ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

rappresentandosi con G l'invariante di Gauss relativo alla forma φ, e posto

$$c \,.\, \gamma^{(uv)} = c_{u+1\, u+2\,,\, v+1\, v+2}\,,$$

colla convenzione di considerare come equivalenti gli indici congrui rispetto al modulo 3.

Meccanica. — *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano.* Nota I di E. DANIELE, presentata dal Socio VOLTERRA.

1. Il metodo esposto da Jacobi (¹) per risolvere il problema del movimento di un sistema di n punti quando le forze applicate ammettano una funzione potenziale indipendente dal tempo, dà luogo, per il moto di un sol punto in un piano, alla considerazione di certi sistemi ortogonali, la cui particolarità consiste in ciò, che uno qualunque di essi ha una delle sue famiglie costituita da traiettorie del punto (²). Precisamente, se U è la funzione potenziale e h la costante delle forze vive, ogni integrale della equazione

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 2\,(\mathrm{U} + h)$$

eguagliato ad una costante rappresenta una famiglia di curve ortogonali ad un sistema di traiettorie del punto, per modo che da ogni integrale di quella equazione si deduce una famiglia di traiettorie del punto mobile. Se poi, insegna il metodo di Jacobi, indichiamo con $f(x\,,y\,,a)$ un integrale dell'equazione precedente contenente la costante arbitraria essenziale a, l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \text{cost.}$$

fornisce tutte le traiettorie del punto che corrispondono ad un medesimo valore della costante delle forze vive h; e così si ottengono infiniti sistemi ortogonali, di cui una famiglia è formata di traiettorie, dipendenti dalla costante a e definiti dalle equazioni

$$(\alpha) \qquad f(x\,,y,a) = \text{cost.}, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = \text{cost.}$$

Si può ora domandare se fra questi sistemi ne esistano di quelli costi-

(¹) *Vorlesungen ü. Dynamik*, 21. u. 22. Vorl.

(²) Cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, livre V, chap. VI.

tuiti non da *una*, ma da *due* famiglie di traiettorie. È da una tale domanda che traggono origine questa breve Nota e un'altra che ad essa farà seguito. Da quanto verrò esponendo risulta che siffatti sistemi (necessariamente isotermi) non esistono nel movimento definito da una funzione potenziale affatto generica; per incontrarli bisogna assumere come funzione potenziale un integrale dell'equazione

$$(\beta)\qquad \frac{\partial^2 \lg \mathrm{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \lg \mathrm{U}}{\partial y^2}=0\,,$$

e prendere la costante h eguale a zero (tolto il caso affatto ovvio in cui la forza applicata sia nulla).

Una volta riconosciuti, nei nn. 2 e 3, i movimenti ai quali dobbiamo limitare le nostre considerazioni, risolvo (n. 4) la questione di determinare effettivamente i sistemi, della natura che ho detto, corrispondenti a un dato movimento. Nel n. 5 mostro con un breve calcolo come nel caso attuale le due equazioni (α) non siano sostanzialmente distinte, secondo è da prevedersi. Dopo di avere, nella Nota II, fatto vedere che la determinazione dei sistemi in questione equivale alla ricerca delle geodetiche su una superficie sviluppabile (n. 6), applico, per fare un esempio, nei numeri seguenti la teoria svolta al caso delle forze centrali: almeno a quella classe di forze centrali la cui funzione potenziale soddisfa all'equazione (β).

2. Teorema. Se θ e θ_0 sono due integrali dell'equazione

$$(1)\qquad \Delta_1\theta\equiv\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2=2\,(\mathrm{U}+h)$$

tali che le linee $\theta=$ cost., $\theta_0=$ cost. siano ortogonali, il sistema di linee $(\theta\,,\,\theta_0)$ è isotermo.

Difatti, siccome le $\theta=$ cost. sono ortogonali ad una famiglia di traiettorie del punto, questa famiglia avrà per equazione differenziale

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}\,dx-\frac{\partial\theta}{\partial x}\,dy=0\,;$$

ma le traiettorie ortogonali delle $\theta=$ cost. sono, d'altra parte, le linee $\theta_0=$ cost., onde dovendo l'equazione precedente essere identica colla

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\theta_0}{\partial y}\,dy=0\,,$$

dovrà aversi

$$(2)\qquad \frac{\partial\theta_0}{\partial x}=k\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial\theta_0}{\partial y}=-\,k\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\,,$$

indicando con k un fattore di proporzionalità. Da queste quadrando e sommando si deduce

$$\Delta_1 \theta_0 = k^2 \Delta_1 \theta$$

e poichè è

$$\Delta_1 \theta_0 = \Delta_1 \theta = 2\,(\mathrm{U} + h)\,,$$

ne viene

$$k^2 = 1\,.$$

Le (2) si riducono dunque a

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial x} = \pm \frac{\partial \theta}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial y} = \mp \frac{\partial \theta}{\partial x}\,,$$

e queste dicono appunto che le linee $\theta =$ cost., $\theta_0 =$ cost. formano un sistema ortogonale isotermo.

Il teorema si può enunciare anche in questi termini: Se le linee $\theta =$ cost., $\theta_0 =$ cost., ortogonali fra loro, sono traiettorie del punto, il sistema ortogonale (θ, θ_0) è isotermo.

Viceversa: Se θ è un integrale della (1), ed ammette la funzione coniugata θ_0, anche θ_0 è un integrale della (1), e le linee $\theta =$ cost., $\theta_0 =$ cost. formano un sistema ortogonale (isotermo) di traiettorie del punto.

Raccogliendo in un solo enunciato il teorema precedente col suo inverso, possiamo dire: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee $\theta =$ cost. formino, insieme colle linee ad esse ortogonali, un sistema di traiettorie del punto mobile, è che la funzione $\theta(x, y)$ verifichi simultaneamente le due equazioni*

$$(3) \qquad \Delta_1 \theta = 2\,(\mathrm{U} + h)\,, \quad \Delta_2 \theta \equiv \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0\,.$$

Quel sistema ortogonale è allora isotermo.

3. La questione di determinare i movimenti, nei quali sono possibili sistemi ortogonali composti esclusivamente di traiettorie del punto, è dunque ridotta a trovare le condizioni affinchè le due equazioni (3) abbiano una soluzione comune.

Derivando ora la prima delle (3) rispetto a x oppure rispetto a y, e tenendo conto della seconda, si ottiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\,;$$

queste, risolte rispetto a $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}$ danno:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= \frac{1}{2(\mathrm{U}+h)}\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial\theta^2}{\partial x\partial y} &= \frac{1}{2(\mathrm{U}+h)}\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right), \end{aligned}\right.$$

e scrivendovi accanto l'altra

$$(4')\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{1}{2(\mathrm{U}+h)}\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right),$$

potremo dire che le condizioni cercate non sono altro che le condizioni d'integrabilità del sistema (4), (4'). Queste condizioni sono

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2},$$

ed eseguendo i calcoli si trova che si riducono all'unica

$$(5)\qquad (\mathrm{U}+h)\,\Delta_2\mathrm{U} - \Delta_1\mathrm{U} = 0\,.$$

La U non dipende altro che dalle coordinate x e y, e non contiene affatto la costante h, per cui dovendo l'equazione essere soddisfatta identicamente, dovrà aversi, fintantochè h non è nulla,

$$\mathrm{U}\Delta_2\mathrm{U} = \Delta_1\mathrm{U} = 0\,.$$

Queste due condizioni si riassumono poi nell'unica

$$\mathrm{U} = \text{costante}\,.$$

Abbiamo dunque: *l'unico movimento in cui esistano sistemi ortogonali* (*isotermi*) *composti di sole traiettorie del punto, e nei quali la costante delle forze vive non sia nulla, è il movimento rettilineo uniforme.* Quei sistemi ortogonali sono, in tal caso, formati dalle rette parallele ad una stessa direzione e dalle loro perpendicolari.

4. Lasciando da parte questo caso così semplice e supponendo ora $h=0$, l'equazione di condizione (5) si riduce a

$$(5')\qquad \mathrm{U}\Delta_2\mathrm{U} - \Delta_1\mathrm{U} = 0\,,$$

e ci rimane da passare alla effettiva determinazione dei corrispondenti sistemi ortogonali di traiettorie. Il procedimento che terremo ci farà ritrovare per U la condizione (5'), e ridurrà il problema delle traiettorie alle quadrature.

Questo problema, per quanto si è detto, consiste nel trovare le soluzioni comuni alle equazioni (3) con $h=0$, cioè le soluzioni del sistema

$$(3')\qquad \Delta_1\theta = 2\mathrm{U}\,,\quad \Delta_2\theta = 0\,.$$

Posto

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \theta_1\,,\quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \theta_2\,,$$

il sistema (3') è equivalente a quest'altro:

$$(3'')\qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 = 2\mathrm{U}\,,\quad \frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = 0\,,\quad \frac{\partial\theta_1}{\partial y} - \frac{\partial\theta_2}{\partial x} = 0\,.$$

Dalla prima di queste ricaviamo

$$\theta_2 = \pm\sqrt{2\mathrm{U} - \theta_1^2}\,,$$

e sostituendo nelle altre due otteniamo per θ_1 le equazioni

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\frac{\partial\theta_1}{\partial x} &= \mp\frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial y}\sqrt{2\mathrm{U}-\theta_1^2} + \frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial x}\theta_1 \\ 2\frac{\partial\theta_1}{\partial y} &= \pm\frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial x}\sqrt{2\mathrm{U}-\theta_1^2} + \frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial y}\theta_1\,. \end{aligned}\right.$$

Intanto la condizione di integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}$$

dà, osservando che deve aver luogo identicamente,

$$(7)\qquad \Delta_2 \lg \mathrm{U} = 0\,,$$

e questa coincide precisamente coll'equazione (5') [1].

Le (6) poi si integrano subito facendo la sostituzione

$$\theta_1 = \mp\sqrt{2\mathrm{U}}\,\varphi\,,$$

poichè con ciò si trasformano nelle altre

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial y}\sqrt{1-\varphi^2} &= 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \lg \mathrm{U}}{\partial x}\sqrt{1-\varphi^2} &= 0\,, \end{aligned}$$

[1] L'equazione di condizione che s'è trovata per la U, si può interpretare dicendo che le linee $\mathrm{U} =$ cost. (equipotenziali) insieme colle loro traiettorie ortogonali (linee di forza) debbono formare un sistema isotermo.

dalle quali si deduce integrando:

$$\text{arc sen}\,\varphi = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x}dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y}dx\right) + a\,,$$

a essendo una costante arbitraria. Si ha quindi

$$(8)\quad \begin{cases} \theta_1 = \pm\sqrt{2U}\,\text{sen}\left[a + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x}dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y}dx\right)\right] \\ \theta_2 = \pm\sqrt{2U}\cos\left[a + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x}dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y}dx\right)\right]. \end{cases}$$

e la funzione θ che si cerca vien data dalla formola

$$(9)\qquad \theta = \int(\theta_1\,dx + \theta_2\,dy).$$

Le formole (8) e (9) risolvono il problema: s'intende che la U che vi figura dev'essere un integrale della (7).

5. La funzione θ data dalla (9) contiene la costante arbitraria a non additiva; quindi sono infiniti i sistemi isotermi, composti di sole traiettorie, corrispondenti ad una data funzione potenziale. Anzi si può dire che questi sistemi esauriscono tutte le traiettorie del punto. Difatti, per il modo come θ contiene la costante a, secondo la teoria di Jacobi queste ultime sono *tutte* rappresentate dall'equazione

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \text{cost.}\,,$$

ed i nostri sistemi isotermi sono appunto quelli costituiti dalle coppie di famiglie $\theta(x\,,y\,,a) = \text{cost.}\,, \dfrac{\partial\theta}{\partial a} = \text{cost.}$

A questo punto si rende palese una notevole particolarità dei movimenti che studiamo, in relazione col metodo di Jacobi. Siccome i sistemi isotermi che abbiamo segnalato sono formati esclusivamente di traiettorie del punto, ne viene che anche l'equazione $\theta(x\,,y\,,a) = \text{cost.}$ deve rappresentare tutte le traiettorie, e quindi si può sostituire all'altra $\dfrac{\partial\theta}{\partial a} = \text{cost.}$ Il procedimento generale che conduce alla determinazione delle traiettorie si semplifica dunque in quei casi in cui la funzione potenziale verifica la (7) ed è nulla la costante delle forze vive; poichè una volta calcolata la θ mediante le formule (8) e (9), si hanno senz'altro le traiettorie eguagliando θ ad una costante arbitraria.

Sarà bene mostrare direttamente sulle formole come la cosa accada. In sostanza bisogna far vedere che le due equazioni

$$\theta(x, y, a) = b, \quad \frac{\partial\theta}{\partial a} \equiv \theta'(x, y, a') = b'$$

rappresentano le medesime linee; ossia, che se L è una linea di equazione $\theta(x, y, a) = b$, dove a e b hanno certi valori determinati, dev'essere possibile attribuire ad a' e b' valori tali che l'equazione $\theta'(x, y, a') = b'$ rappresenti ancora la stessa linea: il che equivale a dire che si deve poter esprimere a' e b' in funzione di a e b in modo che le due equazioni

$$(10) \qquad \theta(x, y, a) = b, \quad \theta'(x, y, a') = b'$$

coincidano.

Ora ponendo per brevità

$$\int\left(\frac{\partial \lg U}{\partial x} dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y} dx\right) = 2P,$$

le (8) si scrivono

$$(8') \qquad \theta_1 = \pm\sqrt{2U} \operatorname{sen}(a + P), \quad \theta_2 = \pm\sqrt{2U} \cos(a + P),$$

onde

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial a} = \theta_2, \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial a} = -\theta_1;$$

avremo quindi dalla (9):

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \int\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial a} dx + \frac{\partial\theta_2}{\partial a} dy\right) = \int(\theta_2\, dx - \theta_1\, dy),$$

e che $\theta_2\, dx - \theta_1\, dy$ sia un differenziale esatto risulta dalla seconda delle (3″). Le equazioni (10), cioè

$$(10') \qquad \begin{cases} \int\{\theta_1(x, y, a)\, dx + \theta_2(x, y, a)\, dy\} = b \\ \int\{\theta_2(x, y, a')\, dx - \theta_1(x, y, a')\, dy\} = b' \end{cases}$$

si riducono allora l'una all'altra mediante la sostituzione

$$(11) \qquad a' = a + (4k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad b' = -b,$$

con k intero qualunque; difatti si ha dalle (8′) e (11):

$$\begin{aligned} \theta_1(x, y, a') &= \pm\sqrt{2U} \operatorname{sen}(a' + P) = \pm\sqrt{2U} \cos(a + P) = \theta_2(x, y, a) \\ \theta_2(x, y, a') &= \pm\sqrt{2U} \cos(a' + P) = \mp\sqrt{2U} \operatorname{sen}(a + P) = -\theta_1(x, y, a), \end{aligned}$$

per cui sostituendo nella seconda delle (10′) e leggendovi $-b$ in luogo di b', essa si identifica colla prima.