

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

STAZIONE	Latitudine		Azimut				Epoca
	astronomica φ_a	geodetica φ_g	astronomico A_a	geodetico A_g	$\varphi_a - \varphi_g$	$A_a - A_g$	
M. Pisarello	41° 28' 36".03	36".24	15° 28' 57".07	58".96	-0".21	-1".89	1899.5
M. Cavo	41. 45. 03. 42	2. 12	+1. 30	1898.5
Fiumicino	41. 46. 14. 59	12. 86	47. 29. 36. 67	38. 57	+1. 73	-1. 90	1898.6
S. Pietro in Vincoli.	41. 53. 35. 37	33. 39	315. 20. 19. 42	21. 11	+1. 98	-1. 69	1900.8
M. Mario	41. 55. 26. 25	24. 38	131. 50. 32. 29	33. 08	+1. 87	-0. 79	1898.3
M. Soratte	42. 14. 46. 38	40. 76	186. 36. 58. 56	61. 48	+5. 62	-2. 92	1900.5
M. Cimino	42. 24. 31. 09	24. 75	125. 53. 57. 49	59. 72	+6. 34	-2. 23	1901.5
M. Peglia	42. 49. 09. 36	2. 73	180. 51. 52. 36	54. 34	+6. 63	-1. 98	1901.6

Le coordinate geodetiche, calcolate dall'Istituto Geografico Militare, provengono dal segnale trigonometrico di Castanea. L'ellissoide di riferimento ha le dimensioni di Bessel.

Per rendere fra loro confrontabili le deviazioni in latitudine ed azimut determinate in corrispondenza ad epoche diverse, converrebbe ancora ridurle alla posizione media del Polo. Ma ciò non si può fare per le determinazioni posteriori alla fine del 1899, ancora non essendo stato pubblicato dal *Centralbureau der Internationalen Erdmessung* il relativo rapporto cogli elementi di riduzione. Il precedente specchio basta però per mostrare qual è l'andamento generale della verticale. Mentre la deviazione in azimut si conserva pressochè costante, la deviazione in latitudine va aumentando, procedendo verso il Nord, rivelando una progressiva depressione del Geoide al di sotto dell'ellissoide di riferimento.

È mia intenzione, nella prossima stagione estiva, spingendomi ancora al Nord, di eseguire le stazioni di Alta S. Egidio (Toscana), M. Carpegna (Marche) e Bertinoro (Romagna), e di pervenire quindi alla valle del Po, superando l'Appennino.

La redazione di un lavoro completo e dettagliato, che renda conto del complesso delle operazioni eseguite lungo il meridiano di Roma, si rimetterà all'epoca in cui saranno compiuti i calcoli relativi alle nuove stazioni.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota II del dott. M. CONTARINI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

In una Nota precedente ⁽¹⁾ ho stabilita l'equazione simbolica dei lavori virtuali relativa a una catena di corpi rigidi, fissati, almeno per un punto, il primo al terreno e gli altri ciascuno al precedente: ora, applicando i risultati ottenuti, mi propongo di studiare il caso particolare di due corpi soli, cercando specialmente di trarre quelle conseguenze che possono avere appli-

(¹) V. seduta del 4 maggio, pag. 380.

cazione nella teoria matematica degli strumenti sismici. — Per ciò che riguarda il significato delle lettere e dei simboli che verranno usati in appresso, mi riferisco senz'altro al lavoro testè citato.

6. Dalla equazione (8) si ricava per il caso attuale l'equazione

$$(9) \quad \sum_r^2 (H_r \delta \lambda_r + K_r \delta \mu_r + L_r \delta \nu_r) = 0,$$

essendo (vedi le equazioni (E) (E') a pag. 385).

$$(G) \quad \left\{ \begin{aligned} H_1 &= \sum_{C_1} (\eta_{2i} - \eta_{10}) (Z_{2i} - m_{2i} \zeta''_{2i}) + (\eta_{11} - \eta_{10}) \sum_{C_2} (Z_{2i} - m_{2i} \zeta''_{2i}) \\ &\quad - \sum_{C_1} (\zeta_{1i} - \zeta_{10}) (H_{1i} - m_{1i} \eta''_{1i}) - (\zeta_{11} - \zeta_{10}) \sum_{C_2} (H_{2i} - m_{2i} \eta''_{2i}), \text{ etc.} \\ H_2 &= \sum_{C_2} (\eta_{2i} - \eta_{20}) (Z_{2i} - m_{2i} \zeta''_{2i}) - \sum_{C_2} (\zeta_{2i} - \zeta_{20}) (H_{2i} - m_{2i} \eta''_{2i}), \text{ etc.} \end{aligned} \right.$$

Come fu già osservato, queste equazioni valgono qualunque siano le forze, qualunque sia l'ordine di grandezza delle traslazioni ξ , η , ζ , e comunque siano orientati i varî sistemi di assi, purchè tutti rispettivamente paralleli nel caso di rotazioni nulle.

Supponiamo ora:

1° che nei punti $P_{r1}(a_r, b_r, c_r)$ siano applicate delle forze *infinitesime* di componenti Ξ_{r1} , H_{r1} , Z_{r1} ; nei baricentri $P_{r2}(x_{r2}, y_{r2}, z_{r2})$ delle forze *finite* di componenti Ξ_{r2} , H_{r2} , Z_{r2} ; e intorno alle origini P_{r0} due coppie di momento infinitesimo, alle quali potremo sempre sostituire due sistemi di forze eguali ed opposte, applicate nei punti opposti $\pm x_{r3}$, $\pm y_{r3}$, $\pm z_{r3}$, di componenti $\pm \Xi_{r3}$, $\pm H_{r3}$, $\pm Z_{r3}$;

2° che le accelerazioni traslatorie ξ'' , η'' , ζ'' siano dell'ordine di grandezza delle rotazioni, cioè infinitesime;

3° che gli assi fissi nei corpi siano rispettivamente paralleli ai loro assi principali d'inerzia, e di più uno d'essi passi per il rispettivo baricentro: cosicchè valgono le identità

$$(H) \quad \sum_{C_r} m_{ri} x_{ri} y_{ri} = 0, \text{ etc.}$$

Allora, ricordando le (1'), (1''), (1'''), facendo le posizioni

$$(K) \quad M_r^{(2)} = \sum_{C_r} m_{ri} (y_{ri}^2 + z_{ri}^2), \text{ etc.},$$

e trascurando tutti i termini di secondo grado nelle quantità infinitesime, le (G) danno:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= b_1 (Z_{11} + Z_{21} + Z_{22} - \pi_1 H_{22}) - c_1 (H_{11} + H_{21} + H_{22} + \pi_1 Z_{22}) \\
 &+ Z_{12} (y_{12} + \varrho_1 x_{12} - \pi_1 s_{12}) - H_{12} (s_{12} + \pi_1 y_{12} - \chi_1 x_{12}) \\
 &+ a_1 (\varrho_1 Z_{22} + \chi_1 H_{22}) + 2 Z_{13} y_{13} - 2 H_{13} s_{13} - \pi_1'' M_1^{(\omega)} \\
 &+ M_2 (\eta'' + \varrho_1' a_1 - \pi_1'' c_1 + \varrho_2' x_{22} - \pi_2' s_{22}) + \eta'' s_{12} M_1 \\
 &- M_2 (\zeta'' - \chi_1' a_1 + \pi_1' b_1 - \chi_2' x_{22} + \pi_2' y_{22}) - \zeta'' y_{12} M_1, \text{ etc.} \\
 H_2 &= Z_{21} b_2 - H_{21} c_2 + Z_{22} (y_{22} + \varrho_2 x_{22} - \pi_2 s_{22}) - H_{22} (s_{22} + \pi_2 y_{22} - \chi_2 x_{22}) \\
 &+ 2 Z_{23} y_{23} - 2 H_{23} s_{23} \\
 &- \pi_2' M_2^{(\omega)} + M_2 [s_{22} (\eta'' + \varrho_1' a_1 - \pi_1'' c_1) - y_{22} (\zeta'' + \pi_1' b_1 - \chi_1' a_1)] \text{ etc.} \\
 &\hspace{15em} (G_1)
 \end{aligned}$$

7. Si tratti ora di due pendoli sferici, cosicchè il sistema ammette 6 gradi di libertà. Questi siano sospesi in modo che gli assi delle z_r passino per i punti P_{r1} e per i baricentri P_{r2} , cioè sia

$$\left. \begin{aligned} a_r &= b_r = 0; \\ x_{r2} = y_{r2} &= 0; \quad z_{r2} = l_r \end{aligned} \right\} (r = 1, 2).$$

Le forze applicate nei baricentri siano appunto i pesi dei due pendoli, cosicchè le loro componenti secondo gli assi fissi sono:

$$\Xi_{r2} = H_{r2} = 0, \quad Z_{r2} = M_r g,$$

supponendo l'asse delle ζ diretto secondo la gravità.

Le coppie intorno ai punti di sospensione agiscono costantemente in un piano normale agli assi delle z_r , cosicchè si possono sostituire a ciascuna d'esse due forze d'intensità $\pm \tau_r$ parallele agli assi delle x_r e applicate in due punti dell'asse delle y_r distanti dall'origine per l'unità di lunghezza. Notando che queste forze sono infinitesime e quindi differiscono per quantità trascurabili dalle loro componenti secondo gli assi fissi, queste ipotesi si esprimono mediante le identità:

$$\begin{aligned} x_{r3} = z_{r3} &= 0, \quad y_{r3} = \pm 1 \\ \Xi_{r3} = \pm \tau_r, \quad H_{r3} &= Z_{r3} = 0. \end{aligned}$$

Poniamo infine per semplicità

$$\Xi_{r1} = f_r, \quad H_{r1} = \varphi_r.$$

Allora, ferme restando tutte le ipotesi restrittive fin qui enunciate, dalle (G₁) si arriva alle

$$(G_2) \left\{ \begin{aligned} -H_1 &= -\eta'' (M_1 l_1 + M_2 c_1) + \pi_1'' (M_2 c_1^2 + M_1^{(\omega)}) + \pi_2'' M_2 l_2 c_1 + \\ &+ \pi_1 g (M_2 c_1 + M_1 l_1) + c_1 (g_1 + g_2) \\ -K_1 &= +\xi'' (M_1 l_1 + M_2 c_1) + \chi_1'' (M_2 c_1^2 + M_1^{(\varrho)}) + \chi_2'' M_2 l_2 c_1 + \\ &+ \chi_1 g (M_2 c_1 + M_1 l_1) - c_1 (f_1 + f_2) \\ -L_1 &= \varrho_1'' M_1^{(\zeta)} + 2 \tau_1 \end{aligned} \right.$$

$$(G_2') \begin{cases} -H_2 = -\gamma'' M_2 l_2 + \pi_1'' M_2 l_2 c_1 + \pi_2'' M_2^{(\infty)} + \pi_2 g M_2 l_2 + c_2 g_2 \\ -K_2 = +\xi'' M_2 l_2 + \chi_1'' M_2 l_2 c_1 + \chi_2'' M_2^{(g)} + \chi_2 g M_2 l_2 - c_2 f_2 \\ -L_2 = \varrho_2'' M_2^{(\infty)} + 2 \tau_2 \end{cases}$$

8. Queste equazioni valgono qualunque siano le masse e le dimensioni dei due corpi. Supponiamo ora che il primo si riduca a un filo flessibile e inestendibile, di massa trascurabile rispetto a quella del secondo, di lunghezza c_1 e con gli estremi nei punti P_{10} , P_{11} . Tali ipotesi si esprimono sopprimendo nelle (G_2) tutti i termini contenenti la massa o i momenti d'inerzia del corpo C_1 . Così appunto facendo, osservando che la natura dei legami consente il massimo grado di libertà, sostituendo a π_r , χ_r , ϱ_r e alle loro derivate i valori ricavati dalle (F) , e separando i termini che non dipendono esplicitamente dalle incognite mediante le posizioni:

$$(L) \begin{cases} c_1 (\mu_1'' M_2 c_1 + \mu_2'' M_2 l_2 + \mu_1 g M_2 - f_1 - f_2) = c_1 \Phi_1 \\ c_1 (\lambda_1'' M_2 c_1 + \lambda_2'' M_2 l_2 + \lambda_1 g M_2 + g_1 + g_2) = c_1 \Psi_1 \end{cases}$$

$$(L') \begin{cases} \mu_1' M_2 l_2 c_1 + \mu_2'' M_2^{(g)} + \mu_2 M_2 l_2 g - f_2 c_2 = l_2 \Phi_2 \\ \lambda_1' M_2 l_2 c_1 + \lambda_2'' M_2^{(\infty)} + \lambda_1 M_2 l_2 g + g_2 c_2 = l_2 \Psi_2 \\ \gamma_2'' M_2^{(\infty)} + 2 \tau_2 = X_2 \end{cases}$$

si arriva infine alle equazioni effettive del moto:

$$(10) \begin{cases} \xi'' M_2 + \beta'' M_2 (c_1 + l_2) + \beta g M_2 + \Phi_1 = 0 \\ -\eta'' M_2 + \alpha'' M_2 (c_1 + l_2) + \alpha g M_2 + \Psi_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(10') \begin{cases} \xi'' M_2 + \beta'' \left(M_2 c_1 + \frac{M_2^{(g)}}{l_2} \right) + \beta g M_2 + \Phi_2 = 0 \\ -\eta'' M_2 + \alpha'' \left(M_2 c_1 + \frac{M_2^{(\infty)}}{l_2} \right) + \alpha g M_2 + \Psi_2 = 0 \\ \gamma'' M_2^{(\infty)} + X_2 = 0 \end{cases}$$

Se in queste equazioni si suppongono note tutte le costanti e si possono determinare in funzione del tempo tutte le variabili (forze — rotazioni apparenti) che compariscono nelle funzioni Φ_1, \dots, X_2 , è facilissimo procedere all'integrazione del sistema. Basta infatti seguire il metodo già da me esposto in un'altra pubblicazione⁽²⁾, sul quale, appunto per ciò, non mi dilungo.

(1) Come si vede, è omessa a bella posta l'equazione $L_1 = 0$, relativa alla rotazione del primo corpo intorno al proprio asse verticale: infatti tale equazione non ha più significato per un corpo filiforme, quale è appunto C_1 .

(2) *Sulla determinazione dei moti sismici*. Nota II; Rendic. d. A. d. Lincei, 17 marzo 1901, pag. 205.

9. Alle condizioni teoriche successivamente enunciate fin qui, si approssimerebbero con sufficiente esattezza gli ordinari pendoli verticali usati in sismografia, purchè vi si apportassero le seguenti modificazioni:

1° un filo di sospensione abbastanza lungo, rispetto al suo diametro, per poter trascurare la curvatura ch'esso subisce, flettendosi, verso le estremità;

2° una massa pendolare costituente un corpo praticamente rigido (1°);

3° un sistema di leve, analoghe a quelle applicate alla massa pendolare, che decomponga, amplifichi e registri anche il movimento dell'estremità inferiore del filo di sospensione.

Un tale strumento infatti, oltre alle condizioni geometriche e cinematiche, può soddisfare anche alle restrizioni imposte alle forze nei nn. 6 e 7, perchè: 1° nell'estremità inferiore del filo (P_{11}) e in un punto P_{21} della massa rigida agiscono le resistenze dovute alle leve scriventi, all'aria e alla flessione del filo di sospensione, resistenze piccolissime rispetto al peso dello strumento; 2° nel baricentro (P_{22}) della massa pendolare agisce il suo peso gM_2 ; 3° intorno all'asse delle z_2 agisce il momento di torsione del filo e gli attriti di varia natura che si oppongono alla rotazione del pendolo, tutti piccolissimi rispetto alla gravità.

Dunque il moto dello strumento in occasione di microsismi è retto dalle equazioni (10) e (10').

Ma si può dimostrare anche che il suo moto apparente permette di risalire alle componenti del moto sismico, cioè che le equazioni (10) e (10') si possono effettivamente integrare. A tal fine si osservi che le costanti relative alle dimensioni e alla massa dello strumento sono suscettibili d'una determinazione diretta esatta quanto si vuole; e così pure le rotazioni apparenti intorno agli assi orizzontali, le quali sono legate alle traslazioni apparenti (X_1 Y_1) (X_2 Y_2) dei punti P_{11} , P_{21} dalle relazioni

$$(M) \quad \begin{aligned} c_1 \lambda_1 &= -Y_1 & , & \quad c_1 \mu_1 = +X_1; \\ c_2 \lambda_2 &= -(Y_2 - Y_1) & , & \quad c_2 \mu_2 = +(X_2 - X_1). \end{aligned}$$

Restano a determinare la forma e il valore delle forze f_r , g_r .

Mi pare molto verosimile l'ipotesi che queste forze si oppongano alle traslazioni apparenti dei rispettivi punti d'applicazione e siano nulle quando lo strumento si trova in quiete e in equilibrio: ipotesi espressa dalle egua-

(1) Insisto su questa condizione, perchè gli attuali pendoli verticali se ne scostano moltissimo: costituiti, come sono, d'un'asta metallica di sezione piccolissima rispetto alla lunghezza, gravata in basso da una massa enorme, realizzano un sistema eminentemente elastico; cosicchè un urto anche leggero provoca considerevoli oscillazioni trasversali dell'asta. Anche quelli a sospensione trifilare hanno l'identico difetto: e le perturbazioni che il moto dei pendoli subisce per tali vibrazioni trasversali rende assolutamente inapplicabili, nella massima parte dei casi, le conclusioni matematiche alle quali sono arrivato.

glianze

$$(N) \quad f_r = -(p_r X_r + p'_r X'_r) ; \quad g_r = -(q_r Y_r + q'_r Y'_r),$$

con p_r, p'_r, q_r, q'_r costanti ⁽¹⁾.

In conseguenza delle (L) (L') (M) (N) si ricava:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = X_1 p_1 + X'_1 p'_1 + X_2 p_2 + X'_2 p'_2 + F_1, \text{ etc.} \\ \Phi_2 = \quad \quad \quad X_2 \frac{p_2 c_2}{l_2} + X'_2 p'_2 \frac{c_2}{l_2} + F_2, \text{ etc.,} \end{array} \right.$$

essendo F_1 e F_2 funzioni completamente note del tempo.

Ciò posto si possono determinare sperimentalmente i valori delle p, q , con un procedimento analogo a quello seguito nella Nota testè citata (pag. 207). Infatti se allo strumento si dà un urto quando il terreno è in quiete, le equazioni che reggono il suo moto si riducono a

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0 \quad \Psi_1 = \Psi_2 = 0 \quad X_2 = 0.$$

Se per due istanti diversi si possono ottenere dai diagrammi del movimento due sistemi diversi di valori per X_2, X'_2, F_2 , questi valori, sostituiti nella equazione $\Phi_2 = 0$, daranno due equazioni lineari non omogenee rispetto alle incognite p_2 e p'_2 (V. le posizioni (P)) e quindi permetteranno in generale ⁽²⁾ di determinare queste incognite. Cercati poi per altri due istanti qualunque i valori di X_1, X'_1, F_1 e sostituitili nella $\Phi_1 = 0$, si potranno determinare le incognite p_1 e p'_1 . Con metodo identico si procederà per le incognite q .

E così un solo strumento permette di determinare *quattro* delle sei incognite sismiche. Per le altre due componenti, *vorticosa* e *sussultoria*, si potrebbe ricorrere a uno strumento analogo al microsismografo « Vicentini » per

⁽¹⁾ Infatti la forza f_r , opponendosi alle traslazioni del punto P_r , parallele all'asse delle X , sarà funzione di X_r e di X'_r : sviluppando tale funzione in serie di potenze, omettendo i termini di grado superiore al primo nelle variabili infinitesime X_r, X'_r , e osservando che deve mancare il termine costante, perchè f_r si suppone nulla per $X_r = X'_r = 0$, si trova appunto lo sviluppo (N).

⁽²⁾ Per evitare il dubbio che il determinante dei coefficienti possa essere nullo, si può scegliere un istante in cui X_2 è *massimo*, e un istante in cui X_2 si annulla, *cambiando segno*: se $F_2^{(1)}, F_2^{(2)}$ sono i corrispondenti valori di F_2 , le equazioni da risolvere diventano:

$$X_2 p_2 \frac{c_2}{l_2} + F_2^{(1)} = 0 ; \quad X'_2 p'_2 \frac{c_2}{l_2} + F_2^{(2)} = 0 ;$$

perchè nel primo istante X_2 è nullo e nel secondo invece è necessariamente diverso da zero.

la componente verticale (1), debitamente modificato; ma su questo non insisto, riservandomi di farlo in un altro lavoro.

10. Per esaurire la questione propostami, soporrò infine che il filo abbia una lunghezza trascurabile rispetto alle dimensioni della massa pendolare, e quindi che si sopprima il sistema di leve destinato a registrare il moto della sua estremità inferiore. Allora vengono a mancare i due gradi di libertà rappresentati dalle equazioni (10), e il moto del pendolo è retto dalle equazioni (10'). Considerando soltanto la prima di queste equazioni, ricordando la prima delle (L') e delle (N) e l'ultima delle (M), e infine che è $X_1 = 0$, si ricava l'equazione:

$$\xi'' M_2 + \beta'' \frac{M_2^{(p)}}{l_2} + \beta_2 g M_2 + \left(\mu_2'' \frac{M_2^{(p)}}{l_2} + p_2' c_2 \mu_2' + \mu_2 [M_2 g + p_2 c_2] \right) = 0,$$

che differisce per termini trascurabili dalla prima delle equazioni relative al pendolo verticale « Vicentini » (2).

Eguale ragionamento si può ripetere per le rimanenti equazioni (10'); e così resta dimostrato l'asserto premesso alla trattazione del problema generale.

Patologia vegetale. — *Intorno ad un caso speciale di deperimento primaverile del frumento ed ai mezzi di ovviarvi.* Nota del dott. VITTORIO PEGLION, presentata dal Corrispondente G. CUBONI.

Chimica. — *Riduzione dell'Artemisina con cloruro stannoso.* Nota di P. BERTOLO, presentata dal Socio CANNIZZARO.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(1) Vicentini e Pacher, *Microsismografo per la componente verticale*. Atti R. Ist. Ven. 1898-99, pagg. 65-89; opp. Bollettino della Soc. Sism. it., vol. V, pagg. 33-58.

(2) V. equazione (7) della mia Nota *Sulla determinazione dei moti sismici*, seduta del 3 marzo 1901, pag. 148.

I termini differenti sono $+ a \xi' + a l \beta'$, che allora apparivano nelle equazioni citate, perchè m'era sfuggita l'osservazione che l'aria si oppone al movimento *relativo*, non già al movimento *assoluto* del pendolo. Del resto il valore della costante a è tanto piccolo che la differenza non ha nessuna importanza pratica.