ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 gennaio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

Sono ben note le identità algebriche fra i simboli di Riemann a quattro indici, nella teoria delle forme differenziali quadratiche. Non sembra invece che siano state ancora osservate le identità *differenziali* che li legano ai simboli di Christoffel a tre indici, di cui tratto nella presente Nota [1]. Queste formole, per sè notevoli, consentono un'immediata applicazione ad un bel teorema trovato da Schur [2] e da lui dimostrato per altra via.

1.

Indichiamo con

$$f = \sum_{r,s}^{1 \dots n} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

una forma differenziale quadratica negli n differenziali

$$dx_1, dx_2 \dots dx_n$$

delle variabili indipendenti $x_1, x_2 \dots x_n$, dove i coefficienti a_{rs} sono funzioni

(1) Ho stabilito queste identità nelle lezioni da me date nello scorso anno presso la Università di Pisa.

(2) *Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen.* (Math. Annalen Bd. 27).

finite e continue delle x (nel campo di variabilità che si considera), che ammettono derivate parziali fino al terzo ordine, tutte finite e continue. Si suppone inoltre che il discriminante

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

Con A_{rs} indichiamo il quoziente della divisione per a del complemento algebrico di a_{rs}. I simboli di Christoffel di prima specie sono definiti dalla formola

$$\text{(1)} \qquad \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right);$$

e quelli di seconda specie dall' altra

$$\text{(2)} \qquad \begin{Bmatrix} ik \\ \lambda \end{Bmatrix} = \sum_l^{1\dots n} A_{\lambda l} \begin{bmatrix} ih \\ l \end{bmatrix}.$$

Un simbolo di Riemann a quattro indici (rk, ih) è definito dalla formola

$$\text{(3)} \quad (rk, ih) = \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{bmatrix} ri \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{bmatrix} rh \\ k \end{bmatrix} + \sum_{\lambda,\mu}^{1\dots n} A_{\lambda\mu}\left\{\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}\right\}$$

È ben noto che fra i simboli di Riemann sussistono le identità date dalle formole seguenti:

$$\text{(4)} \quad (kr, ih) = -(rk, ih), (ih, rk) = (rk, ih), (rk, ih) + (ri, hk) + (rh, ki) = 0,$$

in virtù delle quali il numero di questi simboli distinti si riduce a

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Indicando ora con rk, ihl cinque indici qualunque presi nella serie 1, 2, ... n, dimostriamo che hanno luogo le seguenti identità differenziali:

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_l}(rk, ih) + \frac{\partial}{\partial x_i}(rk, hl) + \frac{\partial}{\partial x_h}(rk, li) = \sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix} ri \\ t \end{Bmatrix}(kt, lh) +$$

$$+ \sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix}(kt, il) + \sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix} rl \\ t \end{Bmatrix}(kt, hi) + \sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix} ki \\ t \end{Bmatrix}(rt, hl) + \sum_t\begin{Bmatrix} kh \\ t \end{Bmatrix}(rt, li) +$$

$$+ \sum_t\begin{Bmatrix} kl \\ t \end{Bmatrix}(rt, ih).$$

Si possono porre le identità precedenti sotto un'altra forma, introducendo con Christoffel [1] simboli *a cinque* indici $(rk\,,ihl)$ colla formola:

$$(\alpha)\qquad (rk\,,ihl)=\frac{\partial}{\partial x_l}(rk\,,ih)-\sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix}lr\\t\end{Bmatrix}(tk\,,ih)-\sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix}lk\\t\end{Bmatrix}(rt\,,ih)-$$
$$-\sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix}li\\t\end{Bmatrix}(rk\,,th)-\sum_t^{1\dots n}\begin{Bmatrix}lh\\t\end{Bmatrix}(rk\,,it),$$

ossia, come si esprime il Ricci, formando le derivate covarianti dei simboli Riemanniani, allora la (A) può scriversi sotto la forma equivalente:

$$(\mathrm{A}^*)\qquad (rk\,,ihl)+(rk\,,hli)+(rk\,,lih)=0\,.$$

È da osservarsi per altro che le (A), o le equivalenti (A*), si riducono a pure identità formali se $r=k$ ed anche se due dei tre indici i, h, l sono eguali.

2.

Per dimostrare la (A) cominciamo dall'osservare che le derivate delle $\mathrm{A}_{\lambda\mu}$ rispetto alle x si esprimono linearmente per le A stesse e pei simboli a tre indici di Christoffel colla formola:

$$(a)\qquad \frac{\partial \mathrm{A}_{\lambda\mu}}{\partial x_l}=-\sum_t^{1\dots n}\mathrm{A}_{\lambda t}\begin{Bmatrix}lt\\\mu\end{Bmatrix}-\sum_t^{1\dots n}\mathrm{A}_{\mu t}\begin{Bmatrix}lt\\\lambda\end{Bmatrix}.$$

E infatti indicando con $\varepsilon_{s\lambda}$ lo zero o l'unità, secondo che $s\neq\lambda$ o $s=\lambda$, si ha

$$\sum_i^{1\dots n}a_{si}\,\mathrm{A}_{\lambda i}=\varepsilon_{s\lambda}\,,$$

che derivata rapporto ad x_l porge

$$\sum_i^{1\dots n}a_{si}\frac{\partial \mathrm{A}_{\lambda i}}{\partial x_l}=-\sum_i^{1\dots n}\mathrm{A}_{\lambda i}\frac{\partial a_{si}}{\partial x_l}.$$

ossia

$$\sum_i^{1\dots n}a_{si}\frac{\partial \mathrm{A}_{\lambda i}}{\partial x_l}=-\sum_i^{1\dots n}\mathrm{A}_{\lambda i}\begin{bmatrix}sl\\i\end{bmatrix}-\sum_i^{1\dots n}\mathrm{A}_{\lambda i}\begin{bmatrix}il\\s\end{bmatrix}.$$

Moltiplicando questa per $\mathrm{A}_{s\mu}$ e sommando da $s=1$ a $s=n$ coll'osservare la (2), risulta appunto la (a). Ciò posto formando dalla (3) la

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(rk,ih),$$

[1] *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (Crelle's, Journal Bd. 70). V. § 6.

ed applicando la (a), troviamo dapprima:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(rk,ik)=\frac{\partial^2}{\partial x_h\,\partial x_l}\begin{bmatrix} ri \\ k \end{bmatrix}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_l}\begin{bmatrix} rh \\ k \end{bmatrix}+\sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}-\sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}-\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{\lambda,\mu,t}^{1\ldots n}A_{\lambda t}\begin{Bmatrix} lt \\ \mu \end{Bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}\right)+$$

$$+\sum_{\lambda,\mu,t}^{1\ldots n}A_{\mu t}\begin{Bmatrix} lt \\ \lambda \end{Bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}\right).$$

Trasformiamo ora le due ultime somme triple nel secondo membro col processo seguente, che indichiamo per esteso per uno dei termini, p. e. pel primo. Abbiamo per la (2)

$$\sum_{\lambda,\mu,t}^{1\ldots n}A_{\lambda t}\begin{Bmatrix} lt \\ \mu \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}=\sum_{\mu t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} lt \\ \mu \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ri \\ t \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}=\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ri \\ t \end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} lt \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix};$$

e similmente procedendo per gli altri termini delle somme triple, vediamo che, cangiando leggermente le notazioni per gli indici, si può scrivere:

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial x_l}(rk,ih)=\frac{\partial^2}{\partial x_h\,\partial x_l}\begin{bmatrix} ri \\ k \end{bmatrix}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_l}\begin{bmatrix} rh \\ k \end{bmatrix}+\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} ik \\ t \end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} rh \\ t \end{bmatrix}-\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ri \\ t \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} hk \\ t \end{bmatrix}-\sum_{t}\begin{Bmatrix} hk \\ t \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} ri \\ t \end{bmatrix}+$$

$$+\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ri \\ t \end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} lt \\ \lambda \end{bmatrix}+\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} hk \\ t \end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} ri \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} lt \\ \mu \end{bmatrix}-$$

$$-\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} lt \\ \lambda \end{bmatrix}-\sum_{t}^{1\ldots n}\begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix}\sum_{\lambda\mu}^{1\ldots n}A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} lt \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Ora, se in questa permutiamo una prima, poi una seconda volta, circolarmente gli indici i, h, l e le due formole ottenute addizioniamo colla (4) stessa, ne risulta appunto l'enunciata formola (A), *c. d. d.*

3.

Al § 7 della citata memoria del sig. Schur si trova stabilito il teorema: *Se la curvatura Riemanniana dello spazio, definito da*

$$ds^2=\sum_{i,k}^{1\ldots n}a_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

è costante attorno ad ogni singolo punto in qualunque orientazione, essa non può variare nemmeno da punto a punto, cioè lo spazio è a curvatura assolutamente costante.

Per dimostrare questo teorema Schur ha fatto uso di considerazioni geometriche sulle superficie geodetiche. Mi propongo qui di far vedere come si arriva direttamente al teorema stesso, applicando le identità (A).

Nella ipotesi che la curvatura Riemanniana K sia una funzione delle coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ del punto, ma indipendente dall' orientazione attorno al punto, per la formola stessa che dà la curvatura Riemanniana dovremo avere, per ogni quaderna di indici r, k, i, h, le relazioni

$$(rk, ih) = \mathrm{K}\,(a_{ri}\,a_{hk} - a_{rh}\,a_{ik})\,. \tag{5}$$

Ora partiamo dall' osservazione, d' immediata verifica, che le formole (A) risultano identicamente soddisfatte ponendovi in luogo dei simboli (rk, ih) di Riemann i corrispondenti minori del 2° ordine

$$a_{ri}\,a_{hk} - a_{rh}\,a_{ik}$$

del discriminante a. Ed invero, formando, secondo (α), le derivate covarianti di questi minori (che formano un sistema quadruplo covariante secondo le dominazioni del Ricci) si vede che esse sono identicamente nulle. Sostituendo nelle identità (A) pei simboli di Riemann i loro valori supposti (5), queste diventano:

$$(a_{ri}\,a_{hk} - a_{rh}\,a_{ik})\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_l} + (a_{rh}\,a_{lk} - a_{rl}\,a_{hk})\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_i} + (a_{rl}\,a_{ik} - a_{ri}\,a_{kl})\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_h} = 0\,.$$

Moltiplicando questa per A_{ri} e sommando da $r = 1$ a $r = n$ (col ricordare che i, h, l sono supposti diversi) si ha semplicemente

$$a_{hk}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_l} - a_{lk}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_h} = 0\,.$$

Se teniamo fissi h, l e diamo a k tutti i valori da 1 a n, *non* sussistendo le proporzioni:

$$a_{h1} : a_{h2} : \ldots : a_{hn} = a_{l1} : a_{l2} : \ldots a_{ln}$$

(giacchè a non è nullo), se ne trae

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_h} = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_l} = 0\,.$$

E poichè ciò vale per tutti i valori degli indici h, l, se ne deduce appunto

$$\mathrm{K} = \mathrm{cost}^{\mathrm{te}}\,,$$

ciò che dà il teorema di Schur.