ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIX.

1902

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1902

L'altezza totale di questi calcari nummulitici è di non più che 500 m. Con eguali caratteri si ripetono a settentrione a Orvinio e nelle vicinanze entro i confini dell'Umbria, a levante nelle Marche, a mezzogiorno in Basilicata e nelle Calabrie per lo meno nei dintorni di Stilo.

Matematica. — *Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a derivate parziali con due variabili indipendenti.* Nota del dottor Tommaso Boggio, presentata dal Socio L. Bianchi.

In questa Nota espongo un procedimento che permette di trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè due equazioni lineari, a due variabili indipendenti, d'ordine qualunque, delle quali una è omogenea, abbiano almeno una soluzione comune [1]. Indico poi alcune applicazioni del risultato ottenuto [2].

1. Sia Φ una funzione di x, y, e consideriamo le equazioni lineari:

$$\mathfrak{D}_1 z = \sum_{0}^{m}{}_{ij}\, a_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} = \Phi \quad (^3) \tag{1}$$

$$\mathfrak{D}_2 z = \sum_{0}^{n}{}_{ij}\, a'_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} = 0, \tag{2}$$

ove le a, a' sono coefficienti costanti, e z è una funzione incognita di x, y.

Supponiamo poi dapprima che le espressioni $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ non abbiano a comune, come fattore, nessuna espressione differenziale, cioè che siano *prime*

Guarcino sono indicati calcari con *Orbitoides* e *Nummulites*. Calcari nummulitici non ve ne ho trovati; le *Orbitoides* appartengono alla Creta superiore, come quelle che Marinelli ha trovato nella Creta del Monte Conero ad Ancona e del Monte Iudica in Sicilia, e come quelle di Pachino pure in Sicilia: il De Gregorio distinse queste col nome generico di *Simplorbites*; ma Douvillé e Schlumberger serbano anzi ad esse il nome di *Orbitoides* attribuendo a sottogeneri diversi le specie più recenti.

(1) Nel caso di due equazioni di 2° ordine, anche non lineari, la questione è stata trattata dal prof. Bianchi. Cfr. Bianchi, *Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali di 2° ordine con due variabili* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 4ª, vol. II, 2° semestre 1886).

(2) I calcoli relativi si troveranno esposti per disteso in una Memoria di prossima pubblicazione.

(3) Scrivendo $\sum_{0}^{m}{}_{ij}$ intendiamo che ad i, j, bisogna dare quei valori (interi e positivi o nulli) la cui somma è $\leq m$; quando invece scriveremo $\sum_{0}^{m}{}'_{ij}$ intenderemo di dare ad i, j solo i valori (interi e positivi o nulli) la cui somma vale m.

tra loro; allora io dico che: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le* (1), (2) *abbiano soluzioni comuni è che sia soddisfatta l'equazione:*

$$\mathfrak{D}_2 \Phi = 0. \tag{3}$$

È intanto facile vedere che questa condizione è necessaria.

Infatti si ha, dalla (1):

$$\mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1 z = \mathfrak{D}_2 \Phi = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 z$$

onde, per la (2):

$$\mathfrak{D}_2 \Phi = 0,$$

come si era asserito.

2. Mostriamo ora che quella condizione è pure sufficiente.

Prendiamo perciò le derivate parziali successive dei primi $n-1$ ordini della (1) e dei primi $m-1$ ordini della (2); otteniamo così le equazioni:

$$\sum_0^m {}_{ij}\, a_{ij} \frac{\partial^{i+j+h+k} z}{\partial x^{i+h}\, \partial y^{j+k}} = \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h\, \partial y^k}\ , \quad (h+k < n-1)$$

$$\sum_0^n {}_{ij}\, a'_{ij} \frac{\partial^{i+j+h+k} z}{\partial x^{i+h}\, \partial y^{j+k}} = 0\ , \quad (h+k < m-1)$$

$$\sum_0^m {}_{ij}\, a_{ij} \frac{\partial^{i+j+n-1} z}{\partial x^{i+h}\, \partial y^{j+k}} = \frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^h\, \partial y^k}\ , \quad (h+k = n-1)$$

$$\sum_0^n {}_{ij}\, a'_{ij} \frac{\partial^{i+j+m-1} z}{\partial x^{i+h}\, \partial y^{j+k}} = 0\ , \quad (h+k = m-1);$$

ponendo, per brevità:

$$p_{r,s} = \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r\, \partial y^s}\ , \quad (r+s < m+n-1)$$

$$\varphi_{r,s} = \frac{\partial^{m+n-1} z}{\partial x^r\, \partial y^s}\ , \quad (r+s = m+n-1)$$

possiamo scrivere:

$$\sum_0^m {}_{ij}\, a_{ij}\, p_{i+h,j+k} = \frac{\partial^{h+k} \Phi}{\partial x^h\, \partial y^k}\ , \quad (h+k < n-1) \tag{4}$$

$$\sum_0^n {}_{ij}\, a'_{ij}\, p_{i+h,j+k} = 0\ , \quad (h+k < m-1) \tag{5}$$

$$\sum_0^{m}{}'_{ij}\, a_{ij}\, \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{m-1} {}_{ij}\, a_{ij}\, p_{i+h,i+k} = \frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^h\, \partial y^k}\ , \quad (h+k = n-1) \tag{6}$$

$$\sum_0^{n}{}'_{ij}\, a'_{ij}\, \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-1} {}_{ij}\, a'_{ij}\, p_{i+h,j+k} = 0\ , \quad (h+k = m-1). \tag{7}$$

Le equazioni (6), (7) sono $n+m$ in tutto, onde supposto diverso da zero il determinante A formato coi coefficienti delle funzioni φ, esse determinano le $m+n$ funzioni φ in funzione delle p.

3. Ciò posto, è chiaro che basta determinare le $p_{r,s}$ in modo che siano soddisfatte le equazioni ai differenziali totali:

$$(8) \qquad \begin{cases} dp_{r,s} = p_{r+1,s}\,dx + p_{r,s+1}\,dy \quad , \quad (r+s < m+n-2) \\ dp_{r,s} = \varphi_{r+1,s}\,dx + \varphi_{r,s+1}\,dy \quad , \quad (r+s = m+n-2)\,. \end{cases}$$

Indichiamo poi con f una funzione di x, y e delle $p_{r,s}$ (queste quantità essendo ora riguardate come variabili indipendenti) e consideriamo le equazioni:

$$(9) \qquad \begin{cases} \mathrm{X}f = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \displaystyle\sum_{0\ rs}^{m+n-3} p_{r+1,s} \frac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \sum_{0\ rs}^{m+n-2}{}' \varphi_{r+1,s} \frac{\partial f}{\partial p_{rs}} = 0 \\[2ex] \mathrm{Y}f = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \displaystyle\sum_{0\ rs}^{m+n-3} p_{r,s+1} \frac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \sum_{0\ rs}^{m+n-2}{}' \varphi_{r,s+1} \frac{\partial f}{\partial p_{rs}} = 0\,. \end{cases}$$

Allora, in virtù di una nota proprietà, affinchè il sistema (8) sia integrabile è necessario e sufficiente che il sistema (9) sia Jacobiano, cioè che sia identicamente:

$$\mathrm{X}(\mathrm{Y}f) - \mathrm{Y}(\mathrm{X}f) = 0\ ;$$

ora si ha

$$\mathrm{X}(\mathrm{Y}f) - \mathrm{Y}(\mathrm{X}f) = \sum_{0\ rs}^{m+n-3} (\mathrm{X}p_{r,s+1} - \mathrm{Y}p_{r+1,s}) \frac{\partial f}{\partial p_{rs}} + \sum_{0\ rs}^{m+n-2}{}' (\mathrm{X}\varphi_{r,s+1} - \mathrm{Y}\varphi_{r+1,s}) \frac{\partial f}{\partial p_{rs}}\,,$$

e poichè dalle (9) si deduce: $\mathrm{X}p_{r,s+1} = p_{r+1,s+1} = \mathrm{Y}p_{r+1,s}$, ne viene che dovrà essere identicamente:

$$(10) \qquad \mathrm{X}\varphi_{r,s+1} - \mathrm{Y}\varphi_{r+1,s} = 0 \quad , \quad (r+s = m+n-2)\,.$$

Queste equazioni sono in tutto $m+n-1$; giova però notare che esse non sono tutte indipendenti, perchè ora mostreremo che se è soddisfatta una di esse, lo saranno pure tutte le altre.

Infatti prendendo l'X e l'Y di ambo i membri delle (6), (7) otteniamo:

$$(6') \quad \sum_{0\ ij}^{m}{}' a_{ij}\, \mathrm{X}\varphi_{i+h,j+k} + \sum_{0\ ij}^{m-1}{}' a_{ij}\, \varphi_{i+h+1,j+k} + \sum_{0\ ij}^{m-2} a_{ij}\, p_{i+h+1,j+k} = \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{h+1}\, \partial y^k}\,,$$

$$(h+k = n-1)$$

$$(6'') \quad \sum_{0\ ij}^{m}{}' a_{ij}\, \mathrm{Y}\varphi_{i+h,j+k} + \sum_{0\ ij}^{m-1}{}' a_{ij}\, \varphi_{i+h,j+k+1} + \sum_{0\ ij}^{m-2} a_{ij}\, p_{i+h,j+k+1} = \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^{h}\, \partial y^{k+1}}\,,$$

$$(h+k = n-1)$$

$$(7') \quad \sum_0^{n}{}'_{ij}\, a'_{ij}\, X\varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-1}{}'_{ij}\, a'_{ij}\, \varphi_{i+h+1,j+k} + \sum_0^{n-2}{}_{ij}\, a'_{ij}\, p_{i+h+1,j+k} = 0$$

$$(h+k=m-1)$$

$$(7'') \quad \sum_0^{n}{}'_{ij}\, a'_{ij}\, Y\varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-1}{}'_{ij}\, a'_{ij}\, \varphi_{i+h,j+k+1} + \sum_0^{n-2}{}_{ij}\, a'_{ij}\, p_{i+h,j+k+1} = 0\,,$$

$$(h+k=m-1).$$

Dalle (6'), (6'') si ha sottraendo:

$$(6_1) \qquad \sum_0^{m}{}'_{ij}\, a_{ij}\,(X\varphi_{i+h,j+k+1} - Y\varphi_{i+h+1,j+k}) = 0 \quad , \quad (h+k=n-2)\,,$$

e, dalle (7'), (7''):

$$(7_1) \qquad \sum_0^{n}{}'_{ij}\, a'_{ij}\,(X\varphi_{i+h,j+k+1} - Y\varphi_{i+h+1,j+k}) = 0 \quad , \quad (h+k=m-2)\,;$$

onde le $m+n-1$ quantità $X\varphi_{r,s+1} - Y\varphi_{r+1,s}$ sono legate dalle $m+n-2$ equazioni (6_1), (7_1), che sono lineari ed omogenee; inoltre i determinanti d'ordine $m+n-2$ estratti dalla matrice dei coefficienti non possono essere tutti nulli, perchè se ciò accadesse dovrebbe pure essere nullo A, ciò che si è escluso; risolvendo pertanto le (6_1), (7_1) rispetto ad $m+n-2$ incognite, i cui cofficienti costituiscano uno di questi determinanti non nulli, avremo queste incognite espresse come funzioni lineari ed omogenee della rimanente, onde se questa è nulla, sono pure nulle tutte le altre $m+n-2$; e ciò prova il nostro asserto.

4. Ora mostreremo che dalle (10) si deduce la (3), e viceversa.

Infatti dalle (6'), dall'ultima delle (6'') (cioè quella corrispondente ad $h=0$) e dalle (6), (4), si ricava facilmente:

$$\sum_0^{m}{}'_{ij}\, a_{ij}\Big[\sum_0^{n-1}{}_k\, a'_{n-k,k}\, X\varphi_{i+n-1-k,j+k} + a'_{0n}\, Y\varphi_{i,j+n-1} + \sum_0^{n-1}{}'_{hk}\, a'_{hk}\, \varphi_{i+h,j+k} +$$

$$+ \sum_0^{n-2}{}_{hk}\, a'_{hk}\, p_{i+h,j+k}\Big] + \sum_0^{m-1}{}'_{ij}\, a_{ij}\Big(\sum_0^{n}{}'_{hk}\, a'_{hk}\, \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-1}{}_{hk}\, a'_{hk}\, p_{i+h,j+k}\Big) +$$

$$+ \sum_0^{m-2}{}_{ij}\, a_{ij}\Big(\sum_0^{n}{}_{hk}\, a'_{hk}\, p_{i+h,j+k}\Big) = \sum_0^{n}{}_{hk}\, a'_{hk}\, \frac{\partial^{h+k}\Phi}{\partial x^h\, \partial y^k}\,,$$

ora, in virtù delle (5), (7) le espressioni entro le (...) sono entrambe nulle, quindi rimane:

$$(11) \quad \sum_0^{m}{}'_{ij}\, a_{ij}\Big[\sum_0^{n-1}{}_k\, a'_{n-k,k}\, X\varphi_{i+n-1-k,j+k} + a'_{0n}\, Y\varphi_{i,j+n-1} + \sum_0^{n-1}{}'_{hk}\, a'_{hk}\, \varphi_{i+h,j+k} +$$

$$+ \sum_0^{n-2}{}_{hk}\, a'_{hk}\, p_{i+h,j+k}\Big] = \mathfrak{D}_2\, \Phi\,.$$

Ora osserviamo che se nelle (7') al posto di h si legge $h-1$, e poi si permutano h, k con i, j si ha:

$$\sum_0^n{}'_{hk} a'_{hk} \, X\varphi_{i+h-1,j+k} + \sum_0^{n-1}{}'_{hk} a'_{hk} \, \varphi_{i+h,j+k} + \sum_0^{n-2}{}_{hk} a'_{hk} \, p_{i+h,j+k} = 0 ,$$
$$(i = 1, 2, \dots, m \quad ; \quad i + j = m) ;$$

e dall' ultima delle (7'') (cioè quella corrispondente ad $h = 0$) permutando h, k con i, j si ottiene:

$$\sum_0^n{}'_{hk} a'_{hk} \, Y\varphi_{h,m+k-1} + \sum_0^{n-1}{}'_{hk} a'_{hk} \, \varphi_{h,m+k} + \sum_0^{n-2}{}_{hk} a'_{hk} \, p_{h,m+k} = 0 .$$

Sostituendo nella (11) e riducendo, si deduce:

$$(12) \qquad - a'_{0n} \sum_0^{m-1}{}_k a_{m-k,k} \left(X\varphi_{m+k-1,n+k} - Y\varphi_{m-k,n+k-1} \right) +$$
$$+ a_{0m} \sum_0^{n-1}{}_k a'_{n-k,k} \left(X\varphi_{n-k-1,m+k} - Y\varphi_{n-k,m+k-1} \right) = \mathfrak{D}_2 \, \Phi .$$

Ora, se le (10) sono soddisfatte, le quantità entro le (...) sono nulle e così otteniamo la (3). Inversamente, se la (3) è soddisfatta, l'equazione precedente unita alle (6_1), (7_1) dà un sistema di $m + n - 1$ equazioni, lineari ed omogenee fra le $m + n - 1$ incognite $X\varphi_{r,s+1} - Y\varphi_{r+1,s}$, e siccome è facile vedere che il determinante dei coefficienti, a meno del segno, vale A, il quale è stato supposto diverso da zero, si conclude che devono necessariamente esser nulle tutte le incognite; e così otteniamo le (10), come avevamo asserito.

In tal modo il nostro teorema è completamente dimostrato.

Abbiamo supposto che il determinante A fosse diverso da zero; però il teorema, in generale, continua ancora a sussistere anche se $A = 0$.

5. Supponiamo ora che le espressioni $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ non siano prime tra loro; sia cioè:

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}' \, \mathfrak{D} \quad , \quad \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}'' \, \mathfrak{D} ,$$

ove $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ sono espressioni prime tra loro.

Le (1), (2) diventano allora:

$$(1') \qquad \mathfrak{D}' \, \mathfrak{D} z = \Phi \quad , \quad \mathfrak{D}'' \, \mathfrak{D} z = 0 ;$$

orbene *la condizione necessaria e sufficiente affinchè le equazioni precedenti abbiano soluzioni comuni è che sia soddisfatta l'equazione*:

$$\mathfrak{D}'' \, \Phi = 0 .$$

Infatti, posto $Z = \mathfrak{D} z$, le equazioni (1') possono scriversi:

$$\mathfrak{D}' Z = \Phi \quad , \quad \mathfrak{D}'' Z = 0 ,$$

e applicando il teorema del § 1 a queste due equazioni, si conclude la proposizione enunciata.

6. Vediamo alcune applicazioni del teorema del § 1.

Indichiamo con $\mathfrak{D}$ un'espressione lineare analoga a $\mathfrak{D}_1$, e con $u(x, y)$ una funzione di x, y, e calcoliamo $\mathfrak{D}(xu)$; è chiaro che si avrà un risultato della forma:

$$\mathfrak{D}(xu) = x\,\mathfrak{D}u + \mathfrak{D}_x u\,,$$

$\mathfrak{D}_x$ essendo un'espressione lineare di un tipo analogo a $\mathfrak{D}$ (1).

Se la funzione u soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}u = 0$, si trae:

$$\mathfrak{D}^2(xu) = 0\,.$$

Se $v(x, y)$ è una funzione che verifica l'equazione $\mathfrak{D}v = 0$, e si pone:

$$\mathrm{U} = x\,u + v\,, \tag{13}$$

si ha $\mathfrak{D}^2\mathrm{U} = 0$.

Supponiamo ora che le espressioni $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_x$ siano prime tra loro, allora si può dimostrare che: *Ogni funzione* U *che soddisfa all'equazione* $\mathfrak{D}^2\,\mathrm{U} = 0$ *può rappresentarsi colla* (13).

È chiaro che basta per ciò dimostrare che, data la funzione U, si può sempre determinare una funzione u che soddisfa alle equazioni:

$$\mathfrak{D}(\mathrm{U} - xu) = 0 \quad , \quad \mathfrak{D}u = 0\,,$$

ossia, posto $\Phi = \mathfrak{D}\mathrm{U}$:

$$\mathfrak{D}_x u = \Phi \quad , \quad \mathfrak{D}u = 0\,.$$

Dall'espressione di Φ risulta $\mathfrak{D}\Phi = 0$; quindi pel teorema del § 1 possiamo affermare che esiste sempre la funzione u, e così il teorema è dimostrato.

Supponendo sempre $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_x$ prime tra loro, si può dimostrare che *ogni funzione* U *che soddisfa all'equazione* $\mathfrak{D}^p\mathrm{U} = 0$ *può rappresentarsi colla formola:*

$$\mathrm{U} = x^{p-1}\,u_1 + x^{p-2}\,u_2 + \cdots + xu_{p-1} + u_p\,,$$

le u *essendo funzioni che soddisfanno all'equazione* $\mathfrak{D} = 0$ (2).

(1) Se $\mathfrak{D} = \sum a_{ij} \dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\,\partial y^j}$, si ha $\mathfrak{D}_x = \sum a_{ij}\, i \dfrac{\partial^{i+j-1}}{\partial x^{i-1}\,\partial y^j}$, cioè $\mathfrak{D}_x$ non è altro che la *derivata funzionale*, rispetto ad x, dell'espressione $\mathfrak{D}$.

(2) Se l'equazione $\mathfrak{D} = 0$ si riduce all'equazione di Laplace $\Delta^2 = 0$, questo teorema è del prof. Almansi. Cfr. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$ (Annali di Matematica; serie III, t. II, a. 1898).

7. Poniamo ora: $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$. Allora si può dimostrare, procedendo come nel § precedente, che *ogni funzione* U *che soddisfa all'equazione* $\mathfrak{D}U = 0$, *può esprimersi colla formola* $U = U_1 + U_2$, *ove* U_1, U_2 *sono funzioni che verificano le equazioni* $\mathfrak{D}_1 U_1 = 0$, $\mathfrak{D}_2 U_2 = 0$.

Da quanto precede risulta che ogni funzione U che soddisfa all'equazione $\mathfrak{D}_1^{r} \mathfrak{D}_2^{q} U = 0$, può rappresentarsi mediante funzioni che verificano le equazioni $\mathfrak{D}_1 = 0$, $\mathfrak{D}_2 = 0$.

Si può pertanto dire: *Se l'espressione* $\mathfrak{D}$ *è decomponibile nel prodotto di altre espressioni lineari, l'integrale generale dell'equazione* $\mathfrak{D} = 0$ *può esprimersi mediante gli integrali di altre equazioni più semplici.*

8. Le proprietà precedenti possono estendersi ad equazioni lineari a coefficienti variabili, aggiungendo però la condizione della commutabilità fra le varie espressioni lineari che si considerano.

Per quanto riguarda il teorema del § 1, bisogna supporre che $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ siano commutabili, cioè che $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1$; relativamente ai teoremi del § 6, bisogna aggiungere la condizione che $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_x$ siano commutabili; per i teoremi del § 7, bisogna che $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ siano commutabili, e così pure siano commutabili $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_{1x}$ e $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_{2x}$.

Meccanica. — *Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra una superficie.* Nota di E. Daniele, presentata dal Socio Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota IV del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In una Nota precedente, la terza di questa serie [1], aveva stabilito le equazioni differenziali che reggono il moto dei varî strumenti sismici, supponendoli costituiti ciascuno da un'unica massa sospesa almeno per un punto al terreno e soddisfacente a certe condizioni relative agli assi principali d'inerzia. Quanto alle forze aveva ammesso il seguente postulato sperimentale, che non richiede alcuna ipotesi sulla loro natura e che per la sua generalità è applicabile a tutte le specie di strumenti considerati: « *Qualsiasi strumento sismico è soggetto alla gravità e ad un sistema di resi-*

[1] V. pag. 472.