ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 31 maggio 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla deformazione delle superficie di rotazione.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Nella Memoria di Ribaucour: *Sur la théorie générale des surfaces courbes* (1) è considerato, al n. 92, un caso assai generale di deformazione di una congruenza rettilinea. Ciascun raggio della congruenza si pensa invariabilmente collegato ad un corrispondente piano tangente di una superficie S, la giacitura del raggio rispetto al piano tangente essendo affatto arbitraria, e si suppone che la superficie S si deformi seco trascinando i suoi piani tangenti, ed i raggi della congruenza C. Se la congruenza C è normale in una configurazione iniziale di S, essa rimane costantemente normale in qualunque deformazione nei due casi particolari seguenti: 1° quando il raggio esce dal punto di contatto del piano tangente (teorema di Beltrami); 2° quando giace nel piano tangente stesso (Ribaucour). Ma negli altri casi la congruenza perde in generale, colla deformazione, la proprietà di essere normale, a meno che la superficie S non sia applicabile sopra una superficie di rotazione, la giacitura della congruenza rispetto alla superficie S essendo poi assoggettata a particolari condizioni, che si traducono in un certo sistema di equazioni alle derivate parziali (Ribaucour, l. c.).

(1) Journal de mathématiques (4ème série, t. VII), 1891.

Le linee seguenti hanno per oggetto di far conoscere un caso particolare di queste deformazioni, notevole per la sua semplicità. Esso viene dato dal teorema: *Se una superficie di rotazione si fa rotolare sopra una qualunque superficie applicabile* ([1]), *l'asse della superficie descrive sempre una congruenza normale.*

Dimostriamo il teorema colle considerazioni geometriche seguenti. Essendo S una superficie di rotazione e Σ una superficie qualunque applicabile sopra S, partiamo dall'osservazione evidente che l'asse di S passa pel centro di curvatura geodetica di ogni parallelo e giace nel piano normale al parallelo stesso. Considerando dunque S a contatto con Σ in un punto qualunque M, l'asse di S passerà pel centro M' di curvatura geodetica della trasformata del parallelo e giacerà nel piano condotto pel raggio MM' normalmente al piano tangente di Σ. Ora il punto M' descrive la superficie Σ' *complementare* di Σ rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani e il detto piano, normale al piano tangente di Σ, non è altro che il piano tangente in M' alla Σ'. Dunque l'asse della S è tangente in M' alla Σ'. Ora se indichiamo con

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2 \quad (r = f(\alpha))$$

l'elemento lineare di S (o di Σ), riferito ai meridiani (β) ed ai paralleli (α), l'angolo σ d'inclinazione dell'asse di S sul raggio MM' (tangente al meridiano) è dato da

$$\operatorname{sen} \sigma = \frac{dr}{d\alpha}.$$

D'altronde, per la formola che lega l'elemento lineare della complementare Σ' a quello di Σ ([2]), si sa che la Σ' è applicabile essa stessa sopra una superficie di rotazione e il raggio ϱ del parallelo di questa superficie è dato da

$$\varrho = \frac{a}{\frac{dr}{d\alpha}},$$

essendo a una costante; ne risulta:

$$\varrho \operatorname{sen} \sigma = a. \tag{1}$$

Ma poichè σ è l'angolo che i detti assi, tangenti a Σ', formano colle deformate dei meridiani, la (1) ci dimostra (pel teorema di Clairaut) che

([1]) Quando due superficie S, S' sono applicabili, diciamo che S rotola sopra S' se, tenendo fissa S', si fa acquistare ad S una doppia infinità di posizioni, portando ogni volta un punto P di S a coincidere col corrispondente P' di S', in guisa che i piani tangenti in P, P' coincidano e si sovrappongano gli elementi lineari corrispondenti degli intorni.

([2]) Vedi le mie *Lezioni di geometria differenziale* (seconda edizione, I, pag. 296).

queste tangenti inviluppano sopra Σ' un sistema di geodetiche, e per ciò la congruenza C è una congruenza normale, c. d. d.

Di più, la costante a di Clairaut nella (1) rimanendo fissa, vediamo che le geodetiche inviluppate dagli assi sono incontrate da un medesimo parallelo tutte sotto lo stesso angolo, cioè quando la Σ' è conformata a superficie di rotazione esse sono tutte congruenti fra loro. Il teorema superiore risulta quindi completato dal seguente:

La congruenza normale descritta dall'asse di una superficie di rotazione S, *che rotola sopra una superficie applicabile* Σ, *ammette per una falda della superficie focale la superficie complementare* Σ' di Σ, *e conformando* Σ' *a superficie di rotazione le geodetiche inviluppate sopra* Σ' *dagli assi risultano congruenti fra loro.*

2. Esaminiamo ora le superficie Φ ortogonali agli assi. Riferiamo per ciò dapprima la Σ' ai meridiani e paralleli, e sia

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2$$

il suo elemento lineare. Cangiamo linee coordinate prendendo per linee (v) un sistema di geodetiche congruenti, corrispondenti al valore a della costante di Clairaut, e per linee (u) le loro traiettorie ortogonali, essendo u l'arco delle geodetiche (v) contato da una traiettoria ortogonale fissa. Per le note formole relative alle geodetiche sulle superficie di rotazione [1], potremo prendere

$$\left\{\begin{aligned} u &= a\beta + \int \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}\, d\alpha \\ v &= -a\beta + a^2 \int \frac{d\alpha}{r\sqrt{r^2 - a^2}}, \end{aligned}\right.$$

indi

$$u + v = \int \frac{r\,d\alpha}{\sqrt{r^2 - a^2}}. \tag{2}$$

Se ne trae

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) dv^2,$$

e per la (2) sarà $\frac{r^2}{a^2} - 1$ una certa funzione di $u + v$, che indicheremo con $f^2(u + v)$, Si avrà perciò

$$ds^2 = du^2 + f^2(u + v)\, dv^2, \tag{3}$$

dove la forma della funzione f dipenderà dalla forma della superficie di rotazione e dal valore della costante a.

[1] Vedi *Lezioni* ecc., I, pag. 208.

Le superficie Φ che dobbiamo considerare sono le evolventi della Σ', d'elemento lineare (3), rispetto alle geodetiche (v), cioè le superficie ortogonali alle tangenti di queste geodetiche. Indicando con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura della Φ, si ha

$$r_2 = u\,, \quad r_1 - r_2 = -\frac{f(u+v)}{f'(u+v)}\,,$$

onde segue il teorema: *Le superficie Φ ortogonali agli assi della superficie di rotazione S hanno i raggi principali di curvatura legati da una relazione della forma*

$$\psi(r_1 - r_2) + r_2 = v\,,$$

dove ψ è una funzione dipendente dalla forma di S e v è il parametro delle linee di curvatura di un sistema sopra Φ.

3. Come esempio si prenda per S il paraboloide di rotazione. La superficie complementare Σ' ha l'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + 2(u+v)\,dv^2\,,$$

le geodetiche (v) essendo in questo caso tangenti al parallelo minimo di Σ'. Qui abbiamo

$$r_2 = u\,, \quad r_2 - r_1 = 2u + 2v$$

e quindi

$$r_1 + r_2 = -2v\,.$$

Dunque: *se si fa rotolare il paraboloide di rotazione sopra una superficie applicabile, le superficie normali alla congruenza descritta dall'asse hanno costante la somma dei raggi principali di curvatura lungo le linee di curvatura di un sistema.*

Le deformate del paraboloide di rotazione essendo tutte note, conosciamo così, in termini finiti, una classe di superficie Φ dotate della proprietà enunciata. Terminiamo coll'osservare che alla considerazione delle superficie Φ per le quali è costante la somma dei raggi principali di curvatura lungo le linee di curvatura di un sistema si è condotti in generale dall'esame della questione seguente: *quando accade che ad ogni sistema coniugato sopra una falda dell'evoluta di una superficie Φ corrisponde nell'immagine sferica della congruenza delle normali di Φ un sistema ortogonale?*

Per ciò è appunto necessario e sufficiente che la superficie Φ appartenga alla classe superiore. Allora la corrispondente falda dell'evoluta ha l'elemento lineare tipico

$$ds^2 = du^2 + 2[u + \varphi(v)]\,dv^2\,, \tag{4}$$

che figura nelle ultime ricerche di Weingarten sull'applicabilità [1]. Viceversa le tangenti alle geodetiche (v) in una superficie d'elemento lineare (4) formano una congruenza che, flettendo comunque la superficie di partenza, gode sempre della proprietà descritta.

[1] Darboux, *Leçons*, t. IV, pag. 323.