ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

Meccanica. — *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano.* Nota II di E. DANIELE, presentata dal Socio VOLTERRA.

6. Facendo seguito alla Nota pubblicata col medesimo titolo nel fascicolo precedente dei Rendiconti di questa R. Accademia, osserveremo che *il calcolo della funzione θ, che ci dà, eguagliata ad una costante, tutte le traiettorie del punto, richiede,* come risulta dalle formole (8) e (9), *due sole quadrature.* È un risultato che dovevamo attenderci, appena si fosse osservato quali sono le superficie per cui il problema delle geodetiche equivale a quello delle traiettorie nel nostro movimento piano. L'elemento lineare di queste superficie è dato, come è noto, da

$$ds^2 = 2U\,(dx^2 + dy^2)\,;$$

calcolandone la curvatura totale K, si trova

$$K = -\frac{1}{2U}\,\Delta_2 \lg U = 0\,.$$

Il problema di movimento che abbiamo studiato nel piano equivale dunque alla ricerca delle geodetiche sopra una superficie sviluppabile: ora si sa appunto che sopra una tale superficie le geodetiche si ottengono con due quadrature.

A completare la risoluzione del problema meccanico manca il calcolo del tempo. A questo riguardo il metodo di Jacobi non si può più, nel caso attuale, applicare. Ed invero si dovrebbe, secondo Jacobi, calcolare la derivata di θ rispetto ad h (cost. delle forze vive) supposto di averla lasciata indeterminata in θ, ed il tempo verrebbe allora dato da

$$t_0 - t = \frac{\partial\theta}{\partial h}\,.$$

Ma siccome noi abbiamo posto fin dal principio $h = 0$, così in θ il parametro h non figura affatto. Ad ogni modo per avere il tempo non vi sarà che da eseguire una quadratura, dal momento che si conoscono tutte le traiettorie.

7. Applicheremo la teoria precedente allo studio del moto di un punto attratto (o respinto) da un centro fisso. Bisognerà anzitutto vedere quale sia la forma della funzione potenziale nel caso da noi considerato, in cui le traiettorie del punto si possono distribuire in infiniti sistemi ortogonali isotermi.

Poichè nell'ipotesi delle forze centrali la funzione potenziale dipende soltanto dalla distanza del punto mobile dal punto fisso, indicando con r

questa distanza, e posto

$$U = f(r),$$

occorrerà determinare $f(r)$ in modo che si abbia

$$\Delta_2 \lg f(r) = 0,$$

equazione che sviluppata diventa

$$\frac{d^2}{dr^2} \lg f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \lg f(r) = 0.$$

Da questa con una prima integrazione otteniamo

$$\frac{d}{dr} \lg f(r) = \frac{c}{r},$$

ed integrando una seconda volta si ha

$$U = f(r) = Cr^c: \tag{12}$$

c e C sono due costanti arbitrarie.

La forza applicata sarebbe poi di intensità

$$F = Ccr^{c-1}.$$

Adunque: *nel moto di un punto soggetto a forze centrali si potranno distribuire le traiettorie in infiniti sistemi ortogonali (isotermi) quando la funzione potenziale (e quindi anche la forza applicata) è proporzionale ad una potenza, del resto qualunque, della distanza del punto mobile dal punto fisso.*

Troviamo ora l'equazione in termini finiti delle traiettorie. Si ha dalla (12):

$$\frac{\partial \lg U}{\partial x} = \frac{cx}{r^2}, \quad \frac{\partial \lg U}{\partial y} = \frac{cy}{r^2},$$

onde

$$\int \left(\frac{\partial \lg U}{\partial x} dy - \frac{\partial \lg U}{\partial y} dx \right) = c \int \frac{xdy - ydx}{r^2} = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

e quindi le (8) diventano:

$$\theta_1 = K r^{k-1} \operatorname{sen} \left\{ a + (k-1) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right\}$$

$$\theta_2 = K r^{k-1} \cos \left\{ a + (k-1) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right\},$$

avendo posto

$$c = 2(k-1), \quad \sqrt{2C} = K. \tag{13}$$

Per ottenere θ converrà riferirsi a coordinate polari, assumendo

$$x = r\cos\omega\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\omega\,,$$

ed in conseguenza

$$dx = \cos\omega\,dr - r\,\mathrm{sen}\,\omega\,d\omega\,, \qquad dy = \mathrm{sen}\,\omega\,dr + r\cos\omega\,d\omega\,;$$

per cui si avrà

$$\theta = \mathrm{K}\int r^{k-1}\{\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\,dr + r\cos(a+k\omega)\,d\omega\}\,. \tag{14}$$

8. Supponiamo dapprima $k \neq 0$. Eseguendo la quadratura nella (14) abbiamo

$$\theta = \frac{\mathrm{K}}{k}\,r^k\,\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\,;$$

l'equazione delle traiettorie $\theta = \text{cost.}$ diventa dunque

$$r^k\,\mathrm{sen}\,(a+k\omega) = b\,, \tag{15}$$

dove a e b sono costanti arbitrarie (cioè variano da una traiettoria all'altra), mentre k è fissa per tutte queste curve, potendo però avere un valore qualunque diverso da zero.

Accanto all'equazione (15) delle traiettorie scriviamo anche le espressioni della funzione potenziale e della forza, sostituendo, mediante le (13), la costante k a c:

$$\mathrm{U} = \mathrm{C}\,r^{2(k-1)}\,, \qquad \mathrm{F} = 2\mathrm{C}\,(k-1)\,r^{2k-3}\,.$$

Per avere infine il tempo si ricorrerà all'integrale delle forze vive

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\mathrm{U}\,,$$

che si scrive, nel caso attuale,

$$\frac{dr^2 + r^2 d\omega^2}{dt^2} = 2\mathrm{C}\,r^{2(k-1)}\,.$$

Questa equazione si può trasformare, mediante la (15), in una relazione fra dt, $d\omega$, ω, oppure fra dt, dr, r, e così si ottiene il tempo con una sola quadratura dall'una o dall'altra delle seguenti due formole:

$$dt = \frac{m\,d\omega}{\{\mathrm{sen}\,(a+k\omega)\}^{\frac{2}{k}}} = \frac{n\,r\,dr}{\sqrt{r^{2k} - b^2}}$$

dove m e n contengono la costante arbitraria b.

Suppongasi, ad es., $k = \frac{1}{2}$; la funzione potenziale diventa

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{C}}{r}\,,$$

e siamo nel caso dell'attrazione Newtoniana. Le traiettorie hanno per equazione

$$\sqrt{r}\,\mathrm{sen}\,(a+\frac{\omega}{2})=b\,,$$

ovvero

$$r=\frac{2\,b^2}{1-\cos\,(2\,a+\omega)}$$

e sono parabole col fuoco nel punto attraente, come dovevamo attenderci. Si ha pure il significato delle costanti a e b: quest'ultima determina il parametro delle varie parabole, mentre la prima definisce l'inclinazione del loro asse sull'asse polare.

Questo esempio ci ha così condotti a trovare un sistema ortogonale isotermo composto di sole parabole: esso è formato di tutte le parabole aventi lo stesso fuoco e lo stesso asse; quelle dell'una famiglia volgono tutte la concavità da una stessa parte, quelle dell'altra famiglia volgono la concavità dalla parte opposta. Facendo poi rotare tutto il sistema di un giro completo intorno al fuoco, si avranno tutte le traiettorie di un punto attratto (o respinto) da un punto fisso colla legge di Newton, quando la costante delle forze vive sia nulla.

9. Consideriamo da ultimo il caso in cui sia $k=0$. La (14) allora diventa

$$\theta=\mathrm{K}\int\frac{1}{r}\,(\mathrm{sen}\,a\,dr+r\cos a\,d\omega)\,,$$

e integrando, si ha come equazione delle traiettorie $\theta=\mathrm{cost.}$:

$$\mathrm{sen}\,a\,\lg r+\omega\cos a=b\,,$$

ovvero

$$r=e^{\frac{b}{\mathrm{sen}\,a}}\,e^{-\omega\,\mathrm{cotg}\,a}\,.$$

Esse sono dunque spirali logaritmiche, e se ne ottiene un sistema isotermo tenendo fissa la costante a e facendo variare b. Le curve di questo sistema sono tutte eguali fra di loro, e quelle di una medesima famiglia non differiscono l'una dall'altra che per una rotazione intorno al polo. Fra gli altri sistemi isotermi si avrà pure quello formato dalle rette per il polo ($a=0$) e dalle circonferenze col centro in questo medesimo punto $\left(a=\frac{\pi}{2}\right)$.

La funzione potenziale e la forza in questo movimento sono

$$\mathrm{U}=\frac{\mathrm{C}}{r^2}\,,\quad \mathrm{F}=-\frac{2\mathrm{C}}{r^3}\,,$$

e il tempo è dato da

$$t - t_0 = \mathrm{M}\,(e^{-2\omega \cot g\, a} - e^{-2\omega_0 \cot g\, a}) = \mathrm{N}\,(r^2 - r_0^2)\,,$$

dove s'è posto

$$\mathrm{M} = -\mathrm{N}\, e^{\frac{2b}{\operatorname{sen} a}}\,,\quad \mathrm{N} = \frac{1}{2\sqrt{2\mathrm{C}}\cos a}$$

e quindi M e N dipendono la prima dai parametri a e b, la seconda soltanto da a.

Geodesia. — *Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut eseguite a Roma (S. Pietro in Vincoli), a M. Cimino ed a M. Peglia negli anni 1900 e 1901.* Nota del prof. V. Reina, presentata dal Socio A. Ferrero.

In alcune Note, inserite nei Rendiconti di questa Accademia, venne già reso conto delle operazioni astronomiche eseguite sui punti trigonometrici di primo ordine circostanti a Roma, allo scopo di determinarvi l'attrazione locale. I risultati conseguiti mi indussero ad estendere la ricerca ai punti della rete trigonometrica che cadono in prossimità del meridiano di Roma, per determinare il profilo del Geoide lungo il meridiano stesso.

La necessità di trasportare gli strumenti in punti sempre più lontani, e di difficile accesso, mi persuase a semplificare quanto più fosse possibile i procedimenti di osservazione, ed in particolare a ricercare se il metodo di determinazione della latitudine colla misura delle distanze zenitali meridiane di stelle fondamentali culminanti a Nord ed a Sud dello zenit, non potesse venire vantaggiosamente sostituito a quello precedentemente impiegato, delle osservazioni circummeridiane. Oltre ad una grande riduzione nei calcoli, ne sarebbe conseguita una notevole semplificazione nell'impianto della stazione, potendo sopprimere l'uso del cronografo.

Nell'ottobre e novembre 1900 tale metodo venne perciò assoggettato ad un esame dettagliato e minuto nella Specola di S. Pietro in Vincoli, risultandone in me la convinzione che esso sia da preferirsi a quello classico delle osservazioni circummeridiane, quando venga usato colle dovute avvertenze e cautele. In tale occasione venne anche effettuata una determinazione dell'azimut di M. Mario rispetto alla Specola.

Nel luglio ed agosto 1901 si eseguirono le due stazioni di M. Cimino e M. Peglia, che si presentano successivamente lungo il meridiano al nord di M. Soratte. A M. Peglia, come nuovo controllo del metodo dei passaggi meridiani, la latitudine venne determinata anche con osservazioni circummeridiane.