ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

mità libera, ove ogni stria termina in un punto nodale sotto l'orlo sfrangiato. Questo ricorda l'orlo a spazzola delle cellule dei tuboli contorti del rene dei vertebrati; ma esso non è fatto di ciglia, bensì di sfrangiature protoplasmatiche, derivate dallo scoppio delle vescicole ripiene di muco.

Nel tubolo convoluto del terzo paio d'organi renali della prole aggregata della *Salpa zonaria* e della *Salpa maxima* la struttura dell'epitelio è simile a quella della *Salpa Tilesii*. Nella *Salpa democratica* e nella *Salpa fusiformis* si presentano alcune particolarità che mi riservo descrivere più tardi.

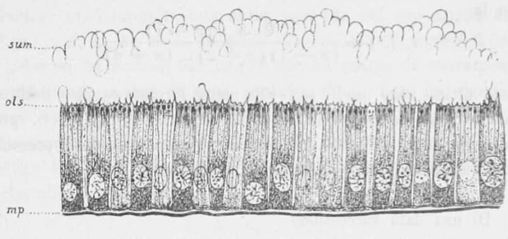

Fig. 8. — Epitelio cilindrico del tubolo convoluto del 3° paio degli organi renali della *Salpa Tilesii (prol. ag.)*.

mp. Membrana propria. — *ols*. Margine sfrangiato. — *sum*. Secreto uro-mucoso.

Intanto da quanto qui brevemente ho comunicato si può concludere che nelle Salpidi si ha la prova diretta dell'eliminazione dei principî specifici dell'urina per mezzo delle cellule dell'epitelio cilindrico degli organi renali, e si acquista la conoscenza del meccanismo, col quale il corpo protoplasmatico di queste cellule compie tale funzione.

Matematica. — *Sulle serie di fattoriali*. Nota II del Socio S. Pincherle.

In una Nota presentata all'Accademia nella seduta del 16 febbraio del corrente anno (1), ho preso a considerare le serie procedenti per funzioni della forma

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)},$$

e ne ho dato le condizioni di convergenza dipendentemente dalle variabili

(1) Quella Nota verrà qui citata con I, seguito dal numero del paragrafo.

x ed y, con qualche maggiore precisione di quanto si faccia ordinariamente [1].

Era necessario di fare precedere quelle considerazioni alle altre, di cui intendo ora occuparmi, di sviluppabilità di una funzione in serie di tal forma. Sono più particolarmente degne d'interesse (per le loro applicazioni, in special modo al calcolo delle differenze finite e allo studio delle relazioni fra le funzioni generatrici e le loro determinanti) le serie procedenti secondo le funzioni

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{1.2.3\dots n},$$

o secondo le

$$\eta_n(x) = \frac{1.2.3\dots(n-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Queste ultime sono quelle serie che hanno formato oggetto delle recentissime comunicazioni del sig. Nielsen all'Accademia di Parigi [2], già citate nella precedente nota; le prime, che formano l'argomento della presente Nota, danno pure luogo ad alcune interessanti osservazioni.

1. Di una data successione

$$c_0, c_1, c_2, \dots c_n, \dots \tag{1}$$

si dirà *caratteristica* il massimo limite k (I, § 1) di

$$\frac{\log|c_n|}{\log n}\text{ [3]};$$

la serie $\Sigma c_n n^{-\varrho}$ è assolutamente convergente per $R(\varrho) > k+1$ [4]; essa non è convergente per $R(\varrho) < k$.

Assumendo i numeri (1) a coefficienti della serie di fattoriali

$$\sum c_n \binom{x}{n}, \tag{2}$$

si possono presentare i seguenti casi:

[1] Il sig. Bendixson (Acta Math., T. II, pag. 24), ha già avuto occasione di distinguere, per serie procedenti secondo prodotti di fattori lineari, il campo di convergenza semplice da quello di convergenza assoluto.

[2] Comptes Rendus, 30 décembre 1901 et 20 janvier 1902. Sul medesimo argomento v. anche J. C. Kluyver nei medesimi Comptes Rendus, 10 mars 1902 e nel Nieuw Archief voor Wiskunde di Amsterdam: « Over de ontivikkeling van eene functie in eene faculteitenreeks » (S. II, T. IV, 1900).

[3] La caratteristica di (1), aumentata di un'unità, dà ciò che il sig. Hadamard (J. de Mathém., S. IV, T. VIII, 1892, pag. 170 e seg.; e *La série de Taylor*, nella raccolta *Scienzia*, Paris, C. Naud, 1901, pag. 459), chiama *ordine* della serie $\Sigma c_n z^n$ lungo il cerchio $|z| = 1$.

[4] $R(x)$ indica sempre la parte reale di x.

O si ha $k = -\infty$; la (2) appartiene allora alla prima classe (I, § 3); essa converge assolutamente ed uniformemente per tutti i valori finiti di x e rappresenta in tutto il piano una funzione intera.

O k è finito; in tal caso la (2) converge assolutamente ed uniformemente per $\mathrm{R}(x) > k$ e rappresenta per tali valori di x [1] un ramo ad un valore $\sigma(x)$ di funzione analitica monogena. La serie si riduce ad un numero finito di termini per $x = 0$ o per x intero positivo e rappresenta quindi, in ognuno di tali punti, un numero determinato; tuttavia questi punti **non si ascriveranno al campo di convergenza** della serie (2), ed i valori che essa assume nei punti stessi possono benissimo non essere quelli della funzione $\sigma(x)$ rappresentata dalla serie (2) nel suo campo di convergenza $\mathrm{R}(x) > k$, anche se la funzione $\sigma(x)$ esiste nel campo $\mathrm{R}(x) \leq k$.

O infine si ha $k = +\infty$: la (2) non ha campo di convergenza e non rappresenta quindi alcuna funzione analitica di x. Essa ha significato solo per $x = 0$ e per x intero positivo.

2. Qualunque sia quello dei tre casi ora considerati in cui si trova la serie (2), facendovi $x = 0, 1, 2, \dots n, \dots$ si otterrà sempre una successione determinata

$$b_0, b_1, b_2, \dots b_n, \dots \tag{3}$$

dove b_n è data da

$$b_n = c_0 + n c_1 + \binom{n}{2} c_2 + \cdots + c_n. \tag{4}$$

Inversamente, risolvendo le (4) rispetto a c_n, si otterrà immediatamente la successione (1), data che sia la (3), per mezzo della formula

$$c_n = b_n - n\, b_{n-1} + \binom{n}{2} b_{n-2} - \cdots + (-1)^n b_0, \tag{5}$$

che, mediante la notazione usuale del calcolo delle differenze finite, può anche scriversi

$$c_n = \Delta^n b_0.$$

Sia ora data una funzione analitica $f(x)$ regolare per ogni valore $\mathrm{R}(x) \geq 0$, e si formi la successione

$$\Delta^n f(0).$$

Se questa ammette una caratteristica k che non sia $+\infty$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n f(0) \binom{x}{n}$$

[1] Che si diranno costituire il campo di convergenza della serie.

convergerà assolutamente ed uniformemente per $\mathrm{R}(x) > k$, e la differenza

$$f(x) - \sum \Delta^n f(0) \binom{x}{n} \tag{6}$$

rappresenterà, per ogni $\mathrm{R}(x)$ maggiore del maggiore fra i numeri 0 e k, una funzione analitica regolare, nulla nei punti

$$x = \mathrm{E}(k) + 1\,, \qquad \mathrm{E}(k) + 2\,, \ldots,$$

essendo $\mathrm{E}(k)$ il massimo intero contenuto in k.

L' espressione (6) è nulla per $x = 0, 1, 2, \ldots \mathrm{E}(k)$, anche se è $\mathrm{E}(k) \geq 0$, sebbene per $\mathrm{R}(x) \leq k$ essa espressione (6) non rappresenti una funzione analitica.

Può accadere che la differenza (6) sia identicamente nulla: in tal caso la funzione $f(x)$ sarà sviluppabile in serie di fattoriali $\binom{x}{n}$, e se ne conclude intanto che è

« condizione necessaria a che una funzione $f(x)$ sia sviluppabile in serie « di fattoriali, che la caratteristica di $\Delta^n f(0)$ non sia $+\infty$. »

Si può aggiungere ancora che

« condizione necessaria a che una funzione $f(x)$ trascendente intera sia « rappresentabile in tutto il piano da una serie di fattoriali $\binom{x}{n}$, è che la « caratteristica di $\Delta^n f(0)$ sia $-\infty$. »

3. Le considerazioni precedenti conducono naturalmente a chiedere se possono esistere sviluppi dello zero in serie di fattoriali, e di conseguenza, se per una stessa funzione possono esistere più sviluppi di tale forma. L' esistenza di sviluppi dello zero è stata dimostrata dal Frobenius ([1]) per le serie procedenti secondo funzioni della forma

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n);$$

egli considera più particolarmente il caso in cui $\Sigma |a_n|$ è convergente, ma pure accennandoli, nel § 7 della sua Memoria, per altri casi e in particolare per quello di serie di fattoriali, non costruisce effettivamente, per questo caso, i detti sviluppi dello zero.

Tali sviluppi si possono ottenere direttamente dalle relazioni che abbiamo dal § precedente, nel seguente modo, del tutto elementare.

Dapprima, non può esistere uno sviluppo dello zero

$$\sigma(x) = \sum c_n \binom{x}{n} = 0 \tag{7}$$

([1]) Crelle, Bd. LXXIII, pag. 7 (1871).

in cui la caratteristica k di c_n sia negativa, a meno che tutte le c_n non siano nulle. Infatti, se ciò fosse, i punti $x=0,1,2,\dots n,\dots$ cadrebbero nel campo di convergenza di (7), e sarebbe pertanto $b_0=b_1=\dots=b_n=0$, da cui, per le (5), $c_0=c_1=\cdots=c_n=0$.

Può invece esistere uno sviluppo (7) in cui la caratteristica di c_n sia nulla. In tal caso, $x=0$ cadendo al contorno del campo di convergenza di (7), può b_0 essere differente da zero, e siccome è ammissibile in (7) la presenza di un moltiplicatore arbitrario costante, si può supporre senza restrizione $b_0=1$, da cui $c_n=(-1)^n$.

Si giunge così alla serie

$$\sigma_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{x}{n}.$$

Ora questa rappresenta effettivamente lo zero per ogni $R(x)>0$: ciò risulta dalla nota formola [1]

$$\frac{1}{x-y}=-\frac{1}{y-1}-\frac{x-1}{(y-1)(y-2)}-\frac{(x-1)(x-2)}{(y-1)(y-2)(y-3)}-\cdots$$

valida per $R(x)>R(y)$; facendovi $y=0$, se ne deduce

$$\sigma_0(x)=1-x+\binom{x}{2}-\binom{x}{3}+\cdots=0.$$

Dato un numero positivo k, cerchiamo finalmente se possa esistere uno sviluppo dello zero dato da una serie (7) in cui k sia la caratteristica del sistema c_n dei coefficienti. Sia $m-1$ il massimo intero contenuto in k; i punti $x=0,1,\dots m-1$ non apparterranno allora al campo di convergenza della (7), e quindi si potranno fissare arbitrariamente le $b_0, b_1, \dots b_{m-1}$, mentre saranno nulle le b_n per $n\geqq m$. Ne viene dalle (5),

$$c_n=(-1)^n\left(b_0-n\,b_1+\binom{n}{2}b_2-\cdots+(-1)^{m-1}\binom{n}{m-1}b_{m-1}\right).$$

La serie (7) formata con questi coefficienti essendo una combinazione lineare a coefficienti costanti delle m serie

$$(8)\qquad \sigma_r(x)=\sum_{n=r}^{\infty}(-1)^n\binom{n}{r}\binom{x}{n},\qquad (r=0,1,\dots m-1),$$

dove i coefficienti hanno per caratteristica r, ne viene che k deve essere uguale precisamente ad $m-1$, cioè ad un numero intero. Di più, si verifica che ognuna delle serie $\sigma_r(x)$ rappresenta effettivamente lo zero per $R(x)>r$,

[1] V. p. es. Bendixson, Mem. cit., pag. 7.

poichè si ha immediatamente

$$\sigma_r(x) = (-1)^r \binom{x}{r} \sigma_0(x-r) \text{ (}^1\text{)}.$$

Esistono dunque, per ogni intero $m-1$, infinite serie (7) convergenti uniformemente ed assolutamente e rappresentanti lo zero per ogni $\mathrm{R}(x) > m-1$; queste serie sono combinazioni lineari

$$b_0\,\sigma_0(x) + b_1\,\sigma_1(x) + \cdots + b_{m-1}\,\sigma_{m-1}(x)\,, \tag{9}$$

a coefficienti $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$ arbitrarî, delle serie (8).

Non può esistere uno sviluppo dello zero avente $\mathrm{R}(x) > m-1$ per campo di convergenza che non sia della forma (9); abbiasi infatti un tale sviluppo

$$\bar{\sigma}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n \binom{x}{n};$$

deve essere intanto

$$c'_0 + n\,c'_1 + \binom{n}{2} c'_2 + \cdots + c'_n = 0 \quad \text{per } n \geq m\,;$$

posto poi

$$b'_0 = c'_0\,,\; b'_1 = c'_0 + c'_1\,, \ldots\; b'_{m-1} = c'_0 + m\,c'_1 + \binom{m}{2} c'_2 + \cdots + c'_{m-1}\,,$$

si vede subito che la serie

$$b'_0\,\sigma_0(x) - b'_1\,\sigma_1(x) + \cdots + (-1)^{m-1}\, b'_{m-1}\,\sigma_{m-1}(x)$$

coincide colla $\bar{\sigma}(x)$ in tutti i suoi coefficienti.

Risulta da quanto precede che se una funzione $\psi(x)$ ammette uno sviluppo $s(x)$ in serie di fattoriali col campo di convergenza $\mathrm{R}(x) > a$, essa non ne ammette altri convergenti in quel campo se è $a < 0$, mentre se è $a \geq 0$, essa ammette nel campo medesimo lo sviluppo più generale

$$s_1(x) = s(x) + b_0\,\sigma_0(x) + b_1\,\sigma_1(x) + \cdots b_{m-1}\,\sigma_{m-1}(x)\,, \tag{10}$$

essendo $m-1$ il massimo intero contenuto in a; e se m' è un intero maggiore di $m-1$, ammette nel campo $\mathrm{R}(x) > m'$ lo sviluppo

$$s_2(x) = s_1(x) + b_m\,\sigma_m(x) + b_{m+1}\,\sigma_{m+1}(x) + \cdots + b_{m'}\,\sigma_{m'}(x):$$

le $b_0, b_1, \ldots b_{m'}$ essendo costanti arbitrarie.

Infine, se una funzione uniforme o un ramo uniforme di funzione $\psi(x)$ ha significato per tutto il semipiano $\mathrm{R}(x) \geq 0$, ma è rappresentata da una

(1) Per i punti $0, 1, \ldots r-1, r$ posti fuori o al contorno del campo di convergenza la $\sigma_r(x)$ ha rispettivamente i valori $0, 0, \ldots 0, (-1)^r$.

serie $s(x)$ di fattoriali solo nel campo $\mathrm{R}(x) > a > 0$, si potrà, considerando la serie (10) $s_1(x)$ più generale che rappresenta la funzione stessa in quel campo, giovarsi dell' indeterminazione delle costanti $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$, per fare in modo che i valori assunti da $s_1(x)$ nei punti $0, 1, \ldots m-1$, sebbene fuori del campo di convergenza della $s_1(x)$ stessa, coincidano coi valori $\psi(0), \psi(1), \ldots \psi(m-1)$ della funzione; basta evidentemente fare

$$b_r = (-1)^r (\psi(r) - s(r)) \ , \ r = 0, 1, 2, \ldots m-1 \, .$$

4. Accanto ad una serie di fattoriali

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}$$

si consideri la serie di potenze $\varphi(t)$ di t^{-1}, formata colla stessa successione di coefficienti, in modo che a $t^{-(n+1)}$ sia dato il coefficiente di $\binom{x}{n}$. La successione c_n avendo per caratteristica un numero k che non è l' infinito positivo, la serie $\varphi(t)$ convergerà fuori di un cerchio $t = 0$ e di raggio generalmente uguale all' unità, ma che nel caso di $k = -\infty$ potrà anche essere minore. Diremo che la serie $\varphi(t)$ ammette la caratteristica k.

Fra le due serie $s(x)$, $\varphi(t)$, si viene in tal modo a stabilire una corrispondenza che si indicherà mediante la scrittura

$$s(x) = \mathrm{A}(\varphi(t)) \, ,$$

dove il simbolo A sta a rappresentare un' operazione, manifestamente distributiva, che può venire applicata formalmente ad ogni serie di potenze di t^{-1}

$$\varphi(t) = \sum \frac{c_n}{t^{n+1}} \, ,$$

ed il cui risultato ha significato, se la caratteristica di c_n è k, per $\mathrm{R}(x) > k$. Si aggiungerà l' ipotesi che l' operazione A dia come risultato lo zero qualora venga applicata ad una potenza intera positiva o nulla di t.

Per l' operazione A si verificano immediatamente le due seguenti proprietà:

Se $\varphi'(t)$ è la derivata di $\varphi(t)$, si ha, per $\mathrm{R}(x) > k+1$:

(11) $$\mathrm{A}(\varphi') = -x\, s(x-1) \, ;$$

si ha inoltre:

(12) $$\mathrm{A}((1+t)\,\varphi(t)) = s(x+1) \, .$$

5. Si tratta ora di dare un' espressione analitica effettiva per l' operazione A. Cominceremo coll' esaminare il caso di $k < -1$, in cui l' espressione di A si troverà senza difficoltà. Infatti, in questo caso, $\varphi(t)$ è assolu-

tamente ed uniformemente convergente lungo la circonferenza di centro $t=0$ e di raggio 1; pertanto nell'integrale

$$(13) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \varphi(t)\,(1+t)^x\,dt\,,\ \mathrm{R}(x) > 0\,,$$

esteso a questa circonferenza, l'integrazione si può eseguire termine a termine e come risultato si ottiene immediatamente la serie $s(x)$. Onde:

Per le serie $\varphi(t)$ aventi una caratteristica minore di -1, l'operazione $\mathrm{A}(\varphi)$ è, per $\mathrm{R}(x)>0$, rappresentata dall'integrale definito (13).

La (13), applicata ad una potenza intera positiva o nulla di t, dà zero come risultato.

Le serie $\varphi(t)$ per le quali si realizza in tal modo l'operazione A, formano un insieme lineare, cui si può aggiungere un numero arbitrario di potenze intere positive di t, ed anche una serie di potenze intere positive di t purchè convergente in un cerchio di centro $t=0$ e di raggio maggiore d'uno. Per queste serie $\varphi(t)$, si verifica immediatamente che l'operazione A, espressa per $\mathrm{R}(x)>0$ da

$$(14) \qquad \mathrm{A}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \varphi(t)\,(1+t)^x\,dt\,,$$

soddisfa alle relazioni (11) e (12), la prima sotto la condizione $\mathrm{R}(x)>1$, la seconda per $\mathrm{R}(x)>0$.

6. Conviene ora ricercare se, anche per il caso in cui sia $k \geq -1$, sia possibile una rappresentazione analitica per l'operazione A. A tale uopo ci servirà un principio che, sebbene abbia già trovate numerose applicazioni in varî campi dell'analisi, non pare sia stato ancora enunciato nella sua generalità. Questo principio è il seguente:

Siano A, K due operazioni univocamente definite per gli elementi di un insieme C; sia G la trasformata di K mediante A. Se φ appartiene a C, e vi appartiene anche $\mathrm{K}(\varphi)$, si avrà per definizione

$$\mathrm{AK}(\varphi) = \mathrm{GA}(\varphi)\,,$$

onde

$$(15) \qquad \mathrm{G}^{-1}\,\mathrm{AK} = \mathrm{A}\,.$$

Supponiamo ora che φ appartenga ad un campo C′ che comprende C, ma non necessariamente a C stesso; che K sia applicabile a φ, e che $\mathrm{K}(\varphi)$ appartenga a C. Sotto questa ipotesi, il primo membro della (15) *si potrà assumere come definizione dell'operazione A* per gli elementi dell'insieme più esteso C′, e si verificherà in generale che l'operazione A, così estesa, mantiene nel nuovo campo le sue proprietà formali.

Il principio ora enunciato è quello che viene applicato in sostanza nella continuazione analitica secondo il Weierstrass; nel classico teorema di Mittag-Leffler per la costruzione di una funzione uniforme con date singolarità; nella sommabilità delle serie secondo il Borel e nei varî tentativi fatti per l'interpretazione delle serie divergenti; nell'integrazione finita, data dal Guichard, di una funzione trascendente intera, ecc. Di questo principio ci gioveremo ora per ottenere l'espressione analitica dell'operazione A per tutte le serie $\varphi(t)$ appartenenti a caratteristica finita.

7. Da ogni serie di potenze di t^{-1}

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{t^{n+1}}$$

si può dedurre la serie

$$\mathrm{K}_m(\varphi) = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)\,t^{n+1}};$$

questa deduzione è fatta mediante un'operazione distributiva che diremo K_m, la quale non è altro che la $\mathrm{D}^{-m}\frac{1}{t^m}\varphi$, dove D è il simbolo di derivazione, quando si facciano nulle le costanti introdotte dall'integrazione. L'operazione K_m ha evidentemente la proprietà di diminuire di m unità la caratteristica cui appartiene φ; se φ ha la caratteristica k, $\mathrm{K}_m(\varphi)$ avrà la caratteristica $k-m$.

Sia φ una tale serie di potenze che le sia applicabile l'operazione A definita al § 4; essa operazione sarà a fortiori applicabile alla serie $\mathrm{K}_m(\varphi)$: si vuole vedere quale sia la trasformata di K_m mediante A. Usando, a questo uopo, i soliti simboli del calcolo delle differenze finite Δ e θ [1], si deduce dalla proprietà (12) della A, che se $\mathrm{A}(\varphi) = s(x)$, sarà:

$$\mathrm{A}(t\varphi(t)) = \Delta\, s(x)\,, \quad \mathrm{A}(t^{-1}\varphi(t)) = \Delta^{-1} s(x)\,,$$

e dalla (11), che

$$\mathrm{AD}^{-1}\varphi(t) = -\frac{1}{x+1}\,\theta\, s(x)\,.$$

Ne viene

$$\mathrm{AD}^{-m}\left(\frac{1}{t^m}\varphi(t)\right) = \frac{(-1)^m}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}\,\theta^m \Delta^{-m} s(x)$$

e quindi la trasformata G_m di K_m mediante A è

$$\mathrm{G}_m = \frac{(-1)^m}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}\,\theta^m \Delta^{-m},$$

[1] $\Delta\psi(x) = \psi(x+1) - \psi(x)$; $\theta\psi(x) = \psi(x+1)$; Δ^{-1} è l'operazione d'integrazione finita, o inversa di Δ.

onde

$$G_m^{-1} = (-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}.$$

Con ciò, la (15) ci dà

$$A = (-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,AK_m. \tag{16}$$

Ora, se $\varphi(t)$ è una serie di caratteristica minore di -1, le si può applicare, per $R(x) > 0$, l'operazione A rappresentata dall'integrale definito (14), e la (16) non è altro che una semplice identità. Invece, se $\varphi(t)$ ha una caratteristica $k \geq -1$, sia $m-2$ il massimo intero contenuto in k; la serie $K_m(\varphi)$ avrà per caratteristica un numero minore di -1 e le sarà quindi applicabile per $R(x) > 0$ l'operazione A sotto forma d'integrale definito, ottenendosi

$$AK_m\,\varphi = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \binom{x}{n};$$

da cui

$$(-1)^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,AK_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n+m},$$

e infine, poichè $\Delta\binom{x}{n} = \binom{x}{n-1}$:

$$(-1)^m \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1)\,\theta^{-m}\,AK_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}.$$

L'operazione A definita dalla (16), cioè data, per $R(x) > m$, da

$$A(\varphi) = \frac{(-1)^m}{2\pi i} \Delta^m x(x-1)\dots(x-m+1) \int_{(1)} D^{-m}\left(\frac{1}{t^m}\varphi(t)\right)(1+t)^{x-m}\,dt. \tag{17}$$

coincide dunque coll'operazione A definita in principio del § 4 per ogni serie $\varphi(t)$ avente caratteristica k finita, e quindi per ogni tale serie l'operazione A ivi definita ammette l'espressione analitica (17), dove m è il massimo intero contenuto in k aumentato di 2, se è $k \geq -1$, ed è zero se è $k < -1$.

In questo modo, ad ogni serie di fattoriali $s(x)$ della prima o della seconda classe corrisponde una funzione analitica $\varphi(t)$ regolare nell'intorno di $t = \infty$, che si costruisce immediatamente e mediante la quale si ha l'espressione analitica (17) della $s(x)$.

È facile vedere che a $\varphi(t) = (1+t)^{-m}$ per un intero positivo, la (17) fa corrispondere gli sviluppi dello zero già ottenuto per altra via al § 3.

Ad ogni proprietà di carattere lineare della $\varphi(t)$, le relazioni (11) e (12) cui soddisfa l'operazione A fanno corrispondere proprietà pure di carattere lineare per la $s(x)$. Di questa corrispondenza, della sua applicazione alle equazioni alle differenze, come pure del significato da attribuire alle serie $s(x)$ della terza classe, tratterò in una prossima Nota.