualunque O di V_n e supponendo l'asse delle y_1 normale a V_n in O, in questo punto sarà

$$\vartheta_{h/1}=\frac{\pi}{2}\,,\quad \xi_{i/1}=0\,,$$

e quindi le (9), per $u=1$, ci daranno

$$(10)\qquad -\frac{d\vartheta_{h/1}}{ds_k}=\sum_1^m{}_\alpha\,\omega_{\alpha hk}\,z_{\alpha/1}\,.$$

Poichè le $z_{1/1}, z_{2/1}\dots, z_{m/1}$ sono i coseni degli angoli, che l'asse delle y_1 fa con m direzioni uscenti da O ed in questo punto normali fra di loro ed a V_n, il secondo membro della (10) può riguardarsi come la proiezione sulla direzione y_1 di un vettore normale a V_n e che secondo le direzioni ricordate ha le componenti $\omega_{\alpha hk}$.

Per $k=h$ la (10) ci dice che questo vettore preso in direzione opposta e proiettato sopra una qualunque direzione $[\beta]$ normale a V_n rappresenta la curvatura della proiezione della linea $[h]$ sulla giacitura piana $[h\beta]$ determinata dalle due direzioni $[h]$ e $[\beta]$. — Per questa ragione il vettore di componenti $-\omega_{\alpha hh}$ può chiamarsi *curvatura normale relativa a* V_{n+m} della congruenza $[h]$ di linee tracciate in V_n.

Per $k\neq h$ il vettore di componenti $-\omega_{\alpha hk}$ proiettato sulla direzione $[\beta]$ rappresenta l'angolo, che fanno fra di loro le direzioni di due linee $[h]$, di cui una passi per O e l'altra pel punto P vicinissimo ad O sulla direzione $[k]$, proiettato sulla giacitura piana $[h\beta]$ e diviso per OP. — Tenendo conto delle relazioni

$$\omega_{\alpha hk}=\omega_{\alpha kh}\,,$$

che scendono dalle (6), si potrà dire che questo vettore rappresenta la *curvatura intermedia o mista relativa a* V_{n+m} delle due congruenze $[h]$ e $[k]$ di linee tracciate in V_n. — Si ha così un significato, per quanto so, non ancora avvertito della torsione geodetica delle linee tracciate sulle ordinarie superficie.

Queste interpretazioni si estendono facilmente al caso, in cui la varietà V_{n+m} sia qualunque, avendo presente che ad essa per le considerazioni relative all'intorno di un determinato punto O possiamo sempre sostituire la varietà euclidea ad $n+m$ dimensioni tangente a V_{n+m} in O.

Se nelle (C) poniamo $k=i, h=j$, ne ricaviamo in particolare le

$$
(\mathrm{C}')\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_1^m{}_\alpha (\omega_{\alpha ii}\omega_{\alpha jj}-\omega^2_{\alpha ij}) + \frac{1}{4}\sum_1^{n+m}{}_{uu'vv'}\, c_{uu',vv'} (\xi_i^{(u)}\xi_j^{(u')}-\xi_i^{(u')}\xi_j^{(u)})(\xi_i^{(v)}\xi_j^{(v')}\\
&-\xi_i^{(v')}\xi_j^{(v)}) = \frac{1}{4}\sum_1^n{}_{pr,st}\, a_{pr,st}(\lambda_i^{(p)}\lambda_j^{(r)}-\lambda_i^{(r)}\lambda_j^{(p)})(\lambda_i^{(s)}\lambda_j^{(t)}-\lambda_i^{(t)}\lambda_j^{(s)}).
\end{aligned}\right.
$$

E poichè (M, IV, 4, (G)) $\omega_{\alpha ii}\,\omega_{\alpha jj}-\omega^2_{\alpha ij}$ è la espressione della curvatura totale della superficie geodetica di V_n passante per un punto qualunque O e determinata dalle due direzioni $[i]$ e $[j]$, considerata come appartenente alla varietà euclidea V_3 determinata da queste e dalla direzione $[\alpha]$, essa potrà dirsi *curvatura totale della giacitura* $[ij]$ *di* V_n *rispetto* alla direzione $[\alpha]$ normale a V_n. — Le formole (C′) stabiliscono quindi il seguente teorema:

« Sia O un punto qualunque di una varietà V_n contenuta in una V_{n+m}; « e siano $[1], [2], \ldots, [m]$ m direzioni passanti per O ortogonali fra di loro « due a due e normali a V_n. — La somma delle curvature totali di una « superficie geodetica σ di V_n passante per O, comunque data, rispetto alle « direzioni $[1], [2], \ldots, [m]$ è indipendente dalla scelta di queste ».

Designando poi questa col nome di *curvatura di* σ *relativa a* V_{n+m}, la (C′) ci dice ancora che

« La curvatura di Gauss o curvatura assoluta di σ in ogni punto O è « eguale alla curvatura di σ relativa a V_{n+m} aumentata della curvatura « assoluta della superficie geodetica di V_{n+m} tangente a σ ».

Osserverò in fine che nel caso $n=3$, $m=1$ le formole (C) e (D) assumono rispettivamente la forma

$$\omega_{11}\,\omega_{22}-\omega_{12}^2+\sum_1^3{}_{uv}\,\gamma^{(uv)}\,z_u\,z_v=\mathrm{G}$$

$$\frac{d\omega_{i1}}{dx_2}-\frac{d\omega_{i2}}{dx_1}+\sum_1^2{}_k \left\{\omega_{ik}(\gamma_{k12}-\gamma_{k21})+\omega_{1k}\,\gamma_{ki2}-\omega_{2k}\,\gamma_{ki1}\right\}$$

$$=(-1)^i\sum_1^3{}_{uv}\,\gamma^{(uv)}\,z_u\,z_{i+1/v}\,,\qquad (i=1\,,2)$$

rappresentandosi con G l'invariante di Gauss relativo alla forma φ, e posto

$$c \cdot \gamma^{(uv)} = c_{u+1\,u+2\,,\,v+1\,v+2}\,,$$

colla convenzione di considerare come equivalenti gli indici congrui rispetto al modulo 3.

Meccanica. — *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano.* Nota I di E. Daniele, presentata dal Socio Volterra.

1. Il metodo esposto da Jacobi [1] per risolvere il problema del movimento di un sistema di n punti quando le forze applicate ammettano una funzione potenziale indipendente dal tempo, dà luogo, per il moto di un sol punto in un piano, alla considerazione di certi sistemi ortogonali, la cui particolarità consiste in ciò, che uno qualunque di essi ha una delle sue famiglie costituita da traiettorie del punto [2]. Precisamente, se U è la funzione potenziale e h la costante delle forze vive, ogni integrale della equazione

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 2\,(\mathrm{U} + h)$$

eguagliato ad una costante rappresenta una famiglia di curve ortogonali ad un sistema di traiettorie del punto, per modo che da ogni integrale di quella equazione si deduce una famiglia di traiettorie del punto mobile. Se poi, insegna il metodo di Jacobi, indichiamo con $f(x, y, a)$ un integrale dell'equazione precedente contenente la costante arbitraria essenziale a, l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \text{cost.}$$

fornisce tutte le traiettorie del punto che corrispondono ad un medesimo valore della costante delle forze vive h; e così si ottengono infiniti sistemi ortogonali, di cui una famiglia è formata di traiettorie, dipendenti dalla costante a e definiti dalle equazioni

$$(\alpha) \qquad f(x, y, a) = \text{cost.}, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = \text{cost.}$$

Si può ora domandare se fra questi sistemi ne esistano di quelli costi-

(1) *Vorlesungen ü. Dynamik*, 21. u. 22. Vorl.

(2) Cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, livre V, chap. VI.