ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

Noi possiamo però ora domandarci quale sarebbe, secondo le considerazioni teoriche cui ho accennato, la diminuzione della tensione del vapore acqueo sovrastante ad una goccia d'acqua delle dimensioni da me usate, e nelle condizioni verificantisi nelle mie esperienze. Si arriva allora al seguente risultato: la diminuzione della tensione del vapore d'acqua sovrastante ad una goccia di 2 mm. di diametro, caricata a 3000 Volta raggiunge al massimo il valore di $3.\ 10^{-6}$ atmosfere, diminuzione straordinariamente piccola d'ordine inferiore alle comuni variazioni barometriche che si producono da un momento all'altro, e alla quale non si può far risalire la diminuzione di evaporazione osservata. Resta quindi il dubbio che l'elettrizzazione agisca più direttamente alla velocità di evaporazione e in modo non ancora conosciuto.

Ho infine tentato di vedere se vi fosse una differenza di comportamento fra le due elettricità, questione che presenta molto interesse essendo accertato che quando un gas elettrizzato arrivando in un ambiente contenente del vapore d'acqua condensa questo in nebbia, la grandezza delle goccioline di questa dipendono dal segno dell'elettrizzazione del gas, ed è maggiore quando il gas è carico negativamente. Ciò parrebbe indicare, osserva il Thomson [1], che una goccia d'acqua carica positivamente evapora più in fretta che una goccia delle medesime dimensioni carica negativamente.

Esperienze ripetute con ogni cura, alternandole in tutti i modi, non hanno però permesso di scorgere alcuna differenza di comportamento fra le due elettricità, e la velocità d'evaporazione nei due casi si è mantenuta, nelle condizioni almeno in cui sperimentavo, molto approssimativamente la stessa.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota I del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In un'altra Nota, pubblicata in questi Rendiconti, stabilivo le equazioni differenziali che reggono il moto di un pendolo sferico [2]. Cercando poi di risolvere con maggior generalità ed esattezza il problema fondamentale della sismografia, da me già risoluto nella Nota citata ed in un'altra successiva (seduta del 17 marzo), venni condotto a considerare il pendolo sferico come caso particolarissimo d'un sistema meccanico assai più generale, cioè d'una *catena di corpi rigidi*: e quindi le equazioni trovate come caso particolare d'un altro sistema d'equazioni, alle quali si può arrivare con metodo identico e con grande facilità, grazie alla perfetta simmetria di formole che la stessa generalità del problema consente.

[1] *Die Entladung der Elektricität durch Gase*, pag. 10, Leipzig 1900.

[2] *Sulla determinazione dei moti sismici.* Seduta del 3 marzo 1901, vol. X, pagg. 144-148.

In questa prima Nota stabilirò le equazioni dinamiche relative al caso generale; in un'altra successiva applicherò i risultati ottenuti ad un caso speciale, che mi pare importante per la teoria degli strumenti sismici, e ritroverò, a guisa di corollario, la soluzione del problema testè citato.

1. Si immagini un sistema di n corpi rigidi

$$C_r \ (r = 1, 2, \dots, n),$$

tale che ciascuno di essi è legato *almeno per un punto* al precedente [1]. Fissato poi in ciascuno di essi un sistema d'assi cartesiani ortogonali, il quale serve a individuarne i punti, si può prescindere dal concetto fisico dei *corpi* e considerare in loro vece i corrispondenti sistemi di assi cartesiani. Sarà conveniente prendere ad arbitrio l'origine del primo sistema, e per origine di ogni altro il punto o uno dei punti per i quali esso è fissato al precedente; in tal modo nel sistema C_r sono messi in evidenza due punti: la sua origine, di coordinate nulle, e un punto di coordinate a_r, b_r, c_r, coincidente coll'origine del sistema successivo. Convenendo di rappresentare con P_{ri} un punto generico del sistema C_r, stabilisco di attribuire sempre l'indice $i = 0$ all'origine, l'indice $i = 1$ al punto che coincide coll'origine del sistema successivo, e l'indice $i = 2$ al baricentro, quando sarà necessario considerarlo.

In tal modo abbiamo intanto:

$$(1) \qquad P_{r1} \equiv P_{r+1\,0} \ ; \ [r = 1, 2, \dots, n-1]$$

$$\left.\begin{array}{ll}
(1') & x_{r0} = y_{r0} = z_{r0} = 0 \ ; \\
(1'') & x_{r1} = a_r, \ y_{r1} = b_r, \ z_{r1} = c_r \ ; \\
(1''') & x_{r2} = \dfrac{\sum\limits_{C_r}{}^{i} m_{ri}\, x_{ri}}{M_r}, \text{ etc., } [2] \\
\text{essendo} & \\
(1^{(\mathrm{IV})}) & M_r = \sum\limits_{C_r}{}^{i} m_{ri}\,,
\end{array}\right\} \ r = 1, \dots n$$

e rappresentando col simbolo $\sum\limits_{C_r}{}^{i}$ la somma estesa a tutti i punti materiali P_{ri} del corpo C_r.

2. Riferendo questa catena di corpi a un sistema cartesiano immobile $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$, chiamerò *coordinate assolute, rotazioni assolute*, etc. d'un punto o d'un corpo, le coordinate e le rotazioni rispetto al sistema immobile, e rappresenterò con $\xi_{ri}, \eta_{ri}, \zeta_{ri}$ le coordinate assolute di P_{ri}.

(1) S'intende che l'*ordine* dei corpi costituenti la catena è definito dall'indice r.

(2) Questa sigla *etc.*, messa dopo un'equazione o un'espressione qualunque, sostituisce per brevità le equazioni od espressioni dedotte da quella scritta mediante permutazioni circolari nelle terne di lettere $(x\,y\,z)$, $(a\,b\,c)$, $(\pi\,\chi\,\varrho)$.... etc.

Il più generale movimento della catena consiste della *rotazione* di ciascun corpo C_r intorno ad un asse istantaneo o permanente passante per la sua origine P_{r0}, e di una *traslazione* variabile da corpo a corpo, che può essere definita dalle coordinate assolute della rispettiva origine, che ha cioè per componenti secondo gli assi fissi: ξ_{r0}, η_{r0}, ζ_{r0}. Allora, se tutte le rotazioni sono infinitesime [1], in modo da potersi decomporre ciascuna in tre rotazioni infinitesime e successive π_r, χ_r, ϱ_r intorno agli assi delle ξ, η, ζ, e se gli assi solidali col corpo C_r sono scelti in modo che per $\pi_r = \chi_r = \varrho_r = 0$ essi risultano rispettivamente paralleli agli assi fissi, trascurando le seconde potenze delle rotazioni elementari, si trova che la posizione assoluta d'un punto P_{ri} è definita dalle equazioni:

$$\xi_{ri} - \xi_{r0} = x_{ri} + (\pi x_i)_r \,, \text{ etc.} \,, \tag{2}$$

avendo fatta per brevità la posizione generica

$$(\pi x_i)_r = \chi_r z_{ri} - \varrho_r y_{ri} \,, \text{ etc.} \tag{A}$$

Per calcolare il valore di ξ_{r0} notiamo che la (2) vale per qualunque valore degli indici r, i: dunque in particolare ponendo $r = s$, $i = 1$, ricordando la (1''), e osservando che, per la (1), è

$$\xi_{s1} = \xi_{s+1\,0} \,,$$

si avrà:

$$\xi_{s+1\,0} = \xi_{s0} + a_s + (\pi a)_s :$$

sommando i due membri di questa eguaglianza da $s = 1$ a $s = r - 1$, e notando che in tal modo vengono eliminate ξ_{20}, ξ_{30}, ..., $\xi_{r-1\,0}$, si ottiene

$$\xi_{r0} = \xi_{10} + \sum_1^{r-1}{}_s\, a_s + \sum_1^{r-1}{}_s\, (\pi a)_s \,. \tag{3}$$

Vediamo intanto che di tutte le traslazioni si può ritenere arbitraria soltanto quella del primo sistema: convenendo di rappresentare le sue componenti con ξ, η, ζ, cioè omettendo gli indici nella combinazione $r = 1$, $i = 0$, si ottiene infine dalla (2) e dalla (3):

$$\xi_{ri} = \xi + \sum_1^{r-1}{}_s\, a_s + x_{ri} + \sum_1^{r-1}{}_s\, (\pi a)_s + (\pi x_i)_r \,, \text{ etc.} \tag{4}$$

$$r = 1, 2, \ldots, n-1, n$$

$$\xi_{1i} = \xi + x_i + (\pi x_i)_1 \,, \text{ etc.} \tag{4'}$$

[1] Come si può facilmente arguire, non uso questa parola *infinitesimo* nel suo significato classico di grandezza variabile evanescente, ma bensì per « grandezza della quale sia trascurabile ogni potenza superiore alla prima ».

Per calcolare gli spostamenti virtuali parto dall'espressione generale

$$\delta\xi_{ri} = \delta\xi_{r0} + \delta\chi_r(\zeta_{ri} - \zeta_{r0}) - \delta\varrho_r(\eta_{ri} - \eta_{r0}) \text{ , etc.}$$

da questa, deducendo il valore di $\delta\xi_{r0}$ nell'identico modo che ci condusse dalla (2) alla (3), si ottiene infine:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \delta\xi_{ri} = \delta\xi &+ \sum_1^{r-1}{}_s\, \delta\chi_s(\zeta_{s1} - \zeta_{s0}) + \delta\chi_r(\zeta_{ri} - \zeta_{r0}) \\ &- \sum_1^{r-1}{}_s\, \delta\varrho_s(\eta_{s1} - \eta_{s0}) - \delta\varrho_r(\eta_{ri} - \eta_{r0}) \text{ , etc.} \end{aligned}$$

3. Applichiamo le formole fin qui trovate all'equazione simbolica dei lavori virtuali

$$\sum_1^n{}_r \sum_{C_r}{}_i (\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri})\,\delta\xi_{ri} + \text{etc.} = 0 \text{ ;}$$

nella quale, come al solito, con Ξ_{ri}, H_{ri}, Z_{ri} rappresento la proiezione sugli assi fissi della risultante di tutte le forze applicate nel punto P_{ri}, di massa m_{ri}.

Posto per brevità

$$(B)\qquad X_r = \sum_{C_r}{}_i (\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \text{ , etc. ,}$$

e sostituendo a $\delta\xi_{ri}$ la sua espressione (5), la somma testè scritta prende la forma:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \delta\xi \sum_1^n{}_r X_r + \sum_1^n{}_r \Big[X_r \sum_1^{r-1}{}_s \delta\chi_s(\zeta_{s1} - \zeta_{s0}) + \delta\chi_r \sum_{C_r}{}_i (\zeta_{ri} - \zeta_{r0})(\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \Big] \\ - \sum_1^n{}_r \Big[X_r \sum_1^{r-1}{}_s \delta\varrho_s(\eta_{s1} - \eta_{s0}) + \delta\varrho_r \sum_{C_r}{}_i (\eta_{ri} - \eta_{r0})(\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \Big] \end{aligned}$$

Di queste due somme doppie basta considerare soltanto la prima, giacchè l'altra si ottiene da quella scambiando χ con ϱ e ζ con η; ponendo per brevità

$$(C)\qquad \begin{cases} A_{sr} = (\zeta_{s1} - \zeta_{s0})\, X_r \\ A'_{rr} = \sum_{C_r}{}_i (\zeta_{ri} - \zeta_{r0})(\Xi_{ri} - m_{ri}\,\xi''_{ri}) \text{ ,} \end{cases}$$

essa si può scrivere sotto la forma

$$\sum_1^n{}_r \left[\sum_1^{r-1}{}_s \delta\chi_s A_{sr} + \delta\chi_r A'_{rr} \right] =$$

$$= \sum_1^n{}_r \left[\delta\chi_1 A_{1r} + \delta\chi_2 A_{2r} + \cdots + \delta\chi_{r-1} A_{r-1\,r} + \delta\chi_r A'_{rr} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \delta\chi_1 A'_{11} \\ &+ \delta\chi_1 A_{12} + \delta\chi_2 A'_{22} \\ &+ \delta\chi_1 A_{13} + \delta\chi_2 A_{23} + \delta\chi_3 A'_{33} \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+ \delta\chi_1 A_{1n} + \delta\chi_2 A_{2n} + \delta\chi_3 A_{3n} + \cdots + \delta\chi_{n-1} A_{n-1\,n} + \delta\chi_n A'_{nn} : \end{aligned}$$

donde, sommando per colonne,

$$= \sum_1^{n-1}{}_r \delta\chi_r \left(A'_{rr} + \sum_{r+1}^n{}_s A_{rs} \right) + \delta\chi_n A'_{nn} .$$

Sostituendo infine ai simboli A , A′ i loro valori (C), e ripetendo lo stesso calcolo per la seconda somma doppia che comparisce nella espressione (6), questa si trasforma nella seguente:

$$\begin{aligned} \delta\xi \sum_1^n{}_r X_r + \sum_1^{n-1}{}_r \delta\chi_r \Big[\sum_{C_r}{}_i (\zeta_{ri} - \zeta_{r0}) (\Xi_{ri} - m_{ri}\, \xi''_{ri}) + (\zeta_{r1} - \zeta_{r0}) \sum_{r+1}^n{}_s X_s \Big] \\ + \delta\chi_n \sum_{C_n}{}_i (\zeta_{ni} - \zeta_{n0}) (\Xi_{ni} - m_{ni}\, \xi''_{ni}) \\ - \sum_1^{n-1}{}_r \delta\varrho_r \Big[\sum_{C_r}{}_i (\eta_{ri} - \eta_{r0}) (\Xi_{ri} - m_{ri}\, \xi''_{ri}) + (\eta_{r1} - \eta_{r0}) \sum_{r+1}^n{}_s X_s \Big] \\ - \delta\varrho_n \sum_{C_n}{}_i (\eta_{ni} - \eta_{n0}) (\Xi_{ni} - m_{ni}\, \xi''_{ni}) . \end{aligned}$$

I termini omessi dell' equazione simbolica dei lavori virtuali si possono ottenere da questa espressione permutando circolarmente tutte le terne di lettere: eseguendo quest' operazione e raccogliendo poi a fattori comuni tutte le variazioni arbitrarie, si arriva infine all' equazione

$$(7) \qquad A\delta\xi + B\delta\eta + C\delta\zeta + \sum_1^n{}_r (H_r\, \delta\pi_r + K_r\, \delta\chi_r + L_r\, \delta\varrho_r) = 0 ,$$

avendo fatte le posizioni

$$(D) \qquad A = \sum_1^n{}_r X_r = \sum_1^n{}_r \sum_{C_r}{}_i (\Xi_{ri} - m_{ri}\, \xi''_{ri}) , \text{ etc.}$$

$$
\text{(E)}\quad
\begin{aligned}
\mathrm{H}_r = &\sum_{\mathrm{C}_r}{}_i (\eta_{ri} - \eta_{r0})(\boldsymbol{Z}_{ri} - m_{ri}\zeta''_{ri}) + (\eta_{r1} - \eta_{r0}) \sum_{r+1}^{n}{}_s \sum_{\mathrm{C}_s}{}_i (\boldsymbol{Z}_{si} - m_{si}\zeta''_{si}) \\
&- \sum_{\mathrm{C}_r}{}_i (\zeta_{ri} - \zeta_{r0})(\boldsymbol{H}_{ri} - m_{ri}\eta''_{ri}) - (\zeta_{r1} - \zeta_{r0}) \sum_{r+1}^{n}{}_s \sum_{\mathrm{C}_s}{}_i (\boldsymbol{H}_{si} - m_{si}\eta''_{si}), \text{etc.};
\end{aligned}
$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$
\text{(E')}\quad \mathrm{H}_n = \sum_{\mathrm{C}_n}{}_i (\eta_{ni} - \eta_{n0})(\boldsymbol{Z}_{ni} - m_{ni}\zeta''_{ni}) - \sum_{\mathrm{C}_n}{}_i (\zeta_{ni} - \zeta_{n0})(\boldsymbol{H}_{ni} - m_{ni}\eta''_{ni}) \text{ etc.}
$$

È da notare subito che queste equazioni furono dedotte senza fare alcuna restrizione sull'ordine di grandezza delle traslazioni ξ, η, ζ, sulla orientazione dei varî corpi rispetto alla traslazione, sulla natura delle forze nè sulla loro direzione rispetto agli assi fissi.

4. Se si volesse ora passare alle equazioni effettive del moto, bisognerebbe stabilire completamente i legami che esistono fra i varî corpi rigidi costituenti la catena. Nel caso che le traslazioni del primo corpo siano arbitrarie e che ciascuno sia legato al precedente per un punto solo, il sistema ha $3n + 3$ gradi di libertà, corrispondenti alle equazioni

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} = \mathrm{H}_r = \mathrm{K}_r = \mathrm{L}_r = 0:$$

in qualsiasi altro caso il numero delle equazioni diventa minore o per la soppressione di alcuna di esse (p. e. nel caso di traslazioni del primo corpo nulle o determinate), o per la sostituzione ad alcune di esse di certe loro combinazioni lineari (p. e. nel caso che uno dei corpi ruoti intorno ad un asse permanente) [1].

5. La forma definitiva delle funzioni H, K, L risulta molto complicata, anche tenendo conto che le rotazioni sono infinitesime e facendo delle ipotesi speciali circa gli assi fissi nei corpi.

[1] Infatti suppongasi che i corpi C_r, C_{r+1} abbiano una retta costantemente in comune: allora il moto di C_{r+1} è perfettamente definito quando sia data la sua rotazione ω intorno a questa retta, perchè se essa ha rispetto agli assi fissi i coseni di direzione λ, μ, ν avremo $\pi_{r+1} = \lambda\omega$, $\chi_{r+1} = \mu\omega$, $\varrho_{r+1} = \nu\omega$: d'altra parte se i suoi coseni di direzione rispetto agli assi (C_r) sono l, m, n (costanti), valgono le relazioni:

$$\lambda = l + \chi_r n - \varrho_r m \text{ etc.};$$

e quindi

$$\delta\pi_{r+1} = \lambda\delta\omega + \omega\delta\lambda = \lambda\delta\omega + \omega(n\,\delta\chi_r - m\,\delta\varrho_r) \text{ etc.}$$

Sostituendo questi valori nella (7), si trovano, in luogo delle 6 equazioni indipendenti

$$\mathrm{H}_r = \mathrm{H}_{r+1} = \mathrm{K}_r = \mathrm{K}_{r+1} = \mathrm{L}_r = \mathrm{L}_{r+1} = 0,$$

le 4 equazioni:

$$\mathrm{H}_r + \omega(m\,\mathrm{L}_{r+1} - n\,\mathrm{K}_{r+1}) = \mathrm{K}_r + \omega(n\,\mathrm{H}_{r+1} - l\,\mathrm{L}_{r+1}) = \mathrm{L}_r + \omega(l\,\mathrm{K}_{r+1} - m\,\mathrm{H}_{r+1}) = 0$$
$$\lambda\,\mathrm{H}_{r+1} + \mu\,\mathrm{K}_{r+1} + \nu\,\mathrm{L}_{r+1} = 0,$$

nelle quali a $\pi_{r+1}, \chi_{r+1}, \varrho_{r+1}$ si intendono sostituiti i valori testè trovati.

Perciò, senza procedere per ora ad un ulteriore sviluppo, chiuderò la trattazione del caso generale facendo l'ipotesi che il primo corpo sia fissato almeno per il punto P_{10} al terreno, e quindi possa sentire l'influenza d'un eventuale movimento sismico.

A tal fine fissato nell'elemento di crosta solida terrestre, che comprende il punto di sospensione, un sistema d'assi cartesiani $S(X\,Y\,Z)$ $[S \equiv P_{10}]$, tale da coincidere col sistema $\Omega(\xi\,\eta\,\zeta)$ quando il terreno è in quiete, definisco il moto sismico mediante le traslazioni ξ, η, ζ e mediante tre rotazioni infinitesime α, β, γ, con le quali si passa dal sistema $\Omega(\xi\,\eta\,\zeta)$ al sistema $S(X\,Y\,Z)$: chiamando poi λ_r, μ_r, ν_r le componenti della *rotazione apparente* del corpo C_r cioè le sue rotazioni (infinitesime) intorno agli assi X, Y, Z, valgono, a meno di quantità trascurabili, le eguaglianze

$$\pi_r = \alpha + \lambda_r, \text{ etc.} \tag{F}$$

In tal modo, notando che le variabili $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$ hanno in ogni istante un valore determinato, cioè che le loro variazioni arbitrarie sono costantemente nulle, si trova che l'equazione (7) si riduce alla forma

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, H_r\, \delta\lambda_r + K_r\, \delta\mu_r + L_r\, \delta\nu_r) = 0\,. \tag{8}$$

È naturale che il valore dei coefficienti H_r, K_r, L_r è sempre dato dalle equazioni (E), (E'), alle quali si devono intendere associate le (2) e le (4) per il calcolo dei binomi $(\xi_{ri} - \xi_{r0})$, ... e delle accelerazioni ξ''_{ri}, ... Volendo poi scindere gli elementi del moto sismico dagli elementi del modo apparente dei singoli corpi, basterà sostituire nelle (2) e nelle (4) in luogo di π_r, χ_r, ϱ_r i loro valori dati dalle (F).

Chimica. — *Sulla distinzione fra polimorfismo ed isomeria chimica.* Nota di Giuseppe Bruni, presentata dal Socio G. Ciamician.

La questione indicata nel titolo di questa breve Nota non formò finora oggetto di studî molto estesi nonostante l'interesse teorico che essa presenta. Essa viene ora rimessa di nuovo in campo da una recente pregevole pubblicazione di R. Wegscheider [1]. Questo autore comincia a porsi anzitutto la domanda se la distinzione fra i due concetti di polimorfismo (od isomeria fisica) ed isomeria chimica sia veramente giustificata. In base alla teoria atomica molecolare si possono dare dei due ordini di fenomeni definizioni soddisfacenti: attribuendo cioè l'isomeria ad una diversa costituzione o con-

[1] Wiener Monatshefte f. Chemie CXXII, 917 (1901).